dem Schwanenwirten Ulrich abgegeben am 26. Oktober 1888

Math. P. 219 f

(2

J. Knab
Ing. München.

# LEHRBUCH

DER

# HÖHEREN MATHEMATIK

VON

DR. JOSEF PH. HERR,

O. Ö. PROFESSOR D. PRAKTISCHEN GEOMETRIE AM K. K. POLYTECHNISCHEN INSTITUTE ZU WIEN; EHEMALS PROFESSOR DER HÖHEREN MATHEMATIK U. PRAKTISCHEN GEOMETRIE AM STEIERM. STÄND. JOANNEUM ZU GRATZ.

ZWEITER BAND,

DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUME, DIE DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG ENTHALTEND.

Bayerische Staatsbibliothek München

MIT DREI FIGURENTAFELN.

K. B. CADETTEN CORPS COMMANDO

Ulrich

WIEN,

VERLAG VON L. W. SEIDEL & SOHN.

1864.

Wbg | 63 | 14

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# INHALT.

## ZWEITER THEIL.

### II. ABSCHNITT.

### ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUME.

#### ERSTES KAPITEL.

Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. — Coordinatensysteme. — Transformation der Coordinaten.


| §. | | Seite |
|---|---|---|
| 244. | Parallel-Coordinaten eines Punktes im Raume. Gleichungen des Punktes | 3 |
| 245. | Einige Sätze über Projectionen | 5 |
| 246. | Polar-Coordinaten eines Punktes im Raume | 8 |
| 247. | Entfernung zweier gegebener Punkte. Neigungswinkel zweier Geraden im Raume. Folgerungen | 9 |
| 248. | Transformation der Coordinaten | 11 |
| 249. | Allgemeine Bemerkungen über die analytische Darstellung von Flächen und Linien im Raume | 15 |


#### ZWEITES KAPITEL.

Von der Ebene und der geraden Linie.

Die Ebene.


| | | |
|---|---|---|
| 250—251. | Gleichung der Ebene. Neigungswinkel einer Ebene gegen die Coordinaten-Ebenen. Besondere Fälle der Lage einer Ebene | 18 |
| 252. | Die Knotenlinien | 21 |
| 253. | Neigungswinkel zweier Ebenen. Folgerungen | 21 |


Die gerade Linie.


| | | |
|---|---|---|
| 254—255. | Gleichungen der Geraden im Raume. Neigungswinkel einer Geraden gegen die Coordinaten-Axen. Besondere Fälle der Lage einer Geraden | 23 |
| 256. | Durchschnitt und Neigungswinkel zweier Geraden | 25 |

§. §. Seite

257. Neigungswinkel und Durchschnittspunkt einer Geraden mit einer Ebene . . . . . . . . . . 27
258—269. Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene . . . . . . . . 28

## DRITTES KAPITEL.

### Von den krummen Flächen im Allgemeinen; den cylindrischen, conischen, Rotations- und windschiefen Flächen.

270. Eintheilung der Flächen. Untersuchung ihrer Gestalt durch ebene Schnitte . . . . . . . . . . 37
271. Eine Fläche ist analytisch durch ihre Gleichung, geometrisch durch eine charakteristische Eigenschaft, oder endlich durch die Art ihrer Erzeugung durch Bewegung einer Curve im Raume nach einem bestimmten Gesetze definirt. Die Kugelfläche . . . . . . . . . . 39
272. Ableitung der Gleichung einer Fläche aus den Gleichungen der erzeugenden Linie und ihrem Bewegungsgesetze . . . . 40
273—274. Allgemeine Gleichung der cylindrischen Flächen. Beispiele. 42
275—276. Allgemeine Gleichung der Kegelflächen. Beispiele . . . . . 44
277. Durchschnitt eines elliptischen oder Kreiskegels mit einer Ebene . . . . . . . . . . 46
278—279. Allgemeine Gleichung der Rotationsflächen. Beispiele . . . 47
280. Windschiefe Flächen. Beispiele . . . . . . . . . . 51
281. Die Schraubenlinie und Schraubenfläche . . . . . . . . . . 53

## VIERTES KAPITEL.

### Von den Flächen der zweiten Ordnung.

282. Gegenstand der Untersuchung . . . . . . . . . . 54
283—284. Mittelpunkt der Flächen 2. Ordnung. Eintheilung dieser Flächen in solche mit und ohne Mittelpunkt . . . . . . . . . . 55
285. Diametral-Ebenen und Durchmesser der Flächen . . . . . . . 58
286—290. Hauptebenen . . . . . . . . . . 60
291. Transformation der allgemeinen Gleichung des 2. Grades auf ihre einfachsten Formen . . . . . . . . . . 68
292—293. Diskussion der Gleichung $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = K$. — Das Ellipsoid . . . . . . . . . . 69
294—295. Fortsetzung. — Das Hyperboloid mit einer Hölung . . . . . 71
296—297. Fortsetzung. — Das Hyperboloid mit zwei Hölungen . . . . 74
298. Diskussion der Gleichung: $P'y^2 + P''z^2 = Qx$. — Das elliptische Paraboloid . . . . . . . . . . 75
299. Fortsetzung. — Das hyperbolische Paraboloid . . . . . . . . 77
300—301. Von den ebenen Schnitten der Flächen zweiter Ordnung. Die Flächen mit Mittelpunkt . . . . . . . . . . 78
302. Fortsetzung. — Die Flächen ohne Mittelpunkt . . . . . . . . 82

§. §. Seite
303—304. Fortsetzung. — Die geradlinigen Schnitte des Hyperboloides mit einer Hölung und des hyperbolischen Paraboloides. 84
305. Nähere Bestimmung der durch eine gegebene Gleichung des 2. Grades ausgedrückten Fläche . . . . . . . . . . . . . . 89

# DRITTER THEIL.

# DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

## I. ABSCHNITT.

## DIFFERENZIALRECHNUNG.

### ERSTES KAPITEL.

### Grundbegriffe der Differenzialrechnung. — Differenziation der Funktionen einer und mehrerer veränderlichen Grössen.

306—307. I. Grundbegriffe der Differenzialrechnung . . . . . . . . . . . 97
308—312. II. Differenziation der einfachen Funktionen: $x^m$, $a^x$, $log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
313—315. III. Differenziation der Funktionen von Funktionen und der zusammengesetzten Funktionen. Allgemeine Sätze . . . . . 105
316—317. Fortsetzung. — Differenziation der Funktionen: $tg x$, u. s. w. Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
318. IV. Differenziation der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
319. Fortsetzung. — Lehrsatz von den homogenen Funktionen . 114
320—321. V. Differenziation der unentwickelten Funktionen . . . . . . 116

### ZWEITES KAPITEL.

### Von den höheren Differenzialien und Differenzialquotienten der Funktionen.

322—323. I. Höhere Differenzialien der Funktionen einer Variablen . 119
324—325. II. Höhere Differenzialien der Funktionen von Funktionen und der zusammengesetzten Funktionen . . . . . . . . . . . . 122
326—327. III. Höhere Differenzialien der Funktionen von mehreren veränderlichen Grössen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
328—329. IV. Höhere Differenzialien der unentwickelten Funktionen . 129
330—331. Fortsetzung. — Elimination constanter Parameter aus der primitiven Gleichung und ihren Differenzialgleichungen. Geometrische Bedeutung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
332—334. V. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen . . . . . 135
335—338. VI. Beziehungen, welche zwischen den Funktionen einer Veränderlichen und ihren Differenzialquotienten der verschiedenen Ordnungen stattfinden . . . . . . . . . . . . . . . 142

## DRITTES KAPITEL.

### Entwickelung der Funktionen in Reihen.


§. §. Seite

339—340. I. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz für die Funktionen einer veränderlichen Grösse . . . . . . . . . . . . 147
341—342. Fortsetzung. — Beispiele. — Ausnahmefälle . . . . . . . . . . . 151
343—344. II. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz für Funktionen mehrerer Veränderlichen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 154
345—346. III. Die Umkehrungsformel von Lagrange . . . . . . . . . . . 157
347. Fortsetzung. — Anwendung des Lagrange'schen Theorems zur Umkehrung der Reihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
348. Verschiedene Reihenentwickelungen . . . . . . . . . . . . . . . 166


## VIERTES KAPITEL.

### Ueber die Ausmittelung des wahren Werthes von Grössen, welche sich unter unbestimmten Formen: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, u. s. w. darbieten.


349. Auswerthung der Form: $\frac{0}{0}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 171
350. Auswerthung der Formen: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, u. s. w. . . . 172
351. Besondere Fälle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174


## FÜNFTES KAPITEL.

### Ueber die grössten und kleinsten Werthe der Funktionen.


352—354. I. Maxima und Minima der Funktionen von einer veränderlichen Grösse . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175
355—356. II. Maxima und Minima der Funktionen mit mehreren veränderlichen Grössen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 182
357. III. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen (Relative Maxima und Minima) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187


## SECHSTES KAPITEL.

### Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der ebenen Curven.


I. Von den Tangenten, Normalen und Asymtoten ebener Curven. — Differenzial des Bogens und der Fläche.

358—360. Gleichungen der Tangente und Normale . . . . . . . . . . . . 191
361. Von den Asymtoten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195
362—363. Differenzial des Bogens und der Fläche . . . . . . . . . . . . 198
364—367. Ausdrücke in Polarcoordinaten . . . . . . . . . . . . . . . . . 200

II. Von den Berührungen der verschiedenen Ordnungen zwischen ebenen Curven.

368. Bedingungen der Berührungen von verschiedener Ordnung 204
369. Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207

III. Krümmung der ebenen Curven. — Krümmungskreis und Krümmungshalbmesser. — Evoluten.

§. §. Seite

370—372. Maass der Krümmung. — Krümmungskreis und Krümmungshalbmesser . . . . . 209

373. Ausdruck des Krümmungshalbmessers in Polarcoordinaten 216

374—375. Evoluten . . . . . 217

IV. Von den einhüllenden Curven.

376—378. Definition der einhüllenden Curve. — Gleichung derselben 222

V. Von den besonderen Punkten der ebenen Curven.

379. Concavität und Convexität der Curven gegen die Abscissenaxe . . . . . 226

380. Beugungspunkte . . . . . 227

381. Rückkehrpunkte oder Spitzen . . . . . 229

382. Vielfache Punkte . . . . . 231

383. Conjugirte Punkte . . . . . 234

SIEBENTES KAPITEL.

Elemente der Theorie der Curven von doppelter Krümmung.

I. Von den Tangenten und Normalebenen doppelt gekrümmter Curven.

384. Gleichung der Tangente und Normalebene . . . . . 235

385. Differenzial des Bogens . . . . . 237

II. Ueber die Berührungen der Curven von doppelter Krümmung.

386. Bedingungen der Berührungen verschiedener Ordnung zwischen zwei Curven . . . . . 238

387. Berührungen zwischen einer Curve und einer Ebene. Krümmungsebene . . . . . 240

III. Ueber die Krümmung der Curven von doppelter Krümmung.

388. Erste und zweite Krümmung einer Curve. Maass derselben 242

389—391. Halbmesser und Mittelpunkt der ersten Krümmung. Krümmungskreis . . . . . 243

392. Halbmesser der zweiten Krümmung . . . . . 248

393. Die Schraubenlinie . . . . . 249

ACHTES KAPITEL.

Elemente der Theorie der krummen Flächen.

I. Ueber die tangirenden Ebenen und Normalen.

394. Gleichung der Berührungsebene . . . . . 251

395. Gleichungen der Normale. Normalebenen und Normalschnitte . . . . . 253

II. Ueber die Berührungen von verschiedener Ordnung zwischen krummen Flächen.

396. Bedingungen der Berührungen verschiedener Ordnung zwischen zwei krummen Flächen . . . . . 254

397—398. Berührungen einer krummen Fläche mit einer Kugel . . . . 257

III. Ueber die Krümmung der Flächen.


| §. | | Seite |
|---|---|---|
| 399. | Hauptschnitte und Hauptkrümmungshalbmesser | 260 |
| 400. | Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnittes. Beziehungen zwischen den Krümmungshalbmessern verschiedener Normalschnitte | 263 |
| 401. | Allgemeiner Ausdruck für die Hauptkrümmungshalbmesser | 264 |
| 402. | Nähere Erörterung der Krümmung der Flächen in einem gegebenen Punkte. Nabelpunkte | 265 |
| 403. | Beispiel. Das Ellipsoid und Sphäroid | 266 |
| 404. | Krümmungslinien | 269 |
| 405. | Niveaulinien und Linien des stärksten Falles | 271 |


IV. Erzeugung der Flächen. Von den einhüllenden und abwickelbaren Flächen.


| | | |
|---|---|---|
| 406. | Differenzialgleichungen der Cylinder-, Kegel- und Rotationsflächen und deren geometrische Bedeutung | 273 |
| 407—408. | Von den einhüllenden Flächen | 276 |
| 409. | Von den developpablen Flächen. Verschiedene Arten der Erzeugung derselben | 281 |
| 410. | Gleichungen der developpablen Flächen | 282 |
| 411. | Die abwickelbare Schraubenfläche | 284 |


## II. ABSCHNITT.

## INTEGRALRECHNUNG.

### ERSTES KAPITEL.

### Integration der entwickelten Funktionen einer veränderlichen Grösse.

I. Grundbegriffe und Fundamentalsätze der Integralrechnung.


| | | |
|---|---|---|
| 412—413. | Das unbestimmte und bestimmte Integral. Geometrische Bedeutung desselben | 287 |
| 414. | Grundformeln der Integralrechnung | 292 |
| 415. | Integrationsmethoden: 1) durch Substitution, 2) durch Zerlegung, 3) durch theilweise Integration | 294 |
| 416. | Integration durch Reihen | 296 |


II. Integration der algebraischen rationalen Differenziale.


| | | |
|---|---|---|
| 417. | Integration rationaler, ganzer Differenzialausdrücke | 299 |
| 418—422. | Integration rationaler, gebrochener Differenzialausdrücke. Zerlegung in Partialbrüche | 301 |
| 423. | Die Integrale: $\int\frac{A dx}{x+a}$, $\int\frac{A dx}{(x+a)^m}$, $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, $\int\frac{(Ax+B)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$ | 310 |
| 424. | Die Integrale: $\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}$, $\int\frac{x dx}{a+bx+cx^2}$ | 313 |
| 425. | Reductionsformeln für das Integral: $\int\frac{x^n dx}{(a+bx+cx^2)^m}$ | 314 |

III. Integration der algebraischen irrationalen Differenziale.

§. Seite

426. Integration von Differenzialformeln mit Wurzelgrössen des 1. Grades . . . 318
427. Methoden, die Differenzialfunktion: $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})dx$ rational zu machen . . . 319
428. Das Integral: $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$. Specielle Fälle . . . 321
429. Reductionsformeln für die Integrale: $\int \frac{x^n dx}{X^p \sqrt{X}}$, $\int x^n X^p \sqrt{X} dx$, u. s. w., wenn $X = a + bx + cx^2$ . . . 323
430—431. Reductionsformeln für die binomischen Integrale. Anwendung auf einige häufig vorkommende Integrale . . . 325
432. Integration durch Reihen . . . 331

IV. Integration der transcendenten Differenziale.

433. Integration von Differenzialien mit Exponentialgrössen . . . 333
434. Integration von logarithmischen Differenzialien . . . 335
435—439. Integration goniometrischer und cyklometrischer Differenzialien . . . 337

V. Integration der höheren Differenzialausdrücke mit einer Veränderlichen und der partiellen Differenzialien von Funktionen mehrerer veränderlichen Grössen.

440. Integration der höheren Differenzialien von Funktionen einer veränderlichen Grösse . . . 347
441. Integration partieller Differenzialien von Funktionen mehrerer Variablen . . . 348

## ZWEITES KAPITEL.

### Von den bestimmten Integralen.

442. Haupteigenschaften der bestimmten Integrale . . . 350
443. Substitution neuer Variablen in bestimmte Integrale. Aenderung der Grenzen . . . 354
444. Betrachtung des Falles, wenn die Differenzialfunktion innerhalb der Integrationsgrenzen eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet . . . 359
445. Ableitung bestimmter Integrale aus den allgemeinen . . . 360
446. Auswerthung bestimmter Integrale durch Differenziation unter dem Integralzeichen . . . 365
447. Auswerthung bestimmter Integrale durch Integration unter dem Integralzeichen . . . 370
448. Die bestimmten Doppel- und vielfachen Integrale . . . 373
449. Die Integrale: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ und $\int_0^t e^{-x^2} dx$ . . . 377
450. Ausmittelung verschiedener bestimmter Integrale . . . 381
451. Ableitung der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe mittelst bestimmter Integrale . . . 383

§. §. Seite
452—453. Näherungsweise Ausmittelung bestimmter Integrale. (Näherungsweise Quadratur) . . . . 385
454. Anwendung der vorhergehenden Methoden zur näherungsweisen Berechnung der Summe: $F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots + F(a+nh)$ . . . . 393

## DRITTES KAPITEL.

### Anwendung der Integralrechnung auf die Ausmessung der Linien, Flächen und Körper.

I. Quadratur der ebenen Curven.
455—456. Ausdruck der Fläche in rechtwinkligen und Polarcoordinaten. Beispiele . . . . 397
457. Besondere Fälle. Allgemeinster Ausdruck der Fläche . . . . 402
458. Näherungsweise Berechnung des Flächeninhaltes . . . . 403

II. Rectifikation der Curven.
459. Rectifikation der ebenen Curven. Beispiele . . . . 404
460. Rectifikation der Curven von doppelter Krümmung . . . . 411

III. Complanation der Flächen.
461. Complanation der Rotationsflächen . . . . 413
462. Allgemeine Complanation der Flächen . . . . 417
463. Reduction der Doppelintegrale durch Substitution neuer Veränderlichen . . . . 419
464. Allgemeine Complanationsformel in Polarcoordinaten . . . . 421
465. Complanation des elliptischen Kegels . . . . 423

IV. Cubatur der Körper.
466—467. Einfachste Fälle. Cubatur der Rotationsflächen . . . . 425
468. Allgemeine Ausdrücke für den Rauminhalt . . . . 427
469. Reduction dreifacher Integrale durch Substitution neuer Veränderlichen . . . . 429
470. Ausdruck des Volums in Polarcoordinaten . . . . 431

## VIERTES KAPITEL.

### Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale.

I. Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange.
471—473. Entwickelung der periodischen Reihen . . . . 434
474. Ausdehnung derselben auf beliebige Grenzen der veränderlichen Grösse . . . . 441
475. Beispiele . . . . 443

II. Die Fourier'schen Formeln.
476. Ableitung der Fourier'schen Formeln. Anwendung derselben . . . . 444

III. Die Euler'schen Integrale.
477. Haupteigenschaften der Gamma- und Betafunktion. Beziehung zwischen denselben . . . . 448
478. Relation zwischen zwei Gammafunktionen . . . . 450

§. §. Seite

479. Entwickelung von Reihen zur Berechnung der Gammafunktionen . . . 452
480—481. Reduction bestimmter Integrale auf Gammafunktionen . . . 455

IV. Der Integrallogarithmus, Integralsinus und Integralcosinus.

482 Reihenentwickelungen für den Integrallogarithmus . . . . 459
483. Reihen für den Integral-Sinus und Cosinus . . . 462

V. Die elliptischen Integrale.

484. Definitionen und allgemeine Eigenschaften . . . 463

a) Die elliptischen Integrale erster Art.

485. Das Additions- und Subtractionstheorem . . . 465
486. Das Multiplications- und Divisionstheorem . . . 468
487. Die elliptischen Funktionen . . . 470
488. Relation zwischen zwei elliptischen Integralen erster Art von verschiedenem Modulus und verschiedener Amplitude . . . . 471
489. Näherungsweise Berechnung der elliptischen Integrale erster Art . . . 472

b) Die elliptischen Integrale zweiter Art.

490. Das Additionstheorem . . . 475
491. Relation zwischen den elliptischen Integralen erster und zweiter Art . . . 476
492. Näherungsweise Berechnung der elliptischen Integrale zweiter Art . . . 477
493. Anwendungen auf die Rectifikation der Ellipse, Hyperbel und Lemniscate . . . 480

c) Die elliptischen Integrale dritter Art.

494. Das Additionstheorem . . . 483
495. Relationen zwischen diesen Integralen mit jenen erster und zweiter Art . . . 484
496. Näherungsweise Berechnung der elliptischen Integrale dritter Art . . . 487

d) Integration von Differenzialformeln, welche eine Wurzelgrösse aus einem Polynome 4ten Grades enthalten.

497. Reduction des Integrals: $\int F(x, \sqrt{R})dx$, wo $R = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, auf die Form: $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}$, wo $P$ eine gerade Function von $x$ ist . . . 491
498. Reduction des Integrals: $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}$ auf die Integrale: $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{dx}{(x^2 - a)\sqrt{R}}$, wo $R = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ . . . 494
499. Reduction dieser drei Integrale auf elliptische Integrale . . 497
500. Erörterung des Falles, wenn beide quadratische Faktoren des Trinoms: $R = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ imaginär sind . . . 501

## FÜNFTES KAPITEL.

### Integration der Differenzialgleichungen.

#### I. Von den Differenzialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. §. Seite

501. Erklärungen. Allgemeine, particuläre und singuläre Integrale . . . . . 503
502. Construction der Differenzialgleichungen. Geometrische Bedeutung . . . . . 505
503. Integration der Differenzialgleichung: $Pdx + Qdy = 0$, wenn dieselbe ein vollständiges Differenzial ist . . . . . 507
504—505. Integration durch Trennung der Variablen. Die lineare Differenzialgleichung 1ter Ordnung . . . . . 509
506. Integration der homogenen Differenzialgleichungen . . . . . 513
507—508. Integration mittelst des integrirenden Faktors . . . . . 514
509—511. Integration der Differenzialgleichungen 1ter Ordnung von höherem Grade . . . . . 518
512. Integration durch Reihen . . . . . 523

II. Von den Differenzialgleichungen höherer Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen.

513—514. Erklärungen. Geometrische Bedeutung . . . . . 525
515. Integration einiger der einfachsten Formen . . . . . 528
516. Die linearen Differenzialgleichungen $n^{ter}$ Ordnung ohne zweiten Theil. Bildung des allgemeinen Integrals aus $n$ particulären Integralen . . . . . 533
517. Die Kenntniss von $m$ particulären Integralen gestattet die Reduction einer linearen Differenzialgleichung $n^{ter}$ Ordnung auf eine solche von der Ordnung $(n-m)$ . . . . . 534
518. Integration der linearen Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten . . . . . 536
519. Integration der Gleichung: $(a+bx)^n y^{(n)} + A_1(a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_n y = 0$ . . . . . 539
520. Integration der linearen Differenzialgleichung $n^{ter}$ Ordnung mit linearen Coefficienten: $(a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x) y = 0$ 540
521—524. Integration der Gleichung 2ter Ordnung: $(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$ . . . . . 544
525. Integration der Gleichung: $x^2 y'' + x(a_1 + b_1 x^m) y' + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m}) y = 0$, und der Riccati'schen Gleichung . . . . . 566
526. Integration der completen linearen Differenzialgleichungen (mit zweitem Theil). Variation der arbiträren Constanten . . 569
527. Anwendung dieser Methode auf die Completirung unvollständiger Integrale . . . . . 572

III. Von den besonderen Auflösungen der Differenzialgleichungen.

528. Ableitung der besonderen Auflösung aus dem allgemeinen Integrale . . . . . 575

§. §. Seite

529. Entwickelung der besonderen Auflösung in dem Falle, wenn das allgemeine Integral nicht bekannt ist . . . . . . . . . . . 576

IV. Von den gleichzeitigen (simultanen) Differenzialgleichungen.

530. Erklärungen. — Die Integration eines Systems gleichzeitiger Differenzialgleichungen kann auf die Integration einer Differenzialgleichung mit nur zwei Variablen zurückgeführt werden. Reduction eines Systems gleichzeitiger Differenzialgleichungen höherer Ordnung auf ein anderes 1ter Ordnung 578

531. Integration der linearen gleichzeitigen Differenzialgleichungen 1ter Ordnung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 581

532. Integration der linearen gleichzeitigen Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten . . . . . . . . . . . . . . . . . 582

V. Totale Differenzialgleichungen mit mehreren veränderlichen Grössen.

533. Integration der Gleichung: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, wenn die linke Seite ein vollständiges Differenzial ist . . . . . . . . . . 586

534. Integration der Gleichung: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, wenn die linke Seite kein vollständiges Differenzial ist. Bedingung der Integrabilität . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 588

VI. Von den partiellen Differenzialgleichungen.

535. Erklärungen. Geometrische Construction einer partiellen Differenzialgleichung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 592

536—537. Integration der partiellen Differenzialgleichungen 1ter Ordnung mit drei veränderlichen Grössen . . . . . . . . . . . . . . 594

538. Ausdehnung dieses Verfahrens auf Gleichungen mit einer beliebigen Anzahl von Variablen . . . . . . . . . . . . . . . . . 600

539. Integration der partiellen Differenzialgleichungen 1ter Ordnung mit drei Veränderlichen und höheren Potenzen der partiellen Differenzialquotienten . . . . . . . . . . . . . . . . . 600

540. Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 604

541—544. Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 607

# NACHTRAG ZU DEN VERBESSERUNGEN IM I. BANDE.

Seite 43, Z. 17, v. o. lies $f(x) = a_0$ statt $f(x) = a_1$.
„ 50, Z. 2, v. u. l. $e\alpha^5$ st. $\varepsilon\alpha^5$.
„ 62, Z. 5, v. u. unter dem ersten Wurzelzeichen l. $2\sqrt{5}$ st. $\sqrt{5}$.
„ 69, Z. 12, v. u. l. $\binom{h}{r-2}$ st. $\binom{h}{r-1}$.
„ 73, Z. 7, v. u. l. $a^n$ st. $\alpha^n$.
„ 81, Z. 14, v. o. l. 2,718... st. 2,178....
„ 84, Z. 5, v. o. l. $\left(\frac{z}{z+1}\right)$ st. $\left(\frac{1}{z+1}\right)$.
„ 93, Z. 8, v. u. l. $+\frac{m\pi}{4}$ st. $-\frac{m\pi}{4}$.
„ 104, Z. 9, v. u. l. $m \sin(m-2)x$ st. $m \sin(m-2x)$.
„ 109, Z. 4, v. u. im 2ten Faktor rechter Hand l. $e^{y'}$ st. $e^{y}$.
„ 112, Z. 1, v. u. l. $\arcsin(u+vi)$ st. $\sin(u+vi)$.
„ 132, Z. 3, v. o. l. $C^1$ st. $C'$.
„ 139, Z. 10, 17 u. 24 l. $F(y)$ st. $f(y)$.
„ 147, Z. 9, v. o. l. nach st. mit.
„ 158, Z. 9, v. u. l. $\sqrt[3]{\ }$ st. $\sqrt{\ }$.
„ 159, Z. 1, v. o. bei der dritten Wurzel l. $y_3$ st. $y_1$.
„ 169, Z. 13, v. u. soll die Gleichung lauten: $x^7 - x^6 - x + 1 = 0$.
„ „ Z. 9, v. u. l. $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.
„ „ Z. 7, v. u. sollen die Coefficienten heissen: 2, 2, 2 st. 3, 3, 4.
„ „ Z. 6, v. u. soll die Gleichung lauten: $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$.
„ 174, Z. 4, v. o. l. welchem st. welcher.
„ 190, Z. 2, v. u. l. 3 statt 9, und 1345 st. 1129.
„ 191, Z. 15, v. o. in dem Ausdrucke von $R_1$ l. $16x$ st. 16.
„ 208, Z. 10, v. u. l. $= 0$ st. $= w$.
„ 230, Z. 9, v. u. l. $x$ st. $\varphi(x)$.
„ 233, Z. 8, v. o. l. $t\Delta u_0$ st. $tu_0$.
„ 240, Z. 10, v. u. l. $l(1 + v_{r+2})$ st. $l(+ v_{r+2})$.
„ 255, Z. 4, v. o. im zweiten Kettenbruche l. $\cfrac{1}{\frac{2}{x} +}$ st. $\cfrac{1}{\frac{2}{x}} +$.
„ 286, Z. 10, v. o. l. $x_2$ st. $x^2$.
„ 316, Z. 16, v. u. l. $B^2 - AA'$ st. $B^2 = AA'$.
„ 322, Z. 11, v. u. l. $2e$ st. $2c$.
„ 331, Z. 13, v. o. l. $F'K'$ st. $F'K''$.

# VERBESSERUNGEN IM II. BANDE.

Seite 57, Z. 1, v. o. lies $V$ statt $V'$.
„ 73, Z. 1, v. u. l. $\alpha^2 c^2$ st. $x^2 c^2$.
„ 80, Z. 11, v. o. l. $\alpha'$ st. $a'$.
„ 82, Z. 6, v. o. l. $a^2 \sin\varphi^2$ st. $\sin a^2\varphi^2$.
„ 124, Z. 1, v. u. l. $\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)dx^n$ st. $\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$.
„ 189, Z. 3, v. u. l. $dx$ st. $x$.
„ 190, Z. 12, v. u. l. $+a'\lambda_2$ st. $-a'\lambda_2$.
„ „ Z. 8, v. u. l. $-z_2$ st. $+z_2$.
„ 198, Z. 20, v. o. l. $\sec NMR$ st. $\sec N'MR$.
„ 206, Z. 1, v. u. l. wo st. cco.
„ 214, Z. 8. v. u. l. $\varrho^2$ st. $\varrho$.
„ 219, Z. 14, v. o. l. desselben st. derselben.
„ 223, Z. 3, v. u. l. 0 st. 1.
„ 233, Z. 2, v. u. l. $3ay\,dy^2$ st. $3ay\,dx^2$.
„ 235, Z. 8, v. o. l. $dy^2$ st. $d^2y$.
„ 254, Z. 6, v. u. l. $xz$ st. $xy$.
„ 277, Z. 11, v. u. l. $\frac{dU}{d\alpha}=0$ st. $\frac{dU}{d\alpha}$.
„ 294, Z. 9, v. u. l. $dx=\pm$ st. $dx\pm=$.
„ 312, Z. 6, v. o. l. $m$ st $m-1$ im Nenner des 1ten Integrals.
„ 319, Z. 7, v. o. l. $x=\frac{gz^\mu-a}{b-hz^\mu}$, $dx=\frac{\mu(bg-ah)z^{\mu-1}dz}{(b-hz^\mu)^2}$.
„ 322, Z. 5, v. o. l. $\frac{b^2}{4c^2}$ st. $4c^2$.
„ 323, Z. 5, v. o. l. $(bx+2a)$ st. $(bx+2a$.
„ 324, Z. 2, v. u. l. $x\sqrt{X}$ st. $\sqrt{X}$, im Nenner des 2ten Integrals.
„ 331, Z. 3, v. u. fehlen in den zwei letzten Gliedern die Potenzen $e^2$ und $e^4$.
„ „ Z. 2, v. u. fehlen in den drei letzten Gliedern die Potenzen $e^2$, $e^4$, $e^6$.
„ 335, Z. 8, v. u. im Zähler des 1ten Integrals l. $x^m$ st. $x^n$.
„ 351, Z. 1, v. u. fehlt in dem letzten Integral die untere Grenze $a$.
„ 364, Z. 10, v. o. l. $\frac{b}{a^2+b^2}$ st. $\frac{a}{a^2+b^2}$.
„ 366, Z. 11, v. u. l. $dx$ st. $d\alpha$.
„ 368, Z. 4, v. o. l. $-\frac{\pi}{4a^2}$ st. $\frac{\pi}{4a^2}$.
„ 403, Z. 13, v. o. unter dem Wurzelzeichen l. $r^2$ st. $x^2$.
„ 406, Z. 3, v. o. l. $\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2$ st. $\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$.
„ 410, Z. 13, v. u. l. $y=0$ st. $x=0$.
„ 414, Z. 11, v. o. ist der Faktor $d\theta$ zu streichen.
„ 433, Z. 9, v. u. der Buchstabe $\omega$ am Ende dieser Zeile gehört an das Ende der vorhergehenden Zeile.
„ 442, Z. 4, v. o. l. $\varphi(-\alpha)$ st. $\varphi(-x)$.
„ 485, Z. 12, v. u. l. $\operatorname{arctg} z\sqrt{\alpha}$ st. $\operatorname{arctg} z\sqrt{a}$.
„ 491, Z. 9, v. o. l. $\sin\varphi^2$ st. $\sin\varphi_2$.
„ 518, Z. 2, v. u. l. $u_1$, $u_2$ u. s. w. st. $U_1$, $U_2$ . . .

Seite 522, Z. 1, v. o. l. $\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}$ st. $\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2}$.
„ 534, Z. 5, v. u. l. $z^{(n-1)}$ st. $z_{(n-1)}$.
„ 538, Z. 13, v. u. l. $+ \ldots . + C_{p-1}x^{p-1}$ st. $+ C_{p-1}x^{p-1}$.
„ 542, Z. 7, v. u. l. (11) st. (10).
„ 549, Z. 2, v. u. l. $u\frac{d^nv}{dx^n}$ st. $n\frac{d^nv}{dx^n}$.
„ 554, Z. 1. u. 2 v. o. soll die obere Grenze des 1ten Integrals $\infty i$, jene des 2ten Integrals $-\infty i$ heissen.
„ 555, Z. 16, v. o. fehlt das Zeichen = nach $\frac{U_0}{U_1}$.
„ 566, Z. 9 v. o. l. $mx^{m-1}\frac{dy}{d\xi}$ st. $mx^{m-1}\frac{dy}{dx}$.
„ 567, Z. 9, v. u. l. $\mu+2$ st. $\mu+1$, im Nenner des 3. Gliedes.
„ 569, Z. 3, v. u. l. $\frac{1}{y_n}$ st. $\frac{1}{y^{(n)}}$; und $y_{n-1}$ st. $y_{(n-1)}$.
„ 574, Z. 2, v. o. l. $y^{(m+1)}$ st. $y^{(m-1)}$.
„ 593, Z. 4, v. o. l. $(\xi-x)$ st. $(\xi-)$.
„ 599, Z. 8, v. o. l. $yz\,dz$ st. $yz^2dz$.
„ 606, Z. 11, v. u. ist der Buchstabe $\beta$ in den beiden Exponenten zu streichen.

## DES II. THEILES

### ZWEITER ABSCHNITT.

# ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUME.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

# II. ABSCHNITT.

## ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUME.

### ERSTES KAPITEL.

BESTIMMUNG DER LAGE EINES PUNKTES IM RAUME. — COORDINATEN-SYSTEME. — TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

**244.** Denken wir uns durch einen festen Punkt $O$ (Fig. 1) im Raume, drei unter beliebigen Winkeln gegen einander geneigte unbegrenzte Ebenen gelegt, welche sich in den drei Geraden oder Axen $XX'$, $YY'$, $ZZ'$ schneiden. Der Raum wird durch jede dieser Ebenen in zwei Partieen, somit durch die Gesammtheit der drei Ebenen in acht dreiflächige Körperwinkel getheilt.

Es sei nun $M$ ein Punkt in einem dieser Körperwinkel; fällen wir von demselben, parallel zu den Axen, $OZ$, $OY$, $OX$ die Geraden $MP$, $MQ$, $MR$ auf die genannten Ebenen, so ist klar, dass die Lage des Punktes $M$ in dem in Rede stehenden Körperwinkel durch die Längen dieser drei Geraden unzweideutig bestimmt ist. Denn legt man durch den Punkt $M$ drei zu den obigen festen Ebenen parallele Ebenen, so schliessen die sechs Ebenen ein schiefwinkliges Parallelepiped ein, in welchem die Punkte $O$ und $M$ gegenüberliegende Ecken bilden, und welches durch die drei im Punkte $O$ zusammenstossenden Kanten $OK = MR$, $OL = MQ$, $ON = MP$ vollkommen bestimmt ist, da die von denselben eingeschlossenen Winkel als gegeben zu betrachten sind.

Die parallel zu den Axen genommenen Abstände $MR$, $MQ$, $MP$ heissen die Coordinaten des Punktes $M$; die festen Ebenen $XOY$, $XOZ$, $YOZ$ werden Coordinaten-Ebenen oder coordinirte Ebenen; ihre Durchschnittslinien $XX'$, $YY'$, $ZZ'$ die Coordinaten-Axen; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt $O$ derselben der Ursprung oder Anfangspunkt genannt. Das Coordinatensystem heisst ein rechtwinkliges, wenn die coordinirten Ebenen auf einander senkrecht stehen; in jedem anderen Falle ein schiefwinkliges.

Die drei Coordinaten eines Punktes $M$ pflegt man mit den Buchstaben $x$, $y$, $z$ zu bezeichnen, und nennt die Axen, welchen diese

Coordinaten beziehungsweise parallel sind, Axe der $x$, Axe der $y$, Axe der $z$. In jeder der drei coordinirten Ebenen liegen zwei Axen, von welchen diese Ebenen die Namen: Ebene der $xy$, Ebene der $xz$, Ebene der $yz$ erhalten. Bei der graphischen Darstellung werden die Coordinaten des Punktes $M$:

$$MR = x,\ MQ = y,\ MP = z$$

gewöhnlich durch die gleichgeltenden Strecken $OK = MR$, $PK = MQ$, und $MP$ zur Darstellung gebracht.

Denkt man sich nun die Coordinaten-Ebenen nach allen Seiten ins Unendliche erweitert, so entsprechen denselben numerischen Werthen der drei Coordinaten $x$, $y$, $z$ offenbar acht Punkte, welche in den oben erwähnten acht körperlichen Ecken liegen. Um diese acht Punkte von einander zu unterscheiden, genügt es, die Coordinaten noch mit den gehörigen Vorzeichen zu versehen, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem dieselben auf den zugehörigen Axen vom Ursprunge aus nach der einen, oder nach der anderen entgegengesetzten Richtung abgeschnitten werden. Der Ursprung theilt sodann jede der Axen in zwei Hälften, eine positive und eine negative; in den Figuren werden die positiven Halbaxen durch $OX$, $OY$, $OZ$ vorgestellt, und in der Regel allein gezeichnet.

Sind $m$, $n$, $p$ die numerischen Werthe der Coordinaten eines Punktes, so ergibt sich für die acht möglichen Lagen desselben folgendes Schema:

$$\begin{array}{llll} x = +m & x = -m & x = -m & x = +m \\ y = +n & y = +n & y = -n & y = -n \\ z = +p & z = +p & z = +p & z = +p \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x = +m & x = -m & x = -m & x = +m \\ y = +n & y = +n & y = -n & y = -n \\ z = -p & z = -p & z = -p & z = -p. \end{array}$$

Bezeichnen wir daher mit $a$, $b$, $c$ die mit den gehörigen Vorzeichen versehenen Werthe der Coordinaten eines Punktes, so ist die Lage desselben im Raume durch die drei Gleichungen:

$$x = a,\quad y = b,\quad z = c$$

vollkommen bestimmt; sie werden daher die Gleichungen des Punktes genannt.

Liegt der Punkt in einer der coordinirten Ebenen, so ist die den Abstand derselben von dieser Ebene ausdrückende Coordinate $= 0$; zwei seiner Coordinaten werden Null, wenn er in einer der Axen liegt; endlich gehören die Gleichungen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dem Ursprunge selbst an.

**245.** Die Punkte $P$, $Q$, $R$ (Fig. 1), in welchen die Coordinaten des Punktes $M$ die coordinirten Ebenen treffen, sind die — parallel zu den Axen genommenen — Projectionen des Punktes $M$ auf die genannten Ebenen. Bezeichnen wir, wie oben, mit $a$, $b$, $c$ die Coordinaten des Punktes $M$, so sind offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\} \text{die Gleichungen der Projection des Punktes } M \text{ auf die Ebene der } xy.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ z = c \end{array}\right\} \text{die Gleichungen der Projection des Punktes } M \text{ auf die Ebene der } xz.$$

$$\left.\begin{array}{l} y = b \\ z = c \end{array}\right\} \text{die Gleichungen der Projection des Punktes } M \text{ auf die Ebene der } yz.$$

Von diesen drei Systemen von Gleichungen ist jedes eine Folge der beiden anderen und kann aus diesen abgeleitet werden, woraus folgt, dass die Lage eines Punktes im Raume durch zwei Projectionen desselben vollkommen bestimmt ist. Aus diesem Grunde reicht die darstellende Geometrie bekanntlich mit zwei Projectionsebenen aus, während die analytische Geometrie dreier Coordinaten-Ebenen bedarf, weil zwei Projectionen zu ihrer analytischen Bestimmung drei Coordinaten erfordern.

In den meisten Fällen kommen rechtwinklige Coordinatensysteme zur Anwendung; dann sind $P$, $Q$, $R$ die senkrechten oder orthogonalen Projectionen des Punktes $M$, und wir wollen, bevor wir weiter gehen, einige Sätze über derlei Projectionen voranschicken, welche uns von Nutzen sein werden.

1) Fällt man aus den Endpunkten einer begrenzten Strecke $= l$ Senkrechte auf eine Gerade $G$ (die Projectionsaxe), so heisst das zwischen den Fusspunkten der Senkrechten liegende Stück der Geraden $G$ die Projection der Strecke $l$ auf die Gerade $G$. — Liegen die projicirte Gerade und die Projectionsaxe in einer Ebene, so ist, wenn die Projection mit $p$, der Neigungswinkel beider Geraden mit $\alpha$ bezeichnet wird, offenbar

$$p = l \cos \alpha.$$

Diese Gleichung gilt aber auch dann, wenn die beiden Geraden nicht in derselben Ebene liegen. Man überzeugt sich hievon sehr leicht, wenn man beachtet, dass unter dem Neigungswinkel zweier sich nicht schneidenden Geraden immer derjenige Winkel zu verstehen ist, welchen zwei Gerade einschliessen, die durch einen beliebigen Punkt parallel zu den gegebenen Geraden gezogen werden. Legt man sodann durch die Endpunkte $A$, $B$ der

Strecke $AB = l$ zwei auf die Projectionsaxe senkrechte Ebenen, welche die Axe in den Punkten $A'$, $B'$ schneiden, ferner durch den einen Endpunkt $A$ eine zur Axe parallele Gerade $AC$, welche die durch $B$ gelegte Ebene in $C$ trifft, so ist offenbar $p = A'B' = AC$, und in dem bei $C$ rechtwinkligen $\triangle$ $ACB$: $AC = AB \cos BAC$; der Winkel $BAC$ ist aber eben der Neigungswinkel $\alpha$ der Geraden $l$ gegen die Axe, somit $p = l \cos \alpha$, wie oben.

2) Die Projection einer Geraden $l$ auf eine Ebene ist die Folge der Projectionen sämmtlicher Punkte der Geraden auf diese Ebene, folglich eine in dieser Ebene liegende Gerade, welche von den Projectionen der Endpunkte der Strecke $l$ begrenzt wird. Ist $\alpha$ der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene, so hat man offenbar wieder $p = l \cos \alpha$.

3) Unter Projection einer ebenen Figur auf eine Ebene versteht man die in letzterer Ebene liegende Figur, welche von der Projection des Umfanges der projicirten Figur eingeschlossen wird. — Ist die projicirte Figur ein Dreieck, $F$ dessen Flächeninhalt, $f$ jener der Projection desselben auf eine Ebene, welche gegen die Ebene des Dreieckes unter dem Winkel $\alpha$ geneigt ist, so ist wieder:

$$f = F \cos \alpha.$$

Denn ist $ABC$ (Fig. 2) das auf die Ebene $MN$ zu projicirende Dreieck, so wollen wir zuerst annehmen, dass eine Dreiecksseite $BC$ in der Ebene $MN$ liege; fällt man von $A$ das Loth $AA'$, so ist $A'BC$ die Projection des $\triangle$ $ABC$; zieht man nun $A'D$ senkrecht auf $BC$, so ist auch $AD$ senkrecht auf $BC$, somit $\angle ADA' = \alpha$; folglich $A'D = AD \cos \alpha$, und $BC . A'D = BC . AD \cos \alpha$, d. i. $f = F \cos \alpha$.

Liegt keine der Dreiecksseiten in der Projectionsebene, so nehme man an, dass letztere durch eine der Dreiecksecken, etwa $C$ (Fig. 3) gehe, was immer gestattet ist, weil sich die Projection offenbar nicht ändert, wenn man die Projectionsebene parallel zu sich selbst verschiebt. Fällt man sodann aus $A$ und $B$ die Lothe $AA'$ und $BB'$, verlängert $AB$ bis zum Durchschnittspunkte $D$ mit der Projections-Ebene und zieht $DC$, so ist nach Obigem: $A'CD = ACD \cos \alpha$, $B'CD = BCD \cos \alpha$, aus welchen Gleichungen durch Subtraktion wieder $A'B'C = ABC \cos \alpha$, d. i. $f = F \cos \alpha$ folgt.

Da ferner jedes ebene Polygon in Dreiecke zerlegt und jede von einer krummen Linie umschlossene Figur als Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der durch die Gleichung $f = F \cos \alpha$ ausgesprochene Satz für jede wie immer gestaltete ebene Figur.

4) Sei $ABCD$ (Fig. 4) ein System von mehreren aufeinander-

folgenden Geraden, gleichgültig, ob dieselben in einer Ebene liegen, oder nicht. Legen wir durch die Eckpunkte $A$, $B$, $C$, $D$ Ebenen senkrecht auf eine beliebige Axe $MN$, so sind die auf letzterer von diesen Ebenen abgeschnittenen Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ die Projectionen der Seiten $AB$, $BC$, $CD$ der gebrochenen Linie. Ziehen wir noch die das Polygon schliessende Gerade $AD$, welche wir die Resultirende nennen wollen und deren Projection $A'D'$ sein wird, und bezeichnen wir endlich die Seiten $AB$, $BC$, $CD$ mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, die Resultirende mit $R$; die Winkel, welche diese vier Geraden mit der Axe $MN$, d. h. mit den durch die Anfangspunkte $A$, $B$, $C$ nach derselben Richtung parallel zu $MN$ gezogenen Geraden $An$, $Bn$, $Cn$ einschliessen, mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ und $\mu$, wobei der Anfangspunkt des Liniensystems auch als Anfangspunkt der Resultirenden zu nehmen ist, und sämmtliche Winkel in demselben Sinne gezählt werden. Sind nun diese Winkel sämmtlich spitzig, so hat man offenbar $A'D' = A'B' + B'C' + C'D'$ . . . . $(m)$, d. i.:

$$R \cos \mu = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3.$$

Kommen aber unter diesen Winkeln stumpfe vor, so werden die in die Cosinusse derselben multiplicirten Glieder dieser Gleichung negativ; gleichzeitig müssen aber die diesen stumpfen Winkeln entsprechenden Projectionen in die Summe $(m)$ subtraktiv eingehen, wie man sich an einer Figur sehr leicht überzeugt, so dass also der in obiger Gleichung ausgesproche Satz:

Die Summe der Projectionen mehrerer auf einander folgenden Geraden auf eine beliebige Axe ist gleich der Projection der Resultirenden,

allgemein gilt. Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

In jedem geschlossenen Polygone ist die Summe der Projectionen sämmtlicher Seiten auf eine beliebige Axe $= 0$.

In der That, lässt man den Unterschied zwischen Seiten und Resultirenden fallen, so muss der Neigungswinkel der letzteren in demselben Sinne gezählt werden, wie bei den Seiten; somit hat man für die Seite $AD = R = a_4$ den Winkel $\alpha_4 = 180^0 + \mu$ zu nehmen, wodurch $R \cos \mu = - a_4 \cos \alpha_4$ wird, und obige Gleichung in folgende übergeht:

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos \alpha_4 = 0.$$

Es folgt auch hieraus, dass wenn zwei Polygone eine gemeinschaftliche Seite haben, die Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf eine beliebige Gerade bei beiden Polygonen gleich gross ist.

**246.** Seien (Fig. 5) $OX$, $OY$, $OZ$ die positiven Richtungen der drei aufeinander senkrechten Coordinatenaxen, $M$ ein beliebiger Punkt, dessen Coordinaten $OK = x$, $PK = y$, $MP = z$. Denken wir uns durch $OX$ und $M$ eine Ebene $OKM$ gelegt, so ist die Lage des Punktes $M$ offenbar bestimmt, wenn man seine Entfernung $OM = r$ vom festen Punkte $O$, dem Pole; den Winkel $MOX = \theta$, welchen die $OM$ mit der festen Axe $OX$, der Polaraxe, einschliesst; und endlich den Neigungswinkel $MKP = \omega$ der Ebene $OKM$ gegen eine feste durch $OX$ gelegte Ebene $XOY$, die Grundebene, kennt. Diese drei Bestimmungsstücke werden Polarcoordinaten des Punktes $M$ genannt; die Entfernung $OM$ des Punktes $M$ vom Pole heisst der Radiusvektor. Dieser wird in der Regel immer positiv genommen, der Winkel $\theta$ von $0^0$ bis $180^0$, der Winkel $\omega$ von $0^0$ bis $360^0$ gezählt, wodurch diese Coordinaten offenbar die Fähigkeit erhalten, jeden beliebigen Punkt im Raume zu erreichen und zu bestimmen.

Fällt der Pol mit dem Ursprunge eines rechtwinkligen Parallelcoordinatensystemes, die Polaraxe mit der Axe der $x$, die Grundebene mit der Ebene der $xy$ zusammen, so bestehen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $M$ und seinen Polarcoordinaten die Gleichungen:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \omega, \quad z = r \sin \theta \sin \omega, \tag{1}$$

welche sich aus den rechtwinkligen Dreiecken $OKM$ und $KPM$ leicht ergeben. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man sie quadrirt und addirt, sowie durch Division derselben:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \operatorname{tg} \omega = \frac{z}{y}, \tag{2}$$

wobei $\theta$ im $1^{\text{ten}}$ oder $2^{\text{ten}}$ Quadranten zu nehmen ist, je nachdem $x$ positiv oder negativ; $\omega$ aber in jenem der 4 Quadranten, welcher das Zeichen von $\cos \omega$ mit jenem von $y$, und das Zeichen von $\sin \omega$ mit jenem von $z$ zur Uebereinstimmung bringt.

Wie man sieht, sind die rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ eines Punktes $M$ nichts anderes, als die Projectionen seines Radiusvektors auf die Coordinatenaxen; bezeichnet man daher mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche derselbe mit diesen Axen bildet, so ist:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma. \tag{3}$$

Hieraus folgt, wenn man quadrirt, und addirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2),$$

folglich mit Rücksicht auf die erste der Gl. (2):

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1. \tag{4}$$

Die drei Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind demnach nicht unabhängig von einander,

und wenn zwei derselben gegeben sind, so ist der 3^te^ durch die Gl. (4) bestimmt.

Man kann die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $r$ als eine andere Art von Polarcoordinaten betrachten, welche mit Hülfe der Gl. (3) in rechtwinklige umgesetzt werden. Umgekehrt hat man:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta &= \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

**247.** Es seien $M$ und $M'$ (Fig. 6) zwei Punkte im Raume, $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$ deren Coordinaten, $D = MM'$ ihre Entfernung. Denken wir uns durch jeden der Punkte $M, M'$ drei zu den coordinirten Ebenen parallele Ebenen gelegt, so schliessen diese ein rechtwinkliges Parallelepipedum ein, welches die $MM' = D$ zur Diagonale, und die Differenzen der gleichnamigen Coordinaten: $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ zu Seiten hat, deren Quadratsumme bekanntlich dem Quadrate der Diagonale gleich ist. Man hat daher

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (1)$$

als Ausdruck der Distanz zweier Punkte im Raume in Funktion ihrer rechtwinkligen Coordinaten.

Die Differenzen $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ sind, wie man leicht sieht, die Projectionen der $MM' = D$ auf die Coordinatenaxen; es drückt somit die Gl. (1) den Satz aus: Das Quadrat einer begrenzten geraden Linie ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drei aufeinander senkrechte Gerade.

Bezeichnet man mit $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Neigungswinkel der $MM' = D$ gegen die Axen der $x$, $y$, $z$, so hat man

$$x' - x = D\cos\lambda,\ y' - y = D\cos\mu,\ z' - z = D\cos\nu, \quad (2)$$

somit

$$\cos\lambda = \frac{x' - x}{D},\ \cos\mu = \frac{y' - y}{D},\ \cos\nu = \frac{z' - z}{D}, \quad (3)$$

welche Gleichungen, in Verbindung mit (1) die Winkel finden lassen, welche die $MM'$ mit den Axen einschliesst.

Quadrirt und addirt man die Gl. (3), so erhält man:

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1; \quad (4)$$

es ist somit die Summe der Quadrate der Cosinusse der Winkel, welche irgend eine Gerade mit den Coordinatenaxen einschliesst, $= 1$; ein schon durch Gl. (4) des vor. §. ausgesprochener Satz, da man [§. 245, 1)] unter den Winkeln, welche eine beliebige Gerade im Raume mit den Axen einschliesst, diejenigen

zu verstehen hat, welche eine durch den Ursprung gezogene Parallele mit denselben bildet.

Seien ferner $r$, $r'$ die Radienvektoren der Punkte $M$ und $M'$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Neigungswinkel derselben gegen die Coordinatenaxen, so ist:

$$\left.\begin{array}{lll} x = r\cos\alpha, & y = r\cos\beta, & z = r\cos\gamma, \\ x' = r'\cos\alpha', & y' = r'\cos\beta', & z' = r'\cos\gamma'; \end{array}\right\} (m)$$

führt man diese Werthe in (1) ein, so erhält man

$$D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').$$

Bezeichnet man aber mit $\delta$ den Winkel $MOM'$, welchen die zwei Radienvektoren einschliessen, so ist bekanntlich

$$D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\delta,$$

aus welcher Gleichung, mit Rücksicht auf die vorhergehende:

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \tag{5}$$

folgt. Diese Gleichung drückt nun nicht nur den Winkel aus, welchen zwei gegen die Coordinaten-Axen unter den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ geneigte Radienvektoren einschliessen, sondern ganz allgemein den Neigungswinkel zweier Geraden im Raume (sie mögen sich schneiden, oder nicht), welche mit den Axen die genannten Winkel bilden, da dieser Neigungswinkel [§. 245, 1)] kein anderer ist als derjenige zweier zu den Geraden paralleler Vektoren.

Stehen die beiden Geraden auf einander senkrecht, so ist $\delta = 90^0$, $\cos\delta = 0$, folglich:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung drückt somit die Bedingung aus, welche erfüllt sein muss, wenn zwei Gerade, welche mit den coordinirten Axen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ einschliessen, aufeinander senkrecht stehen sollen.

Wird die Gl. (5) mit $rr'$ multiplicirt, so erhält man mit Hülfe der Gl. $(m)$: $rr'\cos\delta = xx' + yy' + zz'$, oder:

$$\cos\delta = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \tag{7}$$

Mit Hülfe der Relation $\sin\delta^2 = 1 - \cos\delta^2$ findet man hieraus, da $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$ ist:

$$r^2r'^2\sin\delta^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2,$$

oder nach leichter Reduction:

$$r^2r'^2\sin\delta^2 = (xy' - yx')^2 + (xz' - zx')^2 + (yz' - zy')^2. \tag{8}$$

Bezeichnet man aber mit $F$ den Flächeninhalt des Dreiecks $OMM'$, so ist $2F = rr'\sin\delta$, womit aus (8)

$$F^2 = \left(\frac{xy' - yx'}{2}\right)^2 + \left(\frac{xz' - zx'}{2}\right)^2 + \left(\frac{yz' - zy'}{2}\right)^2 \tag{9}$$

folgt. In Fig. (6) ist $POP'$ die Projection des Dreieckes $MOM'$ auf die Ebene der $xy$, somit, da $x$, $y$ und $x'$, $y'$ die Coordinaten der Punkte $P$ und $P'$ sind, $\frac{1}{2}(xy' - yx')$ der Flächeninhalt des Dreieckes $POP'$ [Gl. (3), §. 161]. Eben so stellen die Ausdrücke $\frac{1}{2}(xz' - zx')$ und $\frac{1}{2}(yz' - zy')$ die Flächeninhalte der Projectionen des $\triangle\ OMM'$ auf die beiden anderen coordinirten Ebenen vor. Beachtet man nun noch, dass die Projection sich nicht ändert, wenn man die Projections-Ebene parallel zu sich selbst verschiebt, so folgt aus (9), dass das Quadrat der Fläche eines Dreieckes gleich ist der Summe der Quadrate der Projectionen derselben auf drei zu einander senkrechte Ebenen; welcher Satz sich leicht auf eine beliebige ebene, gerad- oder krummlinig begrenzte Figur ausdehnen lässt, und dem am Eingange dieses §. ausgesprochenen Satze über Linearprojectionen analog ist.

### TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

**248.** Unter Transformation oder Verwandlung der Coordinaten versteht man die Aufgabe, die Coordinaten $x$, $y$, $z$ eines Punktes $M$ im Raume, bezogen auf ein bestimmtes Coordinatensystem, auszudrücken durch die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ desselben Punktes in Bezug auf ein neues Coordinatensystem, dessen Lage gegen das ursprüngliche gegeben ist.

I. Nehmen wir erstlich an, es werde, ohne Veränderung der Richtung der Axen eines beliebigen recht- oder schiefwinkligen Coordinatensystemes der Ursprung in einen Punkt $O'$ (Fig. 7) verlegt, dessen Coordinaten in Bezug auf das alte System $a$, $b$, $c$ sein mögen, wobei also die neuen Coordinaten-Ebenen den alten parallel liegen, so hat man offenbar:

$$x = a + x', \; y = b + y', \; z = c + z'. \tag{1}$$

Denn zieht man $MR$ parallel zu $OX$, so schneidet diese Gerade oder ihre Verlängerung die Ebene der $y'z'$ in $R'$; es ist $MR = x$, $MR' = x'$, und $RR'$ = dem Abstande der beiden Ebenen $yz$ und $y'z'$, d. i. $= a$, somit, da $MR = RR' + MR'$, $x = a + x'$. Eben so überzeugt man sich von der Richtigkeit der zwei anderen Gleichungen.

II. Allgemeine Transformationsformeln. Lassen wir nun den Ursprung $O$ ungeändert, und denken wir uns durch denselben drei neue Axen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ (Fig. 8) unter beliebigen Winkeln gelegt. Die Coordinaten des Punktes $M$ seien in dem ursprünglichen und neuen Systeme beziehungsweise:

$$OK = x, \; PK = y, \; MP = z,$$
$$OK' = x', \; P'K' = y', \; MP' = z'.$$

Diese bilden, wie man sieht, zwei gebrochene Liniensysteme: $OKPM$ und $OK'P'M$. Denken wir uns nun senkrecht auf die Ebene der $xy$, in der Richtung der positiven Halbaxe der $z$, die Normale $ON''$ errichtet, so ist die Projection des Liniensystems $OKPM = x + y + z$ auf diese Normale offenbar $z \cos (N.'' z)$, wenn wir mit $(N.'' z)$ den von der Normale $ON''$ mit der Seite $MP = z$ oder — was dasselbe ist — mit der Axe der $z$ eingeschlossenen Winkel bezeichnen, da die Punkte $P$ und $K$ in der auf $ON''$ senkrechten Ebene der $xy$ liegen, und folglich die Projectionen der Seiten $PK = y$ und $OK = x$ auf die $ON''$ gleich Null sind. Die Projection des Systems $OK'P'M = x' + y' + z'$ auf dieselbe Normale ist aber $x' \cos (N.'' x') + y' \cos (N.'' y') + z' \cos (N''. z')$, und da diese beiden Projectionen (nach §. 245, 4) einander gleich sein müssen, so hat man:

$$z \cos (N.'' z) = x' \cos (N.'' x') + y' \cos (N.'' y') + z' \cos (N.'' z').$$

Zwei ganz ähnliche Formeln erhält man, wenn man dieselben Liniensysteme auf zwei andere Normalen $ON'$ und $ON$ projicirt, welche senkrecht auf die Ebenen der $xz$ und $yz$ in der Richtung der positiven Halbaxen der $y$ und $x$ errichtet werden. Wir haben somit als allgemeine Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} x \cos (N.\ x) &= x' \cos (N.\ x') + y' \cos (N.\ y') + z' \cos (N.\ z') \\ y \cos (N.'\ y) &= x' \cos (N.'\ x') + y' \cos (N.'\ y') + z' \cos (N.'\ z') \\ z \cos (N.''\ z) &= x' \cos (N.''\ x') + y' \cos (N.''\ y') + z' \cos (N.''\ z'), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

bei welchen wir jedoch nicht weiter verweilen, da sie ihrer grossen Complicirtheit halber nur höchst selten eine Anwendung gestatten.

III. Transformation rechtwinkliger Coordinaten in schiefwinklige. Lassen wir in (2) die Axen der $x$, $y$, $z$ mit den Normalen $ON$, $ON'$, $ON''$ zusammenfallen, so ist das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges. Die Winkel $(N.\ x)$, $(N.'\ y)$, $(N.''\ z)$ werden dadurch gleich Null, und die Formeln (2) verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos (x\,.\,x') + y' \cos (x\,.\,y') + z' \cos (x\,.\,z') \\ y &= x' \cos (y\,.\,x') + y' \cos (y\,.\,y') + z' \cos (y\,.\,z') \\ z &= x' \cos (z\,.\,x') + y' \cos (z\,.\,y') + z' \cos (z\,.\,z'). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die in diesen Formeln vorkommenden 9 Winkel sind jedoch nicht sämmtlich von einander unabhängig, sondern an folgende 3 Bedingungsgleichungen gebunden:

$$\left.\begin{aligned} \cos (x\,.\,x')^2 + \cos (y\,.\,x')^2 + \cos (z\,.\,x')^2 &= 1 \\ \cos (x\,.\,y')^2 + \cos (y\,.\,y')^2 + \cos (z\,.\,y')^2 &= 1 \\ \cos (x\,.\,z')^2 + \cos (y\,.\,z')^2 + \cos (z\,.\,z')^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

welche, wie man sieht, die bekannte Beziehung ausdrücken, die zwischen den Quadraten der Cosinusse der 3 Winkel besteht, welche eine Gerade (hier der Reihe nach die Axe der $x'$, der $y'$, der $z'$) mit drei auf einander senkrechten Axen (der $x, y, z$) einschliesst. [§. 247. Gl. 4.)]

IV. Transformation rechtwinkliger Coordinaten in andere gleichfalls rechtwinklige. Hiezu dienen gleichfalls die Gl. (3), nur treten zu den 3 Bedingungsgleichungen (4), welche zwischen den 9 Winkeln stattfinden, noch folgende hinzu:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x.x')\cos(x.y') + \cos(y.x')\cos(y.y') + \cos(z.x')\cos(z.y') &= 0\\ \cos(x.x')\cos(x.z') + \cos(y.x')\cos(y.z') + \cos(z.x')\cos(z.z') &= 0\\ \cos(x.y')\cos(x.z') + \cos(y.y')\cos(y.z') + \cos(z.y')\cos(z.z') &= 0,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

in welchen, wie man sieht, die linken Theile die Ausdrücke der Cosinusse der Winkel sind, welche die Axen der $x'$ und $y'$, der $x'$ und $z'$, und der $y'$ und $z'$ mit einander einschliessen [§. 247, Gl. (6.)] welche Gleichungen demnach ausdrücken, dass auch die neuen Axen aufeinander senkrecht stehen.

In Folge der 6 Bedingungsgleichungen (4) und (5) sind von den neun in (3) vorkommenden Winkeln nur drei unabhängig, über welche man beliebig verfügen kann, und aus welchen sich sofort die 6 anderen ergeben. Die obigen Transformationsformeln (3) werden aber, trotz ihrer Symmetrie, durch diese darin enthaltenen überzähligen Constanten in den meisten Fällen für die Anwendung unbequem, daher man sich lieber anderer, von Euler gegebenen Formeln bedient, welche nur drei Constanten enthalten, durch welche die Position des neuen Systems gegen das alte bestimmt wird.

V. Euler's Formeln zur Transformation rechtwinkliger Coordinaten in andere gleichfalls rechtwinklige. Sei, (Fig. 9) $OX$, $OY$, $OZ$ das System der ursprünglichen Coordinatenaxen; $OX'$, $OY'$, $OZ'$ jenes der neuen; die Ebene der $x'$ $y'$ schneide die Ebene der $xy$ in der Geraden $OX_1$, so ist die Lage des neuen Axensystems bestimmt, wenn folgende 3 Stücke gegeben sind: 1) der Winkel $XOX_1 = \varphi$, welchen die Durchschnittslinie $OX_1$ mit der Axe der $x$ bildet; 2) der Winkel $X_1OX' = \psi$, welchen die Axe der $x'$, $OX'$ mit der Durchschnittslinie $OX_1$ einschliesst; endlich 3) der Neigungswinkel $\theta$ der beiden Ebenen der $xy$ und $x'y'$, welcher dem Winkel $ZOZ'$ gleich ist, welchen die auf die genannten Ebenen senkrechten Axen der $z$ und $z'$ einschliessen.

Die Transformation von dem Systeme der $x$, $y$, $z$ auf jenes der $x'$, $y'$, $z'$ wird am einfachsten durch successive Drehungen je zweier coordinirter Ebenen um ihre Durchschnittslinie, deren Lage dabei

ungeändert bleibt, bewerkstelliget, wobei wir, da sich dabei immer bloss zwei Coordinaten verändern, von den Transformationsformeln (6) in §. 160 Gebrauch zu machen haben.

Denken wir uns zuerst das ganze Coordinatensystem um die Axe der $z$ gedreht, bis die $x$-Axe mit der Durchschnittslinie $OX_1$ zusammenfällt, und bezeichnen wir die auf die neuen Axen $OX_1$, $OY_1$, $OZ$ sich beziehenden Coordinaten mit $x_1, y_1, z_1$, so ist offenbar $z_1 = z$, weil die $xy$-Ebene ihre Lage nicht geändert hat, und da die neue $x$-Axe mit der ursprünglichen den Winkel $\varphi$ einschliesst, so hat man [Gl. (6), §. 160]:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi;\; y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi;\; z = z_1. \quad (6)$$

Von diesem zweiten Coordinatensysteme gehen wir auf ein drittes der $x_2, y_2, z_2$ über, indem wir das 2[te] um die Axe $OX_1$ drehen, so dass die neue Ebene der $x_2\,y_2$, $X_1OY_2$ mit der ursprünglichen $xy$-Ebene den Winkel $\theta$ einschliesse; die Axe der $z$ kommt dadurch in die Richtung $OZ'$ und wir erhalten:

$$x_1 = x_2;\; y_1 = y_2 \cos\theta - z_2 \sin\theta;\; z_1 = y_2 \sin\theta + z_2 \cos\theta. \quad (7)$$

Durch eine nochmalige Drehung endlich um die Axe der $z'$ werde die $x$-Axe in die Richtung $OX'$ gebracht, welche mit der früheren Axe der $x_2$ den Winkel $X_1OX' = \psi$ einschliesst. Dieses 4[te] Axensystem ist nun jenes der $x', y', z'$, auf welches das ursprüngliche der $x, y, z$ transformirt werden soll; zum Uebergange vom 3[ten] auf das 4[te] haben wir die Formeln:

$$x_2 = x' \cos\psi - y' \sin\psi;\; y_2 = x' \sin\psi + y' \cos\psi;\; z_2 = z'. \quad (8)$$

Werden nun diese Werthe von $x_2, y_2, z_2$ in (7) und die dadurch sich ergebenden Werthe von $x_1, y_1, z_1$ in (6) substituirt, so erhält man die gesuchten Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned}
x = {} & x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\
& - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta, \\
y = {} & x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\
& - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta, \\
z = {} & x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Soll nebst der Richtung der Axen auch noch der Ursprung verändert werden, so geschieht diess in der Regel am einfachsten durch successive Anwendung der Formeln (1) und (9), wobei die Ordnung, in welcher beide Transformationen ausgeführt werden, beliebig ist.

## ALLGEMEINE BEMERKUNGEN UEBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLUNG VON FLAECHEN UND LINIEN IM RAUME.

**249.** I. Es sei

$$F(x, y, z) = 0 \ldots (1)$$

eine Gleichung zwischen den drei veränderlichen Grössen $x$, $y$, $z$, welche wir als Coordinaten eines Punktes im Raume betrachten. Denkt man sich obige Gleichung nach $z$ aufgelöst, wodurch wir

$$z = f(x, y) \ldots (2)$$

erhalten, und den beiden Coordinaten $x$, $y$ willkürliche, aber bestimmte Werthe beigelegt, z. B. $x = a$, $y = b$, so bestimmt sich dadurch ein Punkt $m$ in der Ebene der $xy$; errichtet man in diesem Punkte ein Perpendikel und trägt auf demselben den den Werthen $x = a$, $y = b$ entsprechenden Werth von $z$, $z = f(a, b) = c = mM$ auf, so erhält man einen Punkt $M$ im Raume, dessen Coordinaten $a$, $b$, $c$ den Gl. (1) oder (2) Genüge leisten. Da nun die Coordinaten $x$, $y$ von einander ganz unabhängig sind, so wird im Allgemeinen jedem Punkte der $xy$-Ebene ein Punkt im Raume entsprechen, dessen drei Coordinaten die Gl. (1) erfüllen, und deren stetige Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche bilden wird, deren Gestalt und Lage durch die Gl. (1) vollkommen bestimmt ist. Hieraus geht also hervor, dass jede Gl. zwischen 3 veränderlichen Grössen, geometrisch betrachtet, eine (im Allgemeinen krumme) Fläche bedeutet, und dass umgekehrt jede nach einem bestimmten Gesetze gestaltete Fläche durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines ihrer Punkte analytisch ausgedrückt werden kann. Die Gl. (1) heisst die Gleichung der Fläche, so wie umgekehrt letztere der geometrische Ort der Gl. (1) genannt wird.

II. Untersuchen wir nun die geometrische Bedeutung im Raume einer Gleichung, welche nur zwei Veränderliche enthält. Es sei

$$f(x, y) = 0 \ldots (3)$$

diese Gleichung, welche offenbar zunächst irgend eine gerade oder krumme Linie $nm$ (Fig. 10) in der $xy$-Ebene bestimmt. Sei $m$ ein Punkt dieser Linie, dessen Coordinaten $x = a = Op$, $y = b = mp$ der Gl. (3) Genüge leisten. Errichten wir im Punkte $m$ das Perpendikel $uu'$ auf die Ebene der $xy$ von unbegrenzter Länge, so kommen allen Punkten dieses Perpendikels die Coordinaten $x = a$, $y = b$ zu und genügen somit der Gl. (3), da die 3te Coordinate $z$, durch welche sie sich allein unterscheiden, in dieser Gleichung nicht erscheint; jeder Punkt dieses Perpendikels ist folglich ein Punkt des geometrischen Ortes der Gl. (3). Dasselbe gilt nun offenbar von allen parallel zur

Axe der $z$ durch die Curve $mn$ gezogenen Geraden, die in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Fläche bilden, welche man sich dadurch erzeugt denken kann, dass irgend eine dieser Geraden, immer mit der $z$-Axe parallel bleibend, längs der Linie $mn$ sich fortbewegt. Eine solche Fläche wird bekanntlich Cylinderfläche genannt. Die Gl. (3) ist demnach die Gleichung eines auf der $xy$-Ebene senkrecht stehenden Cylinders. Eben so drücken die Gleichungen $f(x, z) = 0$, $f(y, z) = 0$ Cylinderflächen aus, welche beziehungsweise auf den Ebenen der $xz$ und $yz$ senkrecht stehen. — So ist z. B. $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung eines Cylinders von kreisförmiger Basis, dessen Axe mit der Axe der $z$ zusammenfällt; die Gleichung $x = az + b$ bedeutet eine Ebene, welche auf der Ebene der $xz$ senkrecht steht.

III. Enthält eine Gleichung bloss eine Veränderliche, z. B. $x$, ist also von der Form:

$$f(x) = 0,$$

so kann man dieselbe nach $x$ aufgelöst denken und erhält dadurch $x = a$, wo $a$ eine bestimmte Grösse ist, welche entweder nur einen oder mehrere Werthe besitzt, je nachdem die Gleichung $f(x) = 0$ vom $1^{\text{ten}}$ oder höherem Grade ist. Der Gleichung $x = a$ genügen aber alle Punkte im Raume, deren Abstand von der $yz$-Ebene $= a$ ist, welche Punkte offenbar in einer zu dieser coordinirten Ebene parallelen, oder auf der Axe der $x$ senkrechten Ebene liegen; es ist daher $x = a$ oder allgemeiner $f(x) = 0$ die Gleichung einer (oder wenn $f(x) = 0$ von höherem Grade, mehrerer) zur Ebene der $yz$ parallelen Ebene. Eben so drücken die Gleichungen $y = b$, $z = c$ Ebenen aus, welche beziehungsweise zu den Ebenen der $xz$ und $yz$ parallel liegen.

IV. Betrachten wir nun die Gleichungen zweier Flächen

$$F(x, y, z) = 0, \text{ und } F'(x, y, z) = 0 \qquad (4)$$

als coëxistirend, so sind für die Coordinaten $x$, $y$, $z$ nur solche Werthe zulässig, welche beiden Gleichungen gleichzeitig Genüge leisten.

Offenbar kommt diese Eigenschaft ausschliesslich nur den Coordinaten jener Punkte zu, welche sich in beiden Flächen zugleich befinden, d. h. den Punkten der Durchschnittslinie, woraus erhellt, dass durch das Zusammenbestehen beider Gleichungen eine Linie im Raume analytisch ausgedrückt wird, und zwar die Durchschnittslinie der beiden Flächen, welche jede dieser Gleichungen für sich betrachtet zum geometrischen Orte hat.

Eine Linie im Raume erfordert daher zu ihrer analytischen Darstellung ein System zweier Gleichungen zwischen den veränderlichen Coordinaten eines ihrer Punkte; diese Gleichungen werden die Gleichungen der Linie genannt.

Da durch zwei Gleichungen zwischen drei veränderlichen Grössen zwei derselben durch die dritte bestimmt sind, so ist in den Gleichungen einer Linie bloss eine der 3 Coordinaten, z. B. $x$ als willkürlich oder unabhängig zu betrachten und die beiden anderen $y$ und $z$ sind Funktionen derselben. Hieraus folgt, dass, wenn wir mit $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ diese Funktionen bezeichnen, die durch die Gl. (4) dargestellte Curve auch durch die Gleichungen

$$y = \varphi(x), \quad z = \varphi'(x) \tag{5}$$

oder

$$\psi(x, y) = 0, \quad \psi'(x, z) = 0 \tag{6}$$

bestimmt ist. Diese sind aber, jede für sich betrachtet, die Gleichungen zweier Cylinderflächen, welche beziehungsweise auf der Ebene der $xy$ und $xz$ senkrecht stehen, und die projicirenden Cylinder der Linie im Raume genannt werden. Die Gleichungen derselben (5) oder (6) werden erhalten, wenn man aus (4) einmal $z$, dann $y$ eliminirt. Durch Elimination von $x$ erhält man die Gleichung $\psi''(y, z) = 0$ des dritten auf die Ebene der $yz$ senkrechten projicirenden Cylinders.

Jede dieser Gleichungen kann, da sie nur 2 Coordinaten enthält, als Gleichung einer Curve in der Ebene dieser Coordinaten betrachtet werden; diese 3 Curven sind die Durchschnittslinien der 3 projicirenden Cylinder mit den coordinirten Ebenen und heissen die Projectionen der Curve im Raume auf diese Ebenen. In diesem Sinne kann man daher auch sagen, dass eine Curve im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei coordinirte Ebenen bestimmt ist.

Eine Curve im Raume heisst von einfacher oder doppelter Krümmung, je nachdem sämmtliche Punkte derselben in einer Ebene liegen oder nicht.

V. Endlich stellen drei Gleichungen zwischen 3 veränderlichen Coordinaten, deren jede einzelne eine Fläche bedeutet:

$$F(x, y, z) = 0, \ F'(x, y, z) = 0, \ F''(x, y, z) = 0$$

als coëxistirend betrachtet, einen oder mehrere bestimmte Punkte im Raume dar. Diess erhellt sowohl daraus, dass nach dem Obigen je zwei dieser Gleichungen eine Curve im Raume ausdrücken, welche der durch die 3te Gleichung dargestellten Fläche im Allgemeinen nur in einem oder mehreren bestimmten Punkten begegnet; als auch aus dem Umstande, dass 3 Grössen durch 3 Gleichungen vollständig bestimmt sind; durch successive Elimination erhält man aus obigen Gleichungen andere von der Form: $x = a$, $y = b$, $z = c$, durch welche die Coordinaten des oder der Durchschnittspunkte der durch obige 3 Gleichungen dargestellten Flächen explicit bestimmt sind, und zwar

auf die möglichst einfachste Weise, durch den Durchschnitt dreier zu den coordinirten Ebenen paralleler Ebenen.

## ZWEITES KAPITEL.

### VON DER EBENE UND DER GERADEN LINIE.

### Die Ebene.

**250.** Es sei (Fig. 11) *STU* eine Ebene in einer beliebigen Lage gegen das Coordinatensystem; fällen wir aus dem Ursprunge das Loth $OP$ auf dieselbe, so ist ihre Lage durch die Länge und Richtung dieses Lothes vollkommen bestimmt. Irgend ein Punkt $M$ im Raume bildet mit den Punkten $O$ und $P$ verbunden ein Dreieck $MOP$, welches, wenn $M$ ein Punkt der durch $P$ senkrecht auf $OP$ gelegten Ebene ist, aber auch nur unter dieser Bedingung, bei $P$ einen rechten Winkel hat. Betrachtet man daher den Punkt $P$, gleich dem Ursprunge $O$, als einen festen, $M$ als einen veränderlichen Punkt im Raume, so drückt die Gleichung $OP^2 + PM^2 = OM^2$ aus, dass $M$ ein Punkt der durch $P$ senkrecht auf $OP$ gelegten Ebene ist. Setzt man also $OP = p$, bezeichnet mit $a$, $b$, $c$ die Coordinaten des Punktes $P$, mit $x$, $y$, $z$ jene des Punktes $M$, so geht obige Gleichung über in:
$a^2 + b^2 + c^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, welche sich nach gehöriger Reduktion, und wenn man beachtet, dass $a^2 + b^2 + c^2 = p^2$ ist, in

$$ax + by + cz = p^2 \tag{1}$$

verwandelt. Diese ist somit die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt $a$, $b$, $c$ geht und auf dem Radiusvector $p$ dieses Punktes senkrecht steht. Bezeichnet man mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Neigungswinkel des Perpendikels $p$ gegen die Axen der $x$, $y$, $z$, so ist:

$$a = p \cos \alpha, \quad b = p \cos \beta, \quad c = p \cos \gamma, \tag{2}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke nimmt die Gl. (1) der Ebene folgende Gestalt an:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p. \tag{3}$$

Die Ebene schneidet die Axen in den Punkten $S$, $T$, $U$, deren Abstände vom Ursprunge: $e_1$, $e_2$, $e_3$, offenbar die Werthe von $x$, $y$, $z$ sind, welche sich aus (1) oder (3) ergeben, wenn man daselbst der

Reihe nach $y$ und $z$, dann $x$ und $z$, endlich $x$ und $y$ gleich Null setzt; man findet auf diese Art:

$$e_1 = p \sec \alpha, \quad e_2 = p \sec \beta, \quad e_3 = p \sec \gamma, \tag{4}$$

und bringt mit Hülfe dieser Ausdrücke die Gl. (3) der Ebene noch auf folgende Form:

$$\frac{x}{e_1} + \frac{y}{e_2} + \frac{z}{e_3} = 1. \tag{5}$$

Diese verschiedenen Formen der Gl. einer Ebene unterscheiden sich, wie man sieht, nur durch die verschiedenen Constanten, welche in denselben erscheinen und zur Bestimmung der Lage der Ebene dienen; die analytische Form dieser Gleichungen ist aber wesentlich eine und dieselbe, und zwar die einer Gleichung des 1ten Grades in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten, deren allgemeine Form:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{I}$$

ist. Jede Gleichung vom 1ten Grade drückt daher eine Ebene aus, da sich die Constanten $A$, $B$, $C$, $D$ immer so bestimmen lassen, dass diese Gleichung mit den Gl. (1), (3) oder (5) identisch wird.

Bringt man die Gl. (3) und (I) auf die Form:

$$x\frac{\cos\alpha}{p} + y\frac{\cos\beta}{p} + z\frac{\cos\gamma}{p} = 1 \text{ und } -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1,$$

so folgt:

$$\frac{\cos\alpha}{p} = -\frac{A}{D}, \quad \frac{\cos\beta}{p} = -\frac{B}{D}, \quad \frac{\cos\gamma}{p} = -\frac{C}{D}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun, wenn man sie quadrirt und addirt und beachtet, dass $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{D^2}, \text{ somit } p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Behält man nun in diesem Ausdrucke von $p$ das untere Zeichen bei, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ p = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

welche Ausdrücke Richtung und Länge des aus dem Ursprunge auf die Ebene (I) gefällten Perpendikels bestimmen.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist bekanntlich dem Winkel gleich, welchen zwei auf diese Ebenen senkrechte Gerade einschliessen und zugleich das Complement zu 90⁰ desjenigen Winkels, welchen eine

dieser Senkrechten mit der anderen Ebene bildet. Diess vorausgesetzt, bezeichnen wir mit (I. $xy$), (I. $xz$), (I. $yz$) die Neigungswinkel der Ebene (I) gegen die coordinirten Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$; mit (I. $x$), (I. $y$), (I. $z$) die Neigungswinkel der Ebene (I) gegen die Axen der $x$, $y$, $z$, so ist

$\gamma = (\mathrm{I}.xy) = 90^0 - (\mathrm{I}.z); \beta = (\mathrm{I}.xz) = 90^0 - (\mathrm{I}.y); \alpha = (\mathrm{I}.yz) = 90^0 - (\mathrm{I}.x);$

somit, wenn wir $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = N$ setzen, mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{I}.\, xy) &= \sin(\mathrm{I}.\, z) = C : N \\ \cos(\mathrm{I}.\, xz) &= \sin(\mathrm{I}.\, y) = B : N \\ \cos(\mathrm{I}.\, yz) &= \sin(\mathrm{I}.\, x) = A : N \end{aligned} \tag{7}$$

Die Summe der Quadrate dieser 3 Cosinusse und Sinusse ist der Einheit gleich, übereinstimmend mit der zwischen den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bestehenden Bedingungsgleichung: $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

**251.** Wenn in der allgemeinen Gl. der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{I}$$

einer oder mehrere der Coefficienten verschwinden, so erhält die Ebene dadurch eine besondere Lage gegen das Coordinatensystem, welche sich in der Form der Gleichung deutlich ausspricht.

1) Ist $D = 0$, so haben wir die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{1}$$

welche eine durch den Ursprung gehende Ebene ausdrückt, weil ihr die Coordinaten dieses Punktes: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ Genüge leisten. Auch wird in diesem Falle $p = 0$.

2) Es verschwinde einer der Coefficienten $A$, $B$, $C$; sei z. B. $C = 0$, so verwandelt sich (I) in

$$Ax + By + D = 0, \tag{2}$$

und es wird $\cos(\mathrm{I}.\, xy) = 0$ also $(\mathrm{I}.\, xy) = 90^0$; folglich ist (2) die Gl. einer auf die $xy$-Ebene senkrechten oder zur Axe der $z$ parallelen Ebene. (Vergl. §. 249, II.) Ausgleichen Gründen sind $Ax + Cz + D = 0$ und $By + Cz + D = 0$ die Gleichungen von Ebenen, welche beziehungsweise zu den Axen der $y$ und $x$ parallel liegen.

3) Ist nebst $D$ auch noch einer der Coefficienten $A$, $B$, $C$ der Nulle gleich, so gehen aus (I) die Gleichungen:

$$Ax + By = 0,\ Ax + Cz = 0,\ By + Cz = 0, \tag{3}$$

hervor, welche, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, zu Ebenen gehören, welche durch den Ursprung gehen und beziehungsweise auf den Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$ senkrecht stehen, und demnach der Reihe nach die Axen der $z$, $y$ und $x$ in sich enthalten.

4) Verschwinden zwei der Coefficienten $A$, $B$, $C$, so erhalten wir die Gleichungen

$$Ax + D = 0,\ By + D = 0,\ Cz + D = 0 \qquad (4)$$

oder $x = a$, $y = b$, $z = c$, welche zu Ebenen gehören, deren jede auf zwei coordinirten Ebenen, folglich auch auf der in diesen liegenden Coordinatenaxe senkrecht, also zur dritten Coordinatenebene parallel ist.

5) Ist endlich nebst zweien der Coefficienten $A$, $B$, $C$ auch noch $D = 0$, so gehen die Gleichungen (4) über in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, welche Gleichungen der Reihe nach den Coordinatenebenen der $yz$, $xz$, und $xy$ angehören.

**252.** Die Ebene: $Ax + By + Cz + D = 0 \ldots$ (I) schneidet die coordinirten Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$ in geraden Linien, $ST$, $SU$, $UT$ (Fig. 11), welche Knotenlinien (Spuren, Traçen) genannt werden, und in der angeführten Reihenfolge mit $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$ bezeichnet werden sollen. Man erhält (nach §. 249, IV.) die Gleichungen dieser Durchschnittslinien, indem man die Gl. der Ebene (I) mit den Gleichungen der coordinirten Ebenen: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ der Reihe nach verbindet. Somit sind:

$Ax + By + D = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der $\bar{z}$;
$Ax + Cz + D = 0$, $y = 0$ — — — $\bar{y}$;
$By + Cz + D = 0$, $x = 0$ — — — $\bar{x}$.

Bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B},\quad z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C},\quad y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B},$$

und bezeichnet den Winkel, welchen die $\bar{z}$ mit der Axe der $x$ bildet, mit $(\bar{z}.\,x)$ und ähnlich für die übrigen, so folgt:

$$\operatorname{tg}(\bar{z}.\,x) = -\frac{A}{B},\quad \operatorname{tg}(\bar{y}.\,x) = -\frac{A}{C},\quad \operatorname{tg}(\bar{x}.\,z) = -\frac{C}{B},$$

durch welche Gleichungen die Richtung der Knotenlinien bestimmt wird.

**253.** Betrachten wir nun zwei durch die Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (I)$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \qquad (II)$$

bestimmte Ebenen, so bietet sich zunächst die Frage nach der Durchschnittslinie und dem Neigungswinkel derselben dar; die erstere wird in den folg. §§. von selbst ihre Erledigung finden; mit der letzteren wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Der Neigungswinkel der beiden Ebenen, den wir mit (I. II.) bezeichnen, ist offenbar dem Winkel $(p.p')$ gleich, welchen zwei aus dem Ursprunge auf die Ebenen (I) und (II) gefällte Perpendikel $p$, $p'$ einschliessen, somit $\cos$ (I. II.) $= \cos (p.p')$. Sind nun $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ die Neigungswinkel dieser Perpendikel gegen die Coordinatenaxen, so hat man [§. 247, Gl. (5)]:

$$\cos (p.p') = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma', \quad (1)$$

folglich mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), §. 250:

$$\cos (\text{I. II.}) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\ \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}. \quad (2)$$

Sollen die Ebenen (I) und (II) zu einander parallel sein, so muss cos (I. II) $= 1$ werden; mit diesem Werthe erhält man aus (2) nach Wegschaffung der Wurzelgrössen die Gleichung:

$$(AB' - BA')^2 + (AC' - CA')^2 + (BC' - CB')^2 = 0,$$

welche in folgende drei zerfällt:

$$AB' - BA' = 0,\ AC' - CA' = 0,\ BC' - CB' = 0,$$

von welchen jede eine Folge der beiden anderen ist. Wir haben daher als Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der Ebenen (I) und (II):

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \quad (3)$$

d. h. es müssen die Coefficienten der gleichnamigen Coordinaten proportional sein.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn wir $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$ setzen; es ist daher $m\,Ax + m\,By + m\,Cz + D' = 0$, oder, da $D'$ eine willkürliche Grösse ist und durch $mD'$ ersetzt werden kann,

$$Ax + By + Cz + D' = 0 \quad \text{(III)}$$

die Gleichung einer zu (I) parallelen Ebene. Bezeichnet man mit $p$ und $p'$ die Längen der aus dem Ursprunge auf die Ebenen (I) und (III) gefällten Perpendikel, so ist $p = -D : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $p' = -D' : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, und somit der Abstand $E$ der beiden parallelen Ebenen (I) und (III):

$$E = p - p' = \frac{D' - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Damit die Ebenen (I) und (II) sich senkrecht durchschneiden, muss cos (I. II) $= 0$ sein, womit sich aus (2):

$$AA' + BB' + CC' = 0 \quad (5)$$

als Bedingungsgleichung für den perpendikulären Schnitt der Ebenen (I) und (II) ergibt.

## Die gerade Linie.

**254.** Eine gerade Linie im Raume lässt sich immer als Durchschnitt zweier Ebenen betrachten. Sind daher:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\} (m)$$

die Gleichungen dieser Ebenen, so gehört nach den in §. 249. IV. entwickelten Gründen das System dieser beiden Gleichungen einer geraden Linie im Raume an. Jede dieser Gleichungen kann aber durch irgend eine Verbindung derselben ersetzt werden; eliminirt man daher aus denselben der Reihe nach $x$, $y$, $z$, so erhält man drei neue Gleichungen von der Form:

$$gy + hz + k = 0, \quad g'x + h'z + k' = 0, \quad g''x + h''y + k'' = 0, \qquad (n)$$

und da je zwei dieser Gleichungen durch dieselben Werthe von $x, y, z$ befriediget werden, wie die beiden Gl. $(m)$, so drücken dieselben auch — und zwar in einfacherer Form — dieselbe Gerade im Raume aus.

Man weiss, dass die Gleichungen $(n)$, von denen jede eine Folge der beiden anderen ist, und aus ihnen durch Elimination der beiden Gleichungen gemeinschaftlichen Coordinate abgeleitet werden kann, die Gleichungen dreier Ebenen sind, welche beziehungsweise auf den Ebenen der $yz$, $xz$ und $xy$ senkrecht stehen und von welchen je zwei durch ihren Durchschnitt die Gerade im Raume bestimmen. Diese 3 Ebenen sind die projicirenden Ebenen der Geraden; da ferner jede dieser Gleichungen nur 2 Coordinaten enthält, so kann sie zugleich als Gleichung der Durchschnittslinie der projicirenden Ebene mit der Ebene dieser Coordinaten d. h. als Gleichung der Projection der Geraden im Raume auf die bezügliche coordinirte Ebene betrachtet werden, und in diesem Sinne sagt man, dass eine Gerade im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei coordinirte Ebenen bestimmt sei.

Es ist natürlich im Allgemeinen willkürlich, welche zwei der Gl. $(n)$ zur analytischen Darstellung einer Geraden man wählen will; wir werden uns im folgenden der beiden ersteren, in der Form:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \qquad (1)$$

bedienen, welche die Gerade durch ihre Projectionen auf die Ebenen der $xz$ und $yz$ ausdrücken. — Nur in dem Falle, wenn die Gerade zur $xy$-Ebene parallel ist, kann sie durch 2 Gleichungen von dieser Form nicht dargestellt werden, weil dann die zwei Ebenen, welche sie auf

die Ebenen der $xz$ und $yz$ projiciren, in eine einzige Ebene $z = \gamma$ zusammenfallen; man wird in diesem Falle die Gl. der Projection auf die Ebene der $xy : y = cx + \delta$ zu Hülfe nehmen, welche in Verbindung mit der Gl. $z = \gamma$ die Gerade bestimmt.

Aus den Gründen der analytischen Geometrie in der Ebene folgt, dass die Constanten $\alpha$, $\beta$ der Gleichungen (1) die vom Ursprunge aus gezählten Strecken sind, welche diese Projectionen auf den Axen der $x$ und $y$ abschneiden; $a$ und $b$ aber die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche sie mit der Axe der $z$ einschliessen. Hieraus folgt, dass die Richtung einer Geraden im Raume bloss von den Coefficienten $a$ und $b$ abhängen kann, und dass somit zwei Gerade im Raume parallel sein werden, wenn ihre Gleichungen in Bezug auf diese Coefficienten übereinstimmen.

Die Durchschnittspunkte der Geraden (1) mit den Coordinaten-Ebenen ergeben sich ganz einfach durch Verbindung der Gl. (1) mit den Gleichungen dieser Ebenen. So erhält man z. B. für $z = 0 : x = \alpha$, $y = \beta$ als die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden und der Ebene der $xy$.

Die Winkel, welche die Gerade (1) mit den Axen einschliesst, wollen wir mit $(1.x)$, $(1.y)$, $(1.z)$ bezeichnen. Nehmen wir auf der Geraden zwei beliebige Punkte $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$, und bezeichnen ihren Abstand mit $r$, so ist bekanntlich [Gl. (1) u. (3), §. 247.]

$$\cos(1.x) = \frac{x'-x}{r},\ \cos(1.y) = \frac{y'-y}{r},\ \cos(1.z) = \frac{z'-z}{r},$$
$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Weil aber der Punkt $x'$, $y'$, $z'$ in der Geraden liegt, so hat man $x' = az' + \alpha$, $y' = bz' + \beta$, welche Gleichungen mit (1) durch Subtraktion verbunden:

$$x' - x = a(z' - z), \quad y' - y = b(z' - z)$$

geben, womit endlich $r = (z' - z)\sqrt{1 + a^2 + b^2}$ folgt. Die drei letzten Gleichungen bestimmen nun die Verhältnisse $\frac{x'-x}{r}$, $\frac{y'-y}{r}$ und $\frac{z'-z}{r}$, und man erhält:

$$\cos(1.x) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}};\cos(1.y) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}};\cos(1.z) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.(2)$$

Diese Ausdrücke sind zugleich die Sinusse der Neigungswinkel $(1.yz)$, $(1.xz)$, $(1.xy)$ der Geraden (1) gegen die Coordinatenebenen, welche die Winkel $(1.x)$, $(1.y)$, $(1.z)$, wie man leicht sieht, zu $90^0$ ergänzen.

Mit Hülfe der Gl. (2) findet man:

$$a = \frac{\cos(1.\,x)}{\cos(1.\,z)},\quad b = \frac{\cos(1.\,y)}{\cos(1.\,z)}, \tag{3}$$

womit die Gl. der Geraden (1) folgende Form annehmen:

$$x = \frac{\cos(1.\,x)}{\cos(1.\,z)}\,z + \alpha,\quad y = \frac{\cos(1.\,y)}{\cos(1.\,z)}\,z + \beta. \tag{4}$$

**255.** Als besondere Fälle der Lage einer Geraden sind folgende zu bemerken:

1) Zwei Gleichungen von der Form:

$$x = az,\ y = bz$$

in welchen die constanten Glieder fehlen, gehören einer durch den Ursprung gehenden Geraden an; sie werden in der That durch die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dieses Punktes erfüllt; auch erkennt man schon aus der Form derselben, dass auch die Projectionen durch den Ursprung gehen.

2) Eine Gerade, welche zu einer coordinirten Ebene parallel läuft, wird am einfachsten als Durchschnitt zweier Ebenen dargestellt, deren eine zu dieser coordinirten Ebene parallel, die andere darauf senkrecht ist. So drücken die Gleichungen $x = \alpha$, $y = bz + \beta$ eine zur Ebene der $yz$ parallele Gerade aus.

3) Eine Gerade, welche zu zwei coordinirten Ebenen, also auch zu der in diesen Ebenen liegenden Axe parallel ist, und mithin auf der dritten coordinirten Ebene senkrecht steht, wird durch eines der Gleichungssysteme:

$$\begin{matrix} y = \beta & \qquad x = \alpha & \qquad x = \alpha \\ z = \gamma & \qquad z = \gamma & \qquad y = \beta \end{matrix}$$

ausgedrückt, je nachdem sie zur Axe der $x$, $y$, oder $z$ parallel ist. Endlich sind:

$y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der Axe der $x$,
$x = 0$, $z = 0$ „ „ „ „ der $y$,
$x = 0$, $y = 0$ „ „ „ „ der $z$.

**256.** Betrachten wir jetzt zwei Gerade, welche durch ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{matrix}\right\}\ldots 1),\qquad \left.\begin{matrix} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{matrix}\right\}\ldots 2)$$

gegeben sind, so bieten sich wieder zuvörderst die Aufgaben dar, ihren Durchschnittspunkt, im Falle ein solcher existirt, und ihren Neigungswinkel zu finden.

1) Durchschnitt zweier Geraden. Wenn die Geraden 1) und 2) sich in einem Punkte schneiden, so müssen die Coordinaten dieses Punktes den Gleichungen beider Geraden Genüge leisten und sind daher nichts anderes als die Werthe von $x$, $y$, $z$, welche die Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig erfüllen, und sich aus diesen durch Elimination bestimmen. Eliminirt man zunächst $x$ und $y$, so erhält man:

$$az + \alpha = a'z + \alpha'; \quad bz + \beta = b'z + \beta',$$

aus welchen Gleichungen sich für $z$ die beiden Werthe:

$$z = -\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} \text{ und } z = -\frac{\beta - \beta'}{b - b'}$$

ergeben, welche, da sie dem Durchschnittspunkte angehören sollen, gleich sein müssen. Es ist daher

$$\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'}, \text{ oder } (a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha') \qquad (1)$$

die Bedingungsgleichung, welcher die Constanten der Gleichungen 1) und 2) Genüge leisten müssen, wenn diese beiden Geraden sich schneiden, oder allgemeiner in einer Ebene liegen sollen. Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes hat man dann:

$$z = -\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = -\frac{\beta - \beta'}{b - b'};\ y = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'},\ x = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'}. \qquad (2)$$

2) Neigungswinkel zweier Geraden. Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Geraden 1) und 2) mit (1.2); mit $(1.x)$, $(1.y)$, $(1.z)$ die Winkel, welche die 1) mit den Axen bildet und durch ähnliche Symbole die analogen Winkel der 2), so ist [§. 247, Gl. (5)]:

$$\cos(1.2) = \cos(1.x)\cos(2.x) + \cos(1.y)\cos(2.y) + \cos(1.z)\cos(2.z), \qquad (3)$$

oder wenn man für die Cosinusse ihre Werthe [§. 254. Gl. (2)] einführt:

$$\cos(1.2) = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.\ \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}. \qquad (4)$$

Sollen die beiden Geraden parallel laufen, so muss $\cos(1.2) = 1$ sein, welcher Werth in (4) eingeführt nach einer der in §. 253 ausgeführten ganz ähnlichen Reduction:

$$a = a', \quad b = b' \qquad (5)$$

als Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der beiden Geraden liefert.

Sollen aber die Geraden auf einander senkrecht stehen, so ergibt sich hiefür, wegen $\cos(1.2) = 0$, die Bedingungsgleichung:

$$aa' + bb' + 1 = 0. \qquad (6)$$

## Verbindung der Ebene mit der Geraden.

**257.** Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \dots . 1)$$

die Gleichungen einer Geraden, und:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots I)$$

die Gleichung einer Ebene gegeben; beschäftigen wir uns wieder zunächst mit der Bestimmung des Neigungswinkels (I. 1), und des Durchschnittspunktes derselben.

1) Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene. Denkt man sich aus irgend einem Punkte der Geraden 1) ein Perpendikel auf die Ebene I) gefällt, so ist der von diesem Perpendikel und der Geraden eingeschlossene Winkel $\mu = 90^0 - (I.\ 1)$; der Winkel $\mu$ ist aber jenem gleich, welchen das aus dem Ursprunge auf die Ebene gefällte Perpendikel $p$ mit der Geraden 1) bildet; es ist also sin (I. 1). $= \cos (p.\ 1)$. Nun hat man:

$\cos(p.1) = \cos(p.x)\cos(1.x) + \cos(p.y) + \cos(1.y) + \cos(p.z)\cos(1.z)$, folglich, wenn wir im 2[ten] Theile dieser Gleichung statt der Cosinusse die in §. 250 Gl. (6) und §. 254, Gl. (2) entwickelten Werthe einsetzen:

$$\sin (I.\ 1) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\ \sqrt{a^2+b^2+1}}. \qquad (1)$$

Soll die Gerade 1) zur Ebene I) parallel laufen, so muss sin (I.1) $= 0$ sein; hiemit folgt aus (1) als Bedingungsgleichung für den Parallelismus:

$$Aa + Bb + C = 0. \qquad (2)$$

Damit aber die Gerade 1) die Ebene I) senkrecht schneide, muss sin (I. 1) $= 1$ werden, wodurch (1) in

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\ \sqrt{a^2+b^2+1} = Aa + Bb + C$$

übergeht, welche Gleichung durch Erhebung zum Quadrate auf die Form:

$$(A - aC)^2 + (B - bC)^2 + (Ab - Ba)^2 = 0$$

gebracht werden kann und somit in folgende drei:

$$A - aC = 0,\ B - bC = 0,\ Ab - Ba = 0$$

zerfällt. Die 3[te] dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden ersteren; wir haben folglich als Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, damit die Gerade 1) die Ebene I) senkrecht schneide:

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}. \qquad (3)$$

auf die möglichst einfachste Weise, durch den Durchschnitt dreier zu den coordinirten Ebenen paralleler Ebenen.

---

## ZWEITES KAPITEL.

### VON DER EBENE UND DER GERADEN LINIE.

---

### Die Ebene.

**250.** Es sei (Fig. 11) $STU$ eine Ebene in einer beliebigen Lage gegen das Coordinatensystem; fällen wir aus dem Ursprunge das Loth $OP$ auf dieselbe, so ist ihre Lage durch die Länge und Richtung dieses Lothes vollkommen bestimmt. Irgend ein Punkt $M$ im Raume bildet mit den Punkten $O$ und $P$ verbunden ein Dreieck $MOP$, welches, wenn $M$ ein Punkt der durch $P$ senkrecht auf $OP$ gelegten Ebene ist, aber auch nur unter dieser Bedingung, bei $P$ einen rechten Winkel hat. Betrachtet man daher den Punkt $P$, gleich dem Ursprunge $O$, als einen festen, $M$ als einen veränderlichen Punkt im Raume, so drückt die Gleichung $OP^2 + PM^2 = OM^2$ aus, dass $M$ ein Punkt der durch $P$ senkrecht auf $OP$ gelegten Ebene ist. Setzt man also $OP = p$, bezeichnet mit $a$, $b$, $c$ die Coordinaten des Punktes $P$, mit $x$, $y$, $z$ jene des Punktes $M$, so geht obige Gleichung über in:
$$a^2 + b^2 + c^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
welche sich nach gehöriger Reduktion, und wenn man beachtet, dass $a^2 + b^2 + c^2 = p^2$ ist, in
$$ax + by + cz = p^2 \qquad (1)$$
verwandelt. Diese ist somit die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt $a$, $b$, $c$ geht und auf dem Radiusvector $p$ dieses Punktes senkrecht steht. Bezeichnet man mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Neigungswinkel des Perpendikels $p$ gegen die Axen der $x$, $y$, $z$, so ist:
$$a = p \cos \alpha, \quad b = p \cos \beta, \quad c = p \cos \gamma, \qquad (2)$$
und durch Substitution dieser Ausdrücke nimmt die Gl. (1) der Ebene folgende Gestalt an:
$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p. \qquad (3)$$

Die Ebene schneidet die Axen in den Punkten $S$, $T$, $U$, deren Abstände vom Ursprunge: $e_1$, $e_2$, $e_3$, offenbar die Werthe von $x$, $y$, $z$ sind, welche sich aus (1) oder (3) ergeben, wenn man daselbst der

Reihe nach $y$ und $z$, dann $x$ und $z$, endlich $x$ und $y$ gleich Null setzt; man findet auf diese Art:

$$e_1 = p \sec\alpha, \quad e_2 = p \sec\beta, \quad e_3 = p \sec\gamma, \tag{4}$$

und bringt mit Hülfe dieser Ausdrücke die Gl. (3) der Ebene noch auf folgende Form:

$$\frac{x}{e_1} + \frac{y}{e_2} + \frac{z}{e_3} = 1. \tag{5}$$

Diese verschiedenen Formen der Gl. einer Ebene unterscheiden sich, wie man sieht, nur durch die verschiedenen Constanten, welche in denselben erscheinen und zur Bestimmung der Lage der Ebene dienen; die analytische Form dieser Gleichungen ist aber wesentlich eine und dieselbe, und zwar die einer Gleichung des $1^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten, deren allgemeine Form:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{I}$$

ist. Jede Gleichung vom $1^{\text{ten}}$ Grade drückt daher eine Ebene aus, da sich die Constanten $A$, $B$, $C$, $D$ immer so bestimmen lassen, dass diese Gleichung mit den Gl. (1), (3) oder (5) identisch wird.

Bringt man die Gl. (3) und (I) auf die Form:

$$x\frac{\cos\alpha}{p} + y\frac{\cos\beta}{p} + z\frac{\cos\gamma}{p} = 1 \text{ und } -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1,$$

so folgt:

$$\frac{\cos\alpha}{p} = -\frac{A}{D}, \quad \frac{\cos\beta}{p} = -\frac{B}{D}, \quad \frac{\cos\gamma}{p} = -\frac{C}{D}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun, wenn man sie quadrirt und addirt und beachtet, dass $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{D^2}, \text{ somit } p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Behält man nun in diesem Ausdrucke von $p$ das untere Zeichen bei, so hat man:

$$\left.\begin{array}{c} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ p = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{array}\right\} \tag{6}$$

welche Ausdrücke Richtung und Länge des aus dem Ursprunge auf die Ebene (I) gefällten Perpendikels bestimmen.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist bekanntlich dem Winkel gleich, welchen zwei auf diese Ebenen senkrechte Gerade einschliessen und zugleich das Complement zu 90° desjenigen Winkels, welchen eine

dieser Senkrechten mit der anderen Ebene bildet. Diess vorausgesetzt, bezeichnen wir mit (I. $xy$), (I. $xz$), (I. $yz$) die Neigungswinkel der Ebene (I) gegen die coordinirten Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$; mit (I. $x$), (I. $y$), (I. $z$) die Neigungswinkel der Ebene (I) gegen die Axen der $x$, $y$, $z$, so ist

$\gamma = (\mathrm{I}.xy) = 90^0 - (\mathrm{I}.z); \beta = (\mathrm{I}.xz) = 90^0 - (\mathrm{I}.y); \alpha = (\mathrm{I}.yz) = 90^0 - (\mathrm{I}.x)$;

somit, wenn wir $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = N$ setzen, mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{I}.\,xy) &= \sin(\mathrm{I}.\,z) = C : N \\ \cos(\mathrm{I}.\,xz) &= \sin(\mathrm{I}.\,y) = B : N \\ \cos(\mathrm{I}.\,yz) &= \sin(\mathrm{I}.\,x) = A : N \end{aligned} \qquad (7)$$

Die Summe der Quadrate dieser 3 Cosinusse und Sinusse ist der Einheit gleich, übereinstimmend mit der zwischen den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bestehenden Bedingungsgleichung: $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

**251.** Wenn in der allgemeinen Gl. der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

einer oder mehrere der Coefficienten verschwinden, so erhält die Ebene dadurch eine besondere Lage gegen das Coordinatensystem, welche sich in der Form der Gleichung deutlich ausspricht.

1) Ist $D = 0$, so haben wir die Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (1)$$

welche eine durch den Ursprung gehende Ebene ausdrückt, weil ihr die Coordinaten dieses Punktes: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ Genüge leisten. Auch wird in diesem Falle $p = 0$.

2) Es verschwinde einer der Coefficienten $A$, $B$, $C$; sei z. B. $C = 0$, so verwandelt sich (I) in

$$Ax + By + D = 0, \qquad (2)$$

und es wird cos (I. $xy$) $= 0$ also (I. $xy$) $= 90^0$; folglich ist (2) die Gl. einer auf die $xy$-Ebene senkrechten oder zur Axe der $z$ parallelen Ebene. (Vergl. §. 249, II.) Aus gleichen Gründen sind $Ax + Cz + D = 0$ und $By + Cz + D = 0$ die Gleichungen von Ebenen, welche beziehungsweise zu den Axen der $y$ und $x$ parallel liegen.

3) Ist nebst $D$ auch noch einer der Coefficienten $A$, $B$, $C$ der Nulle gleich, so gehen aus (I) die Gleichungen:

$$Ax + By = 0,\; Ax + Cz = 0,\; By + Cz = 0, \qquad (3)$$

hervor, welche, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, zu Ebenen gehören, welche durch den Ursprung gehen und beziehungsweise auf den Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$ senkrecht stehen, und demnach der Reihe nach die Axen der $z$, $y$ und $x$ in sich enthalten.

4) Verschwinden zwei der Coefficienten $A$, $B$, $C$, so erhalten wir die Gleichungen

$$Ax + D = 0,\ By + D = 0,\ Cz + D = 0 \qquad (4)$$

oder $x = a$, $y = b$, $z = c$, welche zu Ebenen gehören, deren jede auf zwei coordinirten Ebenen, folglich auch auf der in diesen liegenden Coordinatenaxe senkrecht, also zur dritten Coordinatenebene parallel ist.

5) Ist endlich nebst zweien der Coefficienten $A$, $B$, $C$ auch noch $D = 0$, so gehen die Gleichungen (4) über in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, welche Gleichungen der Reihe nach den Coordinatenebenen der $yz$, $xz$, und $xy$ angehören.

**252.** Die Ebene: $Ax + By + Cz + D = 0 \ldots$ (I) schneidet die coordinirten Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$ in geraden Linien, $ST$, $SU$, $UT$ (Fig. 11), welche Knotenlinien (Spuren, Traçen) genannt werden, und in der angeführten Reihenfolge mit $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$ bezeichnet werden sollen. Man erhält (nach §. 249, IV.) die Gleichungen dieser Durchschnittslinien, indem man die Gl. der Ebene (I) mit den Gleichungen der coordinirten Ebenen: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ der Reihe nach verbindet. Somit sind:

$Ax + By + D = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der $\bar{z}$;
$Ax + Cz + D = 0$, $y = 0$ — — — $\bar{y}$;
$By + Cz + D = 0$, $x = 0$ — — — $\bar{x}$.

Bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B},\ z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C},\ y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B},$$

und bezeichnet den Winkel, welchen die $\bar{z}$ mit der Axe der $x$ bildet, mit $(\bar{z}\,.\,x)$ und ähnlich für die übrigen, so folgt:

$$\operatorname{tg}(\bar{z}.\,x) = -\frac{A}{B},\ \operatorname{tg}(\bar{y}.\,x) = -\frac{A}{C},\ \operatorname{tg}(\bar{x}.\,z) = -\frac{C}{B},$$

durch welche Gleichungen die Richtung der Knotenlinien bestimmt wird.

**253.** Betrachten wir nun zwei durch die Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (I)$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \qquad (II)$$

bestimmte Ebenen, so bietet sich zunächst die Frage nach der Durchschnittslinie und dem Neigungswinkel derselben dar; die erstere wird in den folg. §§. von selbst ihre Erledigung finden; mit der letzteren wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Der Neigungswinkel der beiden Ebenen, den wir mit (I. II.) bezeichnen, ist offenbar dem Winkel $(p.p')$ gleich, welchen zwei aus dem Ursprunge auf die Ebenen (I) und (II) gefällte Perpendikel $p$, $p'$ einschliessen, somit cos (I. II.) $=\cos(p.p')$. Sind nun $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ die Neigungswinkel dieser Perpendikel gegen die Coordinatenaxen, so hat man [§. 247, Gl. (5)]:

$$\cos(p.p') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \quad (1)$$

folglich mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), §. 250:

$$\cos(\text{I. II.}) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\ \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}. \quad (2)$$

Sollen die Ebenen (I) und (II) zu einander parallel sein, so muss cos (I. II) $= 1$ werden; mit diesem Werthe erhält man aus (2) nach Wegschaffung der Wurzelgrössen die Gleichung:

$$(AB' - BA')^2 + (AC' - CA')^2 + (BC' - CB')^2 = 0,$$

welche in folgende drei zerfällt:

$$AB' - BA' = 0,\ AC' - CA' = 0,\ BC' - CB' = 0,$$

von welchen jede eine Folge der beiden anderen ist. Wir haben daher als Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der Ebenen (I) und (II):

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \quad (3)$$

d. h. es müssen die Coefficienten der gleichnamigen Coordinaten proportional sein.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn wir $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$ setzen; es ist daher $m\,Ax + m\,By + m\,Cz + D' = 0$, oder, da $D'$ eine willkürliche Grösse ist und durch $mD'$ ersetzt werden kann,

$$Ax + By + Cz + D' = 0 \quad \text{(III)}$$

die Gleichung einer zu (I) parallelen Ebene. Bezeichnet man mit $p$ und $p'$ die Längen der aus dem Ursprunge auf die Ebenen (I) und (III) gefällten Perpendikel, so ist $p = -D : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $p' = -D' : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, und somit der Abstand $E$ der beiden parallelen Ebenen (I) und (III):

$$E = p - p' = \frac{D' - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Damit die Ebenen (I) und (II) sich senkrecht durchschneiden, muss cos (I. II) $= 0$ sein, womit sich aus (2):

$$AA' + BB' + CC' = 0 \quad (5)$$

als Bedingungsgleichung für den perpendikulären Schnitt der Ebenen (I) und (II) ergibt.

### Die gerade Linie.

**254.** Eine gerade Linie im Raume lässt sich immer als Durchschnitt zweier Ebenen betrachten. Sind daher:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}\right\} (m)$$

die Gleichungen dieser Ebenen, so gehört nach den in §. 249. IV. entwickelten Gründen das System dieser beiden Gleichungen einer geraden Linie im Raume an. Jede dieser Gleichungen kann aber durch irgend eine Verbindung derselben ersetzt werden; eliminirt man daher aus denselben der Reihe nach $x$, $y$, $z$, so erhält man drei neue Gleichungen von der Form:

$$gy + hz + k = 0, \quad g'x + h'z + k' = 0, \quad g''x + h''y + k'' = 0, \qquad (n)$$

und da je zwei dieser Gleichungen durch dieselben Werthe von $x, y, z$ befriediget werden, wie die beiden Gl. $(m)$, so drücken dieselben auch — und zwar in einfacherer Form — dieselbe Gerade im Raume aus.

Man weiss, dass die Gleichungen $(n)$, von denen jede eine Folge der beiden anderen ist, und aus ihnen durch Elimination der beiden Gleichungen gemeinschaftlichen Coordinate abgeleitet werden kann, die Gleichungen dreier Ebenen sind, welche beziehungsweise auf den Ebenen der $yz$, $xz$ und $xy$ senkrecht stehen und von welchen je zwei durch ihren Durchschnitt die Gerade im Raume bestimmen. Diese 3 Ebenen sind die projicirenden Ebenen der Geraden; da ferner jede dieser Gleichungen nur 2 Coordinaten enthält, so kann sie zugleich als Gleichung der Durchschnittslinie der projicirenden Ebene mit der Ebene dieser Coordinaten d. h. als Gleichung der Projection der Geraden im Raume auf die bezügliche coordinirte Ebene betrachtet werden, und in diesem Sinne sagt man, dass eine Gerade im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei coordinirte Ebenen bestimmt sei.

Es ist natürlich im Allgemeinen willkürlich, welche zwei der Gl. $(n)$ zur analytischen Darstellung einer Geraden man wählen will; wir werden uns im folgenden der beiden ersteren, in der Form:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \qquad (1)$$

bedienen, welche die Gerade durch ihre Projectionen auf die Ebenen der $xz$ und $yz$ ausdrücken. — Nur in dem Falle, wenn die Gerade zur $xy$-Ebene parallel ist, kann sie durch 2 Gleichungen von dieser Form nicht dargestellt werden, weil dann die zwei Ebenen, welche sie auf

die Ebenen der $xz$ und $yz$ projiciren, in eine einzige Ebene $z = \gamma$ zusammenfallen; man wird in diesem Falle die Gl. der Projection auf die Ebene der $xy$ : $y = cx + \delta$ zu Hülfe nehmen, welche in Verbindung mit der Gl. $z = \gamma$ die Gerade bestimmt.

Aus den Gründen der analytischen Geometrie in der Ebene folgt, dass die Constanten $\alpha$, $\beta$ der Gleichungen (1) die vom Ursprunge aus gezählten Strecken sind, welche diese Projectionen auf den Axen der $x$ und $y$ abschneiden; $a$ und $b$ aber die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche sie mit der Axe der $z$ einschliessen. Hieraus folgt, dass die Richtung einer Geraden im Raume bloss von den Coefficienten $a$ und $b$ abhängen kann, und dass somit zwei Gerade im Raume parallel sein werden, wenn ihre Gleichungen in Bezug auf diese Coefficienten übereinstimmen.

Die Durchschnittspunkte der Geraden (1) mit den Coordinaten-Ebenen ergeben sich ganz einfach durch Verbindung der Gl. (1) mit den Gleichungen dieser Ebenen. So erhält man z. B. für $z = 0 : x = \alpha$, $y = \beta$ als die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden und der Ebene der $xy$.

Die Winkel, welche die Gerade (1) mit den Axen einschliesst, wollen wir mit $(1 . x)$, $(1 . y)$, $(1 . z)$ bezeichnen. Nehmen wir auf der Geraden zwei beliebige Punkte $x, y, z$ und $x', y', z'$, und bezeichnen ihren Abstand mit $r$, so ist bekanntlich [Gl. (1) u. (3), §. 247.]

$$\cos(1.\,x) = \frac{x'-x}{r},\ \cos(1.\,y) = \frac{y'-y}{r},\ \cos(1.\,z) = \frac{z'-z}{r},$$
$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

Weil aber der Punkt $x', y', z'$ in der Geraden liegt, so hat man $x' = az' + \alpha$, $y' = bz' + \beta$, welche Gleichungen mit (1) durch Subtraktion verbunden:

$$x'-x = a(z'-z),\quad y'-y = b(z'-z)$$

geben, womit endlich $r = (z'-z)\sqrt{1+a^2+b^2}$ folgt. Die drei letzten Gleichungen bestimmen nun die Verhältnisse $\frac{x'-x}{r}$, $\frac{y'-y}{r}$ und $\frac{z'-z}{r}$, und man erhält:

$$\cos(1.x) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}};\cos(1.y) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}};\cos(1.z) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}. \quad (2)$$

Diese Ausdrücke sind zugleich die Sinusse der Neigungswinkel $(1.\,yz)$, $(1.\,xz)$, $(1.\,xy)$ der Geraden (1) gegen die Coordinatenebenen, welche die Winkel $(1.x)$, $(1.y)$, $(1.z)$, wie man leicht sieht, zu $90^0$ ergänzen.

Mit Hülfe der Gl. (2) findet man:

$$a = \frac{\cos(1.\,x)}{\cos(1.\,z)},\quad b = \frac{\cos(1.\,y)}{\cos(1.\,z)}, \tag{3}$$

womit die Gl. der Geraden (1) folgende Form annehmen:

$$x = \frac{\cos(1.\,x)}{\cos(1.\,z)}\,z + \alpha,\quad y = \frac{\cos(1.\,y)}{\cos(1.\,z)}\,z + \beta. \tag{4}$$

**255.** Als besondere Fälle der Lage einer Geraden sind folgende zu bemerken:

1) Zwei Gleichungen von der Form:

$$x = az,\ y = bz$$

in welchen die constanten Glieder fehlen, gehören einer durch den Ursprung gehenden Geraden an; sie werden in der That durch die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dieses Punktes erfüllt; auch erkennt man schon aus der Form derselben, dass auch die Projectionen durch den Ursprung gehen.

2) Eine Gerade, welche zu einer coordinirten Ebene parallel läuft, wird am einfachsten als Durchschnitt zweier Ebenen dargestellt, deren eine zu dieser coordinirten Ebene parallel, die andere darauf senkrecht ist. So drücken die Gleichungen $x = \alpha$, $y = bz + \beta$ eine zur Ebene der $yz$ parallele Gerade aus.

3) Eine Gerade, welche zu zwei coordinirten Ebenen, also auch zu der in diesen Ebenen liegenden Axe parallel ist, und mithin auf der dritten coordinirten Ebene senkrecht steht, wird durch eines der Gleichungssysteme:

$$\begin{matrix} y = \beta & \qquad x = \alpha & \qquad x = \alpha \\ z = \gamma & \qquad z = \gamma & \qquad y = \beta \end{matrix}$$

ausgedrückt, je nachdem sie zur Axe der $x$, $y$, oder $z$ parallel ist. Endlich sind:

$y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der Axe der $x$,
$x = 0$, $z = 0$ „ „ „ „ der $y$,
$x = 0$, $y = 0$ „ „ „ „ der $z$.

**256.** Betrachten wir jetzt zwei Gerade, welche durch ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{matrix}\right\}\ldots 1),\qquad \left.\begin{matrix} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{matrix}\right\}\ldots 2)$$

gegeben sind, so bieten sich wieder zuvörderst die Aufgaben dar, ihren Durchschnittspunkt, im Falle ein solcher existirt, und ihren Neigungswinkel zu finden.

1) Durchschnitt zweier Geraden. Wenn die Geraden 1) und 2) sich in einem Punkte schneiden, so müssen die Coordinaten dieses Punktes den Gleichungen beider Geraden Genüge leisten und sind daher nichts anderes als die Werthe von $x$, $y$, $z$, welche die Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig erfüllen, und sich aus diesen durch Elimination bestimmen. Eliminirt man zunächst $x$ und $y$, so erhält man:

$$az + \alpha = a'z + \alpha'; \quad bz + \beta = b'z + \beta',$$

aus welchen Gleichungen sich für $z$ die beiden Werthe:

$$z = -\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} \text{ und } z = -\frac{\beta - \beta'}{b - b'}$$

ergeben, welche, da sie dem Durchschnittspunkte angehören sollen, gleich sein müssen. Es ist daher

$$\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = \frac{\beta - \beta'}{b - b'}, \text{ oder } (a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha') \tag{1}$$

die Bedingungsgleichung, welcher die Constanten der Gleichungen 1) und 2) Genüge leisten müssen, wenn diese beiden Geraden sich schneiden, oder allgemeiner in einer Ebene liegen sollen. Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes hat man dann:

$$z = -\frac{\alpha - \alpha'}{a - a'} = -\frac{\beta - \beta'}{b - b'}; \; y = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'}, \; x = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'}. \tag{2}$$

2) Neigungswinkel zweier Geraden. Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Geraden 1) und 2) mit (1.2); mit $(1.x)$, $(1.y)$, $(1.z)$ die Winkel, welche die 1) mit den Axen bildet und durch ähnliche Symbole die analogen Winkel der 2), so ist [§. 247, Gl. (5)]:

$$\cos(1.2) = \cos(1.x)\cos(2.x) + \cos(1.y)\cos(2.y) + \cos(1.z)\cos(2.z), \tag{3}$$

oder wenn man für die Cosinusse ihre Werthe [§. 254. Gl. (2)] einführt:

$$\cos(1.2) = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}. \tag{4}$$

Sollen die beiden Geraden parallel laufen, so muss $\cos(1.2) = 1$ sein, welcher Werth in (4) eingeführt nach einer der in §. 253 ausgeführten ganz ähnlichen Reduction:

$$a = a', \quad b = b' \tag{5}$$

als Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der beiden Geraden liefert.

Sollen aber die Geraden auf einander senkrecht stehen, so ergibt sich hiefür, wegen $\cos(1.2) = 0$, die Bedingungsgleichung:

$$aa' + bb' + 1 = 0. \tag{6}$$

## Verbindung der Ebene mit der Geraden.

**257.** Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \dots .\ 1)$$

die Gleichungen einer Geraden, und:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots \text{I})$$

die Gleichung einer Ebene gegeben; beschäftigen wir uns wieder zunächst mit der Bestimmung des Neigungswinkels (I. 1), und des Durchschnittspunktes derselben.

1) Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene. Denkt man sich aus irgend einem Punkte der Geraden 1) ein Perpendikel auf die Ebene I) gefällt, so ist der von diesem Perpendikel und der Geraden eingeschlossene Winkel $\mu = 90^0 - (\text{I. } 1)$; der Winkel $\mu$ ist aber jenem gleich, welchen das aus dem Ursprunge auf die Ebene gefällte Perpendikel $p$ mit der Geraden 1) bildet; es ist also sin (I. 1). $= \cos (p.\ 1)$. Nun hat man:

$$\cos(p.1) = \cos(p.x)\cos(1.x) + \cos(p.y) + \cos(1.y) + \cos(p.z)\cos(1.z),$$

folglich, wenn wir im 2ten Theile dieser Gleichung statt der Cosinusse die in §. 250 Gl. (6) und §. 254, Gl. (2) entwickelten Werthe einsetzen:

$$\sin (\text{I. } 1) = \frac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+1}}. \qquad (1)$$

Soll die Gerade 1) zur Ebene I) parallel laufen, so muss sin (I.1) $= 0$ sein; hiemit folgt aus (1) als Bedingungsgleichung für den Parallelismus:

$$Aa + Bb + C = 0. \qquad (2)$$

Damit aber die Gerade 1) die Ebene I) senkrecht schneide, muss sin (I. 1) $= 1$ werden, wodurch (1) in

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+1} = Aa+Bb+C$$

übergeht, welche Gleichung durch Erhebung zum Quadrate auf die Form:

$$(A - aC)^2 + (B - bC)^2 + (Ab - Ba)^2 = 0$$

gebracht werden kann und somit in folgende drei:

$$A - aC = 0,\ B - bC = 0,\ Ab - Ba = 0$$

zerfällt. Die 3te dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden ersteren; wir haben folglich als Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, damit die Gerade 1) die Ebene I) senkrecht schneide:

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}. \qquad (3)$$

2) Durchschnittspunkt einer Geraden und einer Ebene. Die Coordinaten dieses Punktes sind jene Werthe von $x$, $y$, $z$, welche den Gleichungen der Geraden und der Ebene gleichzeitig Genüge leisten und sich somit durch Elimination aus diesen Gleichungen ergeben. Substituirt man die Werthe von $x$ und $y$ aus 1) in I) so erhält man

$$(Aa + Bb + C)\,z + A\alpha + B\beta + D = 0, \tag{4}$$

woraus

$$z = -\frac{A\alpha + B\beta + D}{Aa + Bb + C'}$$

und hiemit aus 1):

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{(Aa + Bb + C)\beta - (A\alpha + B\beta + D)\,b}{Aa + Bb + C} \\ x &= \frac{(Aa + Bb + C)\,\alpha - (A\alpha + B\beta + D)\,a}{Aa + Bb + C} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

folgt. — Ist die Grösse $A\alpha + B\beta + D$ von 0 verschieden, aber der Nenner $Aa + Bb + C = 0$, so werden diese Werthe der Coordinaten des Durchschnittspunktes unendlich gross, somit Gerade und Ebene parallel, wodurch wir auf die bereits oben gefundene Bedingung des Parallelismus zurückgeführt werden. Ist aber nebst dem Nenner auch noch die Grösse $A\alpha + B\beta + D = 0$, so ist die Gl. (4) für jeden Werth von $z$ erfüllt, d. h. jedes System von Werthen der Coordinaten $x$, $y$, $z$, welches die Gl. der Geraden 1) befriediget, genügt auch der Gl. I) der Ebene, und die Gerade liegt folglich ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Ebene. Dasselbe sprechen auch die Gl. (5) aus, indem diese Ausdrücke die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, also unbestimmt werden. Es sind somit

$$Aa + Bb + C = 0,\; A\alpha + B\beta + D = 0 \tag{6}$$

die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass die Gerade 1) in der Ebene I) liege.

In der That folgt dies auch aus der geometrischen Bedeutung dieser Gleichungen, indem die 1te wie bekannt, ausspricht, dass Gerade und Ebene parallel sind, die 2te aber ausdrückt, dass die Gerade und die Ebene einen bestimmten Punkt, nämlich den Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene der $xy$, dessen Coordinaten $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = 0$ sind, gemeinschaftlich haben.

### AUFGABEN UEBER DIE GERADE LINIE UND DIE EBENE.

**258.** 1te Aufg. Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien $x'$, $y'$, $z'$ und $x''$, $y''$, $z''$ die Coordinaten der gegebenen Punkte; die Gleichungen der Geraden sind von der Form:

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu \tag{1}$$

und müssen durch die Coordinaten der gegebenen Punkte erfüllt werden, wodurch sich die 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x' = mz' + \mu \\ y' = nz' + \nu \end{array}\right\} (2), \quad \left.\begin{array}{l} x'' = mz'' + \mu \\ y'' = nz'' + \nu \end{array}\right\} (3)$$

zur Bestimmung der 4 Unbekannten $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ ergeben, deren Werthe sodann in (1) zu substituiren sind, was offenbar auf die Elimination dieser 4 Grössen aus den 6 Gleichungen (1), (2) und (3) hinauskommt. Subtrahirt man die (2) von (1), sodann die (3) von (2), so kommt:

$$\begin{array}{ll} x - x' = m(z - z'), & y - y' = n(z - z') \\ x' - x'' = m(z' - z''), & y' - y'' = n(z' - z'') \end{array} \tag{4}$$

durch deren Division man

$$\frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{z - z'}{z' - z''}, \quad \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''} \tag{5}$$

oder

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \tag{6}$$

für die gesuchten Gleichungen erhält.

Die Gleichungen (4) sind, wie leicht einzusehen, die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt $x'$, $y'$, $z'$ geht, was wegen der häufigen Anwendung derselben bemerkt zu werden verdient.

Lässt man auch die Coordinaten $x$, $y$, $z$ einen bestimmten Punkt bezeichnen, so hat man in (5) oder (6) die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt sein müssen, damit 3 Punkte im Raume: $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$; $x''$, $y''$, $z''$ in einer Geraden liegen.

**259.** 2[te] Aufg. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; durch ersteren eine gerade Linie zu ziehen, welche zu letzterer parallel ist.

Es seien $x'$, $y'$, $z'$ die Coordinaten des gegebenen Punktes,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so hat man als Gl. einer Geraden, welche durch den Punkt $x'$, $y'$, $z'$ geht, $x - x' = m(z - z')$, $y - y' = n(z - z')$, und $m = a$, $n = b$ als Bedingung des Parallelismus; somit sind

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z')$$

die gesuchten Gleichungen.

**260.** 3[te] Aufg. Ein Punkt: $x'$, $y'$, $z'$ und eine Gerade:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots . \ 1)$$

sind gegeben; man suche die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt geht und die Gerade 1) senkrecht schneidet; die Coordinaten des Durchschnittspunktes und die Länge des zwischen diesem und dem Punkte $x'$, $y'$, $z'$ enthaltenen Stückes der Senkrechten.

1) Die Gleichungen der gesuchten Senkrechten seien:

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta', \tag{2}$$

so hat man, da dieselbe durch den Punkt $x'$, $y'$, $z'$ gehen soll:

$$x' = a'z' + \alpha', \quad y' = b'z' + \beta'; \tag{3}$$

damit sie auf der 1) senkrecht stehe:

$$aa' + bb' + 1 = 0, \tag{4}$$

endlich, damit sie die 1) schneide:

$$(a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha'). \tag{5}$$

Man hat nun aus den 4 Gleichungen (3), (4), (5) die Werthe der 4 Unbekannten $a'$, $b'$, $\alpha'$, $\beta'$ zu bestimmen und in (2) zu substituiren, was auf die Elimination dieser 4 Grössen zwischen den 6 Gleichungen (2) bis (5) hinauskommt, wodurch man zwei Gleichungen erhält, welche die Unbekannten nicht mehr enthalten und die gesuchten Gleichungen der Senkrechten sind.

Durch Subtraktion der Gl. (2) und (3) findet man nun:

$$a' = \frac{x - x'}{z - z'}, \ b' = \frac{y - y'}{z - z'}, \tag{6}$$

welche Werthe in (4) substituirt, die Gleichung:

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0 \tag{I}$$

liefern. Durch Substitution der aus (3) folgenden Werthe von $\alpha'$ und $\beta'$ in (5) erhält man ferner

$$(a - a')(\beta - y' + b'z') = (b - b')(\alpha - x' + a'z');$$

substituirt man hierin die Werthe von $a'$, $b'$ aus (6), und setzt Kürze halber die bekannten Grössen:

$$y' - bz' - \beta = A, \ x' - az' - \alpha = B, \ a(\beta - y') - b(\alpha - x') = C,$$

so erhält man:

$$A(x - x') - B(y - y') + C(z - z') = 0. \tag{II}$$

Die Gleichungen (I) und (II) sind nun jene der gesuchten Senkrechten; eliminiren wir aus beiden der Reihe nach $y - y'$ und $x - x'$, so erhalten wir sie in der gewöhnlichen Form:

$$x - x' = -\frac{Cb + B}{Ab + Ba}(z - z'), \ y - y' = \frac{Ca - A}{Ab + Ba}(z - z'). \tag{III}$$

2) Die Coordinaten des Durchschnittspunktes ergeben sich aus der Verbindung der Gleichungen der Senkrechten mit jenen der gege-

benen Geraden, und zwar ist es am einfachsten, die 1) mit (I) zu combiniren. Bringen wir zu diesem Behufe die Gl. 1) auf die Form:

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = a(z - z') - (x' - az' - \alpha) = a(z - z') - B \\ y - y' = b(z - z') - (y' - bz' - \beta) = b(z - z') - A, \end{array}\right\} \quad (7)$$

und bestimmen aus den 3 Gleichungen (7) und (I) die Werthe von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, so erhalten wir, da $Bb - Aa = C$ ist,

$$z - z' = \frac{Ab + Ba}{N}, \; y - y' = \frac{Ca - A}{N}, \; x - x' = -\frac{Cb + B}{N}, \quad (8)$$

wo Kürze halber $N = a^2 + b^2 + 1$ gesetzt ist, und $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind.

3) Endlich hat man für die Länge $P$ des Perpendikels, unter $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes verstanden: $P^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, folglich mit Rücksicht auf (8):

$$P = \frac{\sqrt{(Cb + B)^2 + (Ca - A)^2 + (Ab + Ba)^2}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Der Zähler unter dem Wurzelzeichen kann nach Entwickelung der Quadrate auch so geschrieben werden:

$A^2(b^2 + 1) + B^2(a^2 + 1) + C^2(a^2 + b^2) + 2(BCb - ACa + ABab)$;

da nun $C = Bb - Aa$, somit:

$(C - Bb + Aa)^2 = C^2 + B^2b^2 + A^2a^2 - 2(BCb - ACa + ABab) = 0$

ist, so erhält die genannte Grösse durch Elimination des doppelten Produktes die Form $(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + 1)$, wodurch sich für $P$ der folgende einfachere Ausdruck ergibt:

$$P = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{a^2 + b^2 + 1}}. \quad (9)$$

Die Auflösung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn man die gesuchte Gerade als den Durchschnitt zweier durch den Punkt $x'$, $y'$, $z'$ gelegten Ebenen betrachtet, von denen die eine auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, die andere durch diese hindurchgeht. In der That sind obige Gleichungen I und II die Gleichungen dieser Ebenen, wie wir später [§. 266 und 263] sehen werden.

**261.** 4^te^ Aufg. Man sucht die Gleichungen der Geraden, welche durch den Punkt $x'$, $y'$, $z'$ geht und auf der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (I)$$

normal steht; die Coordinaten des Durchschnittspunktes und die Länge des zwischen diesem Punkte und dem Punkte $x'$, $y'$, $z'$ liegenden Stückes der Normale.

Die Gleichungen einer Geraden, welche den Punkt $x'$, $y'$, $z'$ enthält, sind bekanntlich

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

und damit diese auf der Ebene (I) senkrecht stehe, muss $a = \frac{A}{C}$, $b = \frac{B}{C}$ sein; folglich sind

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z') \qquad (1)$$

die gesuchten Gleichungen der Normale.

Zur Bestimmung des Durchschnittspunktes bringen wir die Gl. (I) auf die Form:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + (Ax' + By' + Cz' + D) = 0$$

und verbinden diese Gleichung mit den Gl. (1), so erhalten wir, wenn Kürze halber

$$Ax' + By' + Cz' + D = E, \text{ und } A^2 + B^2 + C^2 = N$$

gesetzt wird:

$$x - x' = -\frac{AE}{N}, \; y - y' = -\frac{BE}{N}, \; z - z' = -\frac{CE}{N}, \qquad (2)$$

wo $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind. Endlich ist die Länge $P$ des zwischen diesem und dem Punkte $x'$, $y'$, $z'$ liegenden Stückes der Normale:

$$P = \frac{E}{\sqrt{N}} = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3)$$

**262.** 5te Aufg. Es wird die Gleichung der Ebene verlangt, welche durch 3 gegebene Punkte geht.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ seien $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$; die Gleichung der Ebene sei:

$$Ax + By + Cz - D = 0; \ldots\ldots (m)$$

setzt man der Kürze halber $\frac{A}{D} = a$, $\frac{B}{D} = b$, $\frac{C}{D} = c$, so hat man zur Bestimmung der Unbekannten $a$, $b$, $c$ folgende Bedingungsgleichungen:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 1, \; ax_2 + by_2 + cz_2 = 1, \; ax_3 + by_3 + cz_3 = 1;$$

die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe von $a$, $b$, $c$ erscheinen bekanntlich in Form von Brüchen, welchen ein und derselbe Nenner zukommt; nimmt man diesen für den Werth von $D$, was wegen der Willkürlichkeit dieser Grösse gestattet ist, so erhält man:

$$A = z_1(y_3 - y_2) + z_2(y_1 - y_3) + z_3(y_2 - y_1)$$
$$B = x_1(z_3 - z_2) + x_2(z_1 - z_3) + x_3(z_2 - z_1)$$
$$C = y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)$$
$$D = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Wie man durch Vergleichung mit Gl. (4), §. 161 findet, sind die Coefficienten $A$, $B$, $C$ nichts anderes als die doppelten Flächeninhalte der Projectionen des Dreieckes $M_1\, M_2\, M_3$ auf die coordinirten Ebenen der $yz$, $xz$ und $xy$, somit wenn $f$, $f'$, $f''$ diese Flächeninhalte bezeichnen: $A = 2f$, $B = 2f'$, $C = 2f''$.

Um auch die geometrische Bedeutung des Coefficienten $D$ zu finden, sei $F$ der Flächeninhalt des Dreieckes $M_1\, M_2\, M_3$ selbst, so hat man [§. 247, Gl. (9)]: $F^2 = f^2 + f'^2 + f''^2$, somit $A^2 + B^2 + C^2 = 4\,F^2$. Bezeichnet man nun mit $p$ das aus dem Ursprunge auf die Ebene $(m)$ gefällte Perpendikel, so ist bekanntlich $p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, folglich $D = 2\,Fp$. Es ist aber $Fp$ bekanntlich der 3fache Körperinhalt der Pyramide, welche das $\triangle\, M_1\, M_2\, M_3$ zur Grundfläche und den Ursprung zum Scheitel hat, somit $D$ das 6fache dieses Volums.

Setzt man die eben gefundenen Werthe von $A$, $B$, $C$, $D$ in $(m)$ ein und dividirt durch 6, so kommt:

$$\tfrac{1}{3} f.x + \tfrac{1}{3} f'.y + \tfrac{1}{3} f''.z = \tfrac{1}{3}\, F.p;$$

nun sind $\frac{1}{3} f.x$, $\frac{1}{3} f'.y$, $\frac{1}{3} f''.z$ die Körperinhalte der 3 Pyramiden, welche die Projectionen des $\triangle\, M_1\, M_2\, M_3$ zur Grundfläche und einen beliebigen Punkt $x$, $y$, $z$ der Ebene dieses Dreieckes zur gemeinschaftlichen Spitze haben; die letzte Gleichung spricht daher den bemerkenswerthen Satz aus, dass die Summe dieser drei Pyramiden eine constante Grösse und gleich ist jener Pyramide, welche das $\triangle\, M_1\, M_2\, M_3$ zur Basis und den Ursprung zum Scheitel hat.

Der Satz gilt übrigens auch dann, wenn eine beliebige ebene Figur an die Stelle des $\triangle\, M_1\, M_2\, M_3$ gesetzt wird. In der That, ist

$$x \cos\,(\mathrm{I}.\, yz) + y \cos\,(\mathrm{I}.\, xz) + z \cos\,(\mathrm{I}.\, xy) = p$$

die Gl. einer beliebigen Ebene I, und $F$ der Flächeninhalt einer beliebigen gerad- oder krummlinigen in derselben verzeichneten Figur, so ist auch:

$$\tfrac{1}{3} x.\, F \cos\,(\mathrm{I}.\, yz) + \tfrac{1}{3} y.\, F \cos\,(\mathrm{I}.\, xz) + \tfrac{1}{3} z.\, F \cos\,(\mathrm{I}.\, xy) = \tfrac{1}{3}\, Fp;$$

es sind aber $F \cos\,(\mathrm{I}.\, yz)$, $F \cos\,(\mathrm{I}.\, xz)$, $F \cos\,(\mathrm{I}.\, xy)$ die Flächeninhalte der Projectionen der Figur $F$ auf die coordinirten Ebenen der $yz$, $xz$ und $xy$, somit, wenn dieselben mit $f$, $f'$, $f''$ bezeichnet werden,

$$\tfrac{1}{3} f.\, x + \tfrac{1}{3} f'.\, y + \tfrac{1}{3} f''.\, z = \tfrac{1}{3}\, Fp,$$

wie oben; die Pyramiden gehen natürlich in Kegel über, wenn $F$ eine krummlinige Figur ist.

**263.** 6[te] Aufg. Es wird die Gleichung einer Ebene gefordert, welche durch den Punkt $x', y', z'$ geht, und die Gerade

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta \ldots . m)$$

in sich enthält.

Es sei:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so haben wir die Bedingungsgleichungen:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \ldots (2)$$

$$Aa + Bb + C = 0 \ldots . (3),\ A\alpha + B\beta + D = 0 \ldots . (4)$$

von welchen die 1[te] ausdrückt, dass der Punkt $x', y', z'$ in der gesuchten Ebene liege, die zwei anderen die Bedingung enthalten, [§. 257, Gl. (6)], dass die Ebene durch die Gerade $(m)$ gehe.

Durch Subtraktion der Gl. (1) und (2) erhält man zunächst:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \qquad (5)$$

als Gleichung jeder Ebene, welche durch den Punkt $x', y', z'$ geht; ferner wenn man den aus (2) folgenden Werth von $D$ in (4) substituirt:

$$A(\alpha - x') + B(\beta - y') - Cz' = 0. \qquad (6)$$

Aus (3) und (6) folgt aber:

$$\frac{A}{C} = -\frac{\beta + bz' - y'}{a(\beta - y') - b(\alpha - x')},\quad \frac{B}{C} = \frac{\alpha + az' - x'}{a(\beta - y') - b(\alpha - x')},$$

welche Werthe in (5) substituirt, die Gleichung:

$$(\beta + bz' - y')(x - x') - (\alpha + az' - x')(y - y') - [a(\beta - y') - b(\alpha - x')]$$
$$(z - z') = 0 \qquad (I)$$

für die gesuchte Ebene liefern.

Kürzer gelangt man zu dieser Gleichung auf folgendem Wege. Bringen wir die Gl. $(m)$ der gegebenen Geraden auf die Form: $x - az - \alpha = 0$, $y - bz - \beta = 0$, multipliciren eine derselben, etwa die 2[te] mit dem unbestimmten Faktor $\lambda$ und addiren sodann, so erhalten wir die Gleichung:

$$x - az - \alpha + \lambda(y - bz - \beta) = 0, \qquad (7)$$

welche einer Ebene angehört, weil sie nach $x, y, z$ vom ersten Grade ist; welche Ebene aber auch durch die Gerade $(m)$ geht, da (7) offenbar durch dieselben Werthe von $x, y, z$ befriediget wird, welche den Gl. $(m)$ Genüge leisten. Die weitere Bedingung, dass diese Ebene noch den Punkt $x', y', z'$ enthalte, liefert die Gleichung

$$x' - az' - \alpha + \lambda(y' - bz' - \beta) = 0$$

zur Bestimmung der Grösse $\lambda$, durch deren Elimination aus (7)

$$(x - az - \alpha)(y' - bz' - \beta) - (y - bz - \beta)(x' - az' - \alpha) = 0 \quad (II)$$

folgt; diese ist die Gl. der gesuchten Ebene und mit (I) identisch, wie man sich leicht überzeugen kann.

**264.** 7$^{\text{te}}$ Aufg. Man soll die Gleichung einer Ebene finden, welche durch die Gerade:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots (m)$$

geht, und zu der Geraden

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta' \ldots (n)$$

parallel ist.

Die Gleichung einer Ebene, welche durch die Gerade $(m)$ geht, ist nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$x - az - \alpha + \lambda (y - bz - \beta) = 0, \text{ oder}$$

$$x + \lambda y - (a + \lambda b) z - (\alpha + \lambda\beta) = 0; \qquad (1)$$

und damit diese Ebene zur Geraden $(n)$ parallel sei, muss die Bedingungsgleichung [(2), §. 257]: $a' + \lambda b' - (a + \lambda b) = 0$ erfüllt werden, woraus $\lambda = -\dfrac{a' - a}{b' - b}$ folgt; substituirt man diesen Werth in (1), so erhält man die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$x(b'-b) - y(a'-a) - z(ab'-a'b) - [\alpha(b'-b) - \beta(a'-a)] = 0. \quad (I)$$

**265.** 8$^{\text{te}}$ Aufg. Man suche die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt $x', y', z'$ geht, und zu den beiden Geraden

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \ldots (m), \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \ldots (n)$$

parallel ist.

Die Gleichung einer durch den Punkt $x', y', z'$ gelegten Ebene hat die Form:

$$M(x - x') + N(y - y') + z - z' = 0. \qquad (1)$$

Die Bedingung, dass diese Ebene den Geraden $(m)$ und $(n)$ parallel laufe, wird durch die Gleichungen:

$$Ma + Nb + 1 = 0, \; Ma' + Nb' + 1 = 0$$

ausgedrückt, aus welchen man

$$M = -\frac{b' - b}{ab' - a'b}, \quad N = \frac{a' - a}{ab' - a'b}$$

findet, womit sich (1) in:

$$(b' - b)(x - x') - (a' - a)(y - y') - (ab' - a'b)(z - z') = 0 \quad (I)$$

verwandelt, welche die gesuchte Gleichung ist.

**266.** 9$^{\text{te}}$ Aufg. Ein Punkt $x', y', z'$, und eine Gerade:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots (m)$$

sind gegeben; man soll durch ersteren senkrecht auf die Gerade eine Ebene legen.

Es sei $M(x - x') + N(y - y') + z - z' = 0$ die Gl. einer durch den Punkt $x', y', z'$ gehenden Ebene, so muss, damit dieselbe auf der Geraden $(m)$ senkrecht stehe, [§. 257, Gl. (3)] $a = M$, $b = N$ sein, wodurch wir:

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \qquad \text{(I)}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene erhalten.

Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Ebene mit der gegebenen Geraden, und die Entfernung dieses Punktes vom Punkte $x', y', z'$ findet man wieder, wie leicht einzusehen, die schon in §. 260 entwickelten Ausdrücke (8) und (9).

**267.** 10[te] Aufg. Durch den Punkt $x', y', z'$ soll eine Ebene gelegt werden, welche parallel ist zu der gegebenen Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots (m).$$

Stellen wir eine durch den Punkt $x', y', z'$ gehende Ebene durch die Gleichung

$$A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0$$

vor, so erfordert der Parallelismus zur Ebene $(m)$ noch die Erfüllung der Bedingungen:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

welchen wir genügen, wenn wir $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$ setzen, wodurch wir nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors $m$:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \qquad \text{(I)}$$

als Gl. der gesuchten Ebene erhalten.

**268.** 11[te] Aufg. Man soll durch die Gerade:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots (m)$$

eine Ebene legen, welche senkrecht steht auf der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (n)$$

Eine Ebene, welche die Gerade $(m)$ enthält, wird durch die Gleichung:

$$x - az - \alpha + \lambda(y - bz - \beta) = 0 \quad \text{oder}$$

$$x + \lambda y - (a + \lambda b)z - (\alpha + \lambda\beta) = 0$$

vorgestellt, und damit diese auf der Ebene $(n)$ senkrecht stehe, muss die Bedingung [Gl. (5) §. 253]: $A + B\lambda - C(a + \lambda b) = 0$ erfüllt werden, wodurch $\lambda = -\dfrac{A - aC}{B - bC}$ wird. Substituirt man diesen Werth in obige Gleichung, so ergibt sich:

$$(B - bC)x - (A - aC)y + (Ab - Ba)z - [\alpha(B - bC) - \beta(A - aC)] = 0 \quad \text{(I)}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

**269.** Die vorstehenden Aufgaben geben mehr als genügende Anleitung zur Behandlung anderer die gerade Linie und Ebene betreffenden, unter welchen wir noch die Aufgabe: die kürzeste Entfernung zweier gegebenen Geraden zu bestimmen, erwähnen und den Gang der Auflösung kurz andeuten wollen. Man lege durch die beiden Geraden (1) und (2) [nach §. 264] zwei zu einander parallele Ebenen I und II, so ist der Abstand derselben, nach Gl. (4), §. 253 berechnet, offenbar die gesuchte kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Wird sodann durch jede der Geraden (1) und (2) eine Ebene senkrecht auf die parallelen Ebenen I und II gelegt, so schneiden sich diese neuen Ebenen in einer Geraden, welche die Ebenen I und II, folglich auch die beiden gegebenen Geraden senkrecht schneidet, und Ort und Richtung der kürzesten Entfernung bestimmt.

## DRITTES KAPITEL.

### VON DEN KRUMMEN FLAECHEN IM ALLGEMEINEN; DEN CYLINDRISCHEN, CONISCHEN, ROTATIONS- UND WINDSCHIEFEN FLAECHEN.

**270.** Der geometrische Ort jeder Gleichung, welche in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten den $1^{ten}$ Grad überschreitet, so wie jeder transcendenten Gleichung ist im Allgemeinen eine krumme Fläche. So wie die ebenen Curven, kann man auch die Flächen in algebraische und transcendente eintheilen, und die ersteren nach dem Ordnungsexponenten ihrer Gleichung in Flächen des $1^{ten}$ Grades (die Ebene), des $2^{ten}$, $3^{ten}$ Grades, u. s. w. unterscheiden. Die lineare Form aller in §. 248 entwickelten Gleichungen, welche den Uebergang von irgend einem Coordinatensysteme zu einem beliebigen anderen vermitteln, zeigt auf der Stelle, dass der Grad der Gleichung einer Fläche von der Wahl des Coordinatensystemes unabhängig ist, folglich mit der durch sie repräsentirten Fläche in einem wesentlichen Zusammenhange steht.

Um die Gestalt einer Fläche aus ihrer Gleichung zu erkennen, ist es am einfachsten, dieselbe durch Ebenen zu schneiden, und die Natur der Durchschnittslinien zu untersuchen. Ist $F(x, y, z) = 0$ die Gl. der krummen Fläche, und $L = 0$ die Gl. der schneidenden Ebene, so gehören diese beiden Gleichungen, als coëxistirend betrachtet, der

Durchschnittslinie an; eliminirt man aus beiden Gleichungen der Reihe nach $z$, $y$, $x$, so erhält man die Gleichungen der Projectionen der Durchschnittslinie auf die coordinirten Ebenen der $xy$, $xz$ und $yz$. Ist nun die schneidende Ebene keiner der coordinirten Ebenen parallel, so lässt sich die Gestalt des Schnittes aus den Gleichungen seiner Projectionen nicht sofort erkennen, und es ist dann am einfachsten, die Durchschnittscurve auf zwei in ihrer Ebene selbst liegende Axen zu beziehen, was man durch Transformation der Coordinaten auf folgende Weise erreicht, wobei wir immer rechtwinklige Coordinaten voraussetzen.

Man nehme die schneidende Ebene als $x'y'$-Ebene eines neuen Coordinatensystemes an; bezeichnet man nun mit $a$, $b$, $c$ die Coordinaten eines in dieser Ebene liegenden Punktes, welchen man als neuen Ursprung wählt, mit $\varphi$ den Winkel, welchen die Knotenlinie der schneidenden Ebene in der $xy$-Ebene mit der Axe der $x$ bildet, mit $\psi$ den Winkel, welchen die Axe der $x'$ mit der eben genannten Knotenlinie einschliesst, endlich mit $\theta$ den Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen jene der $xy$, so hat man [§. 248, (9)]:

$$\begin{aligned} x &= a + x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) \\ &\quad - y' (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta) + z' \sin\varphi \sin\theta, \\ y &= b + x' (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) \\ &\quad - y' (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) - z' \cos\varphi \sin\theta, \\ z &= c + x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gl. der Fläche, so erhält man dieselbe auf das neue Coordinatensystem bezogen, in welcher sodann nur $z' = 0$ zu setzen ist, um die Gleichung der Durchschnittslinie der Fläche mit der Ebene der $x'y'$, d. i. der gegebenen schneidenden Ebene zu erhalten. Da hiedurch aus der transformirten Gleichung alle mit $z'$ multiplicirten Glieder verschwinden, so wird man einfacher zu demselben Resultate gelangen, wenn man schon in den obigen Transformationsformeln $z' = 0$ setzt; nimmt man dann noch die neue $x'$-Axe parallel zu der oben erwähnten Knotenlinie, so wird auch $\psi = 0$, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= b + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= c + y' \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gl. der Fläche liefert unmittelbar die Gl. des gesuchten Durchschnittes.

Geht die schneidende Ebene durch den Ursprung, so behält man gewöhnlich diesen unverändert bei, wodurch in den Ausdrücken $(m)$

$a = b = c = 0$, und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen der $xy$ und $x'y'$ zur neuen Axe der $x'$ wird.

Aus der linearen Form obiger Gleichungen folgt zugleich, dass die Durchschnittslinie einer Fläche der $m^{ten}$ Ordnung, und einer Ebene höchstens eine Curve des $m^{ten}$ Grades sein kann.

Eben so ist klar, dass eine Fläche der $m^{ten}$ Ordnung von einer Geraden nicht in mehr als $m$ Punkten geschnitten werden kann. Denn eliminirt man aus der Gl. des $m^{ten}$ Grades der Fläche und jenen einer geraden Linie, welche bekanntlich vom ersten Grade sind, zwei Coordinaten, z. B. $x$ und $y$, so kann die Eliminationsgleichung, welche die $z$-Coordinaten sämmtlicher Durchschnittspunkte liefert, bekanntlich den $m^{ten}$ Grad nicht überschreiten.

**271.** Analytisch ist eine Fläche durch ihre Gleichung definirt; und wenn letztere gegeben ist, so kann die Frage nach den durch sie ausgedrückten Flächen und deren Eigenschaften zum Gegenstande einer Untersuchung gemacht werden, wie dies im folgenden Kapitel mit den Flächen der $2^{ten}$ Ordnung geschehen wird.

Geometrisch ist eine Fläche bestimmt durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft derselben, welche zur Ableitung ihrer Gleichung benützt werden kann.

Ein einfaches Beispiel hiezu bietet uns die Kugelfläche dar. Aus der bekannten Eigenschaft, dass alle Punkte derselben von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit entfernt sind, ergibt sich sogleich als Gleichung der Kugel:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2, \tag{1}$$

wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten des Mittelpunktes, $x$, $y$, $z$ jene eines beliebigen Punktes der Fläche sind, und $r$ die constante Entfernung dieser Punkte, d. i. den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammen, so hat man als Gleichung der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{2}$$

Aus (1) folgt durch Entwickelung der Quadrate:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

Wie man sieht, ist die Kugel eine Fläche der $2^{ten}$ Ordnung; jede Gleichung des $2^{ten}$ Grades von der Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0, \tag{4}$$

in welcher die Quadrate von $x$, $y$, $z$ gleiche Coefficienten haben, die Produkte $xy$, $xz$ und $yz$ aber fehlen, gehört einer Kugelfläche an, für

welche man, (4) mit (3) vergleichend, als Coordinaten des Mittelpunktes und Halbmesser findet:

$$\alpha = -C, \beta = -C', \gamma = -C''; r = \sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2 - F}.$$

Da bekanntlich eine Kugel von einer Ebene in einem Kreise geschnitten wird, so bedient man sich zur analytischen Darstellung eines Kreises im Raume gewöhnlich des Systemes der Gleichungen einer Kugel und einer Ebene.

Weit häufiger entlehnt man jedoch die Definition einer Fläche von der Art ihrer Erzeugung durch Bewegung einer Linie im Raume. Jede Fläche kann man sich nämlich dadurch entstanden denken, dass sich eine Linie (die erzeugende Linie) im Raume nach einem bestimmten Gesetze bewege; wobei sie entweder ihre Form beibehält, oder diese gleichzeitig verändert. So wird der aus den Elementen bekannte gerade Cylinder durch Bewegung einer Geraden erzeugt, welche an der Peripherie eines Kreises fortgleitet, auf dessen Ebene sie beständig senkrecht steht; die Kugelfläche kann man sich durch Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser erzeugt denken; u. s. w. Diese Betrachtung der Flächen führt zugleich zu einer Eintheilung derselben in Familien, je nach dem ihrer Erzeugung zu Grunde liegenden Gesetze der Bewegung der erzeugenden Linie, welche Eintheilung nicht nur für die mathematische Behandlung, sondern namentlich auch für die mannigfaltigen praktischen Anwendungen von grossem Nutzen ist. Uebrigens ist diese Eintheilung keine systematische, indem eine und dieselbe Fläche auf mehrfache Weise erzeugt und demzufolge als mehreren Familien angehörig betrachtet werden kann.

**272.** Die Ableitung der Gleichung der erzeugten Fläche hat keine Schwierigkeit, wenn die erzeugende Linie und das Gesetz ihrer Bewegung gegeben sind. Der Gang der Rechnung ist folgender. Es seien:

$$F(x, y, z, a, b, c, \ldots) = 0, \quad F'(x, y, z, a', b', c', \ldots) = 0 \tag{1}$$

die gegebenen Gleichungen der erzeugenden Linie, in welchen $a$, $b$, $c$, ... $a'$, $b'$, $c'$, ... Coefficienten bedeuten, welche die Lage der Linie im Raume und ihre Abmessungen bestimmen und allgemein Parameter genannt werden. Offenbar müssen einige dieser Parameter unbestimmt sein, weil sonst diese Linie keiner Ortsveränderung fähig wäre, und man sieht leicht ein, dass jede der Gl. (1) einen oder mehrere derlei unbestimmte Parameter enthalten müsse; denn da jede dieser Gleichungen eine Fläche bedeutet, deren Durchschnitt eben die erzeugende Linie ist, so würde, falls etwa sämmtliche Parameter der 2ten con-

stant wären, der Durchschnitt immer auf der durch diese Gleichung dargestellten festen Fläche liegen, und also eben nur diese Fläche erzeugen können, wie auch die Parameter der 1ten Gleichung sich ändern und diese Fläche sich bewegen möge. Ferner überzeugt man sich leicht, dass von den veränderlichen Parametern nur einer willkürlich, die anderen aber von diesem abhängig oder Funktionen desselben sein müssen, weil ja von einer Lage der erzeugenden Linie zur nächsten die veränderlichen Parameter nach einem bestimmten Gesetze sich ändern sollen.

Dies vorausgesetzt, seien, um die Ideen zu fixiren, $a$, $b$, $a'$, $b'$ unbestimmte Parameter; einen derselben, z. B. $a$, nehmen wir als willkürlich und setzen daher $b = \varphi(a)$, $a' = \psi(a)$, $b' = \chi(a)$, wo $\varphi$, $\psi$, $\chi$ willkürliche Funktionen bezeichnen; die Gl. (1) der erzeugenden Linie nehmen dadurch die Form an:

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0,\ F'[x, y, z, \psi(a), \chi(a)] = 0; \qquad (2)$$

jeder Punkt im Raume, dessen Coordinaten diesen Gleichungen Genüge leisten, liegt in der erzeugenden Linie bei irgend einer Lage derselben, welche durch den, dem willkürlichen Parameter $a$ ertheilten Werth bestimmt ist; eliminirt man daher diese Grösse aus den Gl. (2), so erhält man eine Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (3)$$

welche nothwendig durch alle Punkte im Raume befriediget wird, die sich in der erzeugenden Linie bei irgend einer Lage derselben befinden, und somit die Gleichung der erzeugten Fläche selbst ist.

Zur Bestimmung der in den Gl. (2) vorkommenden willkürlichen Funktionen müssen eben so viele Bedingungen gegeben sein, an welche die Bewegung der erzeugenden Linie gebunden ist; z. B. bei obiger Annahme dreier Funktionen, 3 Curven, welche die erzeugende Linie beständig schneiden soll.

Nennt man $A$, $B$, $C$ diese 3 Curven, welche die Bewegung der Erzeugenden dirigiren, und den Namen Leitlinien führen, so eliminire man aus den Gl. (2) und jenen der Leitlinie $A$ die Coordinaten $x$, $y$, $z$; man erhält dadurch eine Gleichung $L = 0$, zwischen den Grössen $a$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$, welche die Bedingung ausdrückt, dass die Erzeugende (2) mit der Curve $A$ einen Punkt gemeinschaftlich besitze. Durch dieselbe Operation auf die Leitlinien $B$ und $C$ angewendet, ergeben sich noch zwei Bedingungsgleichungen, $M = 0$, $N = 0$, welche in Verbindung mit jener: $L = 0$ zur Bestimmung der Funktionen $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$ hinreichen. Werden sodann die gefundenen Werthe derselben in (2) substituirt, so hat man aus diesen Gleichungen noch $a$ zu eliminiren, um die Gl. (3) der Fläche zu erhalten. Dies kommt,

wie leicht einzusehen, darauf hinaus, aus 5 Gleichungen, nämlich jenen (2) der Erzeugenden und obigen 3 Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die 4 Grössen $a$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$ zu eliminiren, was auf beliebige Weise geschehen mag.

### VON DEN CYLINDERFLAECHEN.

**273.** Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, die einer gegebenen festen Geraden stets parallel bleibt, heisst eine Cylinderfläche.

Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen sofort, da diese Gerade ihre Richtung nicht ändert, $a$ und $b$ constante gegebene Grössen bedeuten, während $\alpha$, $\beta$, bekanntlich die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene der $xy$, als veränderlich zu betrachten sind. Setzen wir daher

$$\beta = \varphi(\alpha), \tag{2}$$

so werden die Gleichungen der irgend eine Cylinderfläche erzeugenden Geraden:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \varphi(\alpha), \tag{3}$$

aus welchen durch Elimination von $\alpha$:

$$y - bz = \varphi\,(x - az) \tag{4}$$

oder

$$f\,(x - az, \; y - bz) = 0 \tag{5}$$

als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen folgt.

Hätte man allgemeiner die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

gegeben, so würde man als Gleichung der Cylinderfläche:

$$ax + by + cz = \varphi\,(a'x + b'y + c'z)$$

erhalten; in jeder dieser Formen erkennt man als charakteristisches Merkmal der Gl. einer Cylinderfläche, dass dieselbe irgend eine Relation zwischen zwei linearen Funktionen von $x$, $y$, $z$ ausspricht.

Die Form der Funktion $\varphi$ oder $f$ bestimmt sich meistens durch die Bedingung, dass die Erzeugende bei ihrer Bewegung eine gegebene Curve stets schneide. Sind:

$$F\,(x, y, z) = 0, \quad F'\,(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

die Gleichungen dieser Leitlinie, so wird man aus (1) und (6) die Coordinaten $x, y, z$ eliminiren, wodurch man zu der Relation (2): $f(\alpha, \beta) = 0$

oder $\beta = \varphi(\alpha)$ gelangt; aus dieser und den Gl. der Erzeugenden hat man dann noch $\alpha$ und $\beta$ zu eliminiren, um die gesuchte Gl. der Cylinderfläche zu erhalten.

**274.** Beisp. 1. Die Leitlinie sei ein Kreis in der Ebene der $xy$, dessen Gleichungen: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, $z=0$; ferner $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden. Durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus diesen 4 Gleichungen erhält man: $(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2=r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gleichungen der Erzeugenden $\alpha$ und $\beta$ eliminirt:

$$(x-az-p)^2+(y-bz-q)^2=r^2$$

als Gleichung des schiefen Cylinders von kreisförmiger Basis.

Lässt man den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises mit dem Ursprunge zusammenfallen, so wird $p=q=0$ und die Gl. des Cylinders:

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2.$$

Steht auch noch die erzeugende Gerade senkrecht auf der Ebene
), und man hat:

$$x^2+y^2=r^2$$

eraden Cylinders von kreisförmiger Basis.



Leitlinie sei eine Ellipse in der Ebene der $xy$, de-
dem Ursprunge und deren grosse Axe $2A$ mit der
nfällt, somit:

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2,\ z=0$$

erner wie oben $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gl. der
hält man auf demselben Wege:

$$(x-az)^2+A^2(y-bz)^2=A^2B^2$$

schiefen elliptischen Cylinders, welche für
Gleichung:

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2 \qquad (1)$$

tischen Cylinders übergeht.

diesen letzteren Cylinder durch eine Ebene, welche
g geht, gegen die $xy$-Ebene unter dem Winkel $\theta$
ese Ebene in einer Geraden schneidet, welche mit
Winkel $\varphi$ einschliesst, so haben wir in (1) für $x$, $y$,
$m$) §. 270 zu substituiren. Indem wir den Ursprung
in den angezogenen Gleichungen $a=b=c=0$
r als Gleichung des Cylinderschnittes:

$$y'^2(A^2\cos\varphi^2+B^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2+x'^2(A^2\sin\varphi^2+B^2\cos\varphi^2)$$
$$+2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta(A^2-B^2)\,x'y'=A^2B^2,$$

wie leicht einzusehen, darauf hinaus, aus 5 Gleichungen, nämlich jenen (2) der Erzeugenden und obigen 3 Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die 4 Grössen $a$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$ zu eliminiren, was auf beliebige Weise geschehen mag.

### VON DEN CYLINDERFLAECHEN.

**273.** Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, die einer gegebenen festen Geraden stets parallel bleibt, heisst eine Cylinderfläche.

Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen sofort, da diese Gerade ihre Richtung nicht ändert, $a$ und $b$ constante gegebene Grössen bedeuten, während $\alpha$, $\beta$, bekanntlich die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene der $xy$, als veränderlich zu betrachten sind. Setzen wir daher

$$\beta = \varphi(\alpha), \tag{2}$$

so werden die Gleichungen der irgend eine Cylinderfläche erzeugenden Geraden:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \varphi(\alpha), \tag{3}$$

aus welchen durch Elimination von $\alpha$:

$$y - bz = \varphi(x - az) \tag{4}$$

oder

$$f(x - az, \ y - bz) = 0 \tag{5}$$

als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen folgt.

Hätte man allgemeiner die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

gegeben, so würde man als Gleichung der Cylinderfläche:

$$ax + by + cz = \varphi(a'x + b'y + c'z)$$

erhalten; in jeder dieser Formen erkennt man als charakteristisches Merkmal der Gl. einer Cylinderfläche, dass dieselbe irgend eine Relation zwischen zwei linearen Funktionen von $x$, $y$, $z$ ausspricht.

Die Form der Funktion $\varphi$ oder $f$ bestimmt sich meistens durch die Bedingung, dass die Erzeugende bei ihrer Bewegung eine gegebene Curve stets schneide. Sind:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

die Gleichungen dieser Leitlinie, so wird man aus (1) und (6) die Coordinaten $x, y, z$ eliminiren, wodurch man zu der Relation (2): $f(\alpha, \beta) = 0$

oder $\beta = \varphi(\alpha)$ gelangt; aus dieser und den Gl. der Erzeugenden hat man dann noch $\alpha$ und $\beta$ zu eliminiren, um die gesuchte Gl. der Cylinderfläche zu erhalten.

**274.** Beisp. 1. Die Leitlinie sei ein Kreis in der Ebene der $xy$, dessen Gleichungen: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, $z=0$; ferner $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden. Durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus diesen 4 Gleichungen erhält man: $(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2=r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gleichungen der Erzeugenden $\alpha$ und $\beta$ eliminirt:

$$(x-az-p)^2+(y-bz-q)^2=r^2$$

als Gleichung des schiefen Cylinders von kreisförmiger Basis.

Lässt man den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises mit dem Ursprunge zusammenfallen, so wird $p=q=0$ und die Gl. des Cylinders:

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2.$$

Steht auch noch die erzeugende Gerade senkrecht auf der Ebene $xy$, so ist $a=b=0$, und man hat:

$$x^2+y^2=r^2$$

als Gleichung des geraden Cylinders von kreisförmiger Basis.

Beisp. 2. Die Leitlinie sei eine Ellipse in der Ebene der $xy$, deren Mittelpunkt mit dem Ursprunge und deren grosse Axe $2A$ mit der Axe der $x$ zusammenfällt, somit:

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2,\ z=0$$

ihre Gleichungen; ferner wie oben $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gl. der Erzeugenden, so erhält man auf demselben Wege:

$$B^2(x-az)^2+A^2(y-bz)^2=A^2B^2$$

als Gleichung des schiefen elliptischen Cylinders, welche für $a=b=0$ in die Gleichung:

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2 \tag{1}$$

des geraden elliptischen Cylinders übergeht.

Schneiden wir diesen letzteren Cylinder durch eine Ebene, welche durch den Ursprung geht, gegen die $xy$-Ebene unter dem Winkel $\theta$ geneigt ist, und diese Ebene in einer Geraden schneidet, welche mit der Axe der $x$ den Winkel $\varphi$ einschliesst, so haben wir in (1) für $x$, $y$, $z$ ihre Werthe aus $(m)$ §. 270 zu substituiren. Indem wir den Ursprung beibehalten, somit in den angezogenen Gleichungen $a=b=c=0$ setzen, erhalten wir als Gleichung des Cylinderschnittes:

$$y'^2(A^2\cos\varphi^2+B^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2+x'^2(A^2\sin\varphi^2+B^2\cos\varphi^2)$$
$$+2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta(A^2-B^2)\,x'y'=A^2B^2,$$

wie leicht einzusehen, darauf hinaus, aus 5 Gleichungen, nämlich jenen (2) der Erzeugenden und obigen 3 Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die 4 Grössen $a$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$, $\chi(a)$ zu eliminiren, was auf beliebige Weise geschehen mag.

### VON DEN CYLINDERFLAECHEN.

**273.** Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, die einer gegebenen festen Geraden stets parallel bleibt, heisst eine Cylinderfläche.

Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen sofort, da diese Gerade ihre Richtung nicht ändert, $a$ und $b$ constante gegebene Grössen bedeuten, während $\alpha$, $\beta$, bekanntlich die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene der $xy$, als veränderlich zu betrachten sind. Setzen wir daher

$$\beta = \varphi(\alpha), \tag{2}$$

so werden die Gleichungen der irgend eine Cylinderfläche erzeugenden Geraden:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \varphi(\alpha), \tag{3}$$

aus welchen durch Elimination von $\alpha$:

$$y - bz = \varphi(x - az) \tag{4}$$

oder

$$f(x - az, \; y - bz) = 0 \tag{5}$$

als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen folgt.

Hätte man allgemeiner die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

gegeben, so würde man als Gleichung der Cylinderfläche:

$$ax + by + cz = \varphi(a'x + b'y + c'z)$$

erhalten; in jeder dieser Formen erkennt man als charakteristisches Merkmal der Gl. einer Cylinderfläche, dass dieselbe irgend eine Relation zwischen zwei linearen Funktionen von $x$, $y$, $z$ ausspricht.

Die Form der Funktion $\varphi$ oder $f$ bestimmt sich meistens durch die Bedingung, dass die Erzeugende bei ihrer Bewegung eine gegebene Curve stets schneide. Sind:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

die Gleichungen dieser Leitlinie, so wird man aus (1) und (6) die Coordinaten $x, y, z$ eliminiren, wodurch man zu der Relation (2): $f(\alpha, \beta) = 0$

oder $\beta = \varphi(\alpha)$ gelangt; aus dieser und den Gl. der Erzeugenden hat man dann noch $\alpha$ und $\beta$ zu eliminiren, um die gesuchte Gl. der Cylinderfläche zu erhalten.

**274.** Beisp. 1. Die Leitlinie sei ein Kreis in der Ebene der $xy$, dessen Gleichungen: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, $z = 0$; ferner $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden. Durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus diesen 4 Gleichungen erhält man: $(\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2 = r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gleichungen der Erzeugenden $\alpha$ und $\beta$ eliminirt:

$$(x - az - p)^2 + (y - bz - q)^2 = r^2$$

als Gleichung des schiefen Cylinders von kreisförmiger Basis.

Lässt man den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises mit dem Ursprunge zusammenfallen, so wird $p = q = 0$ und die Gl. des Cylinders:

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2.$$

Steht auch noch die erzeugende Gerade senkrecht auf der Ebene $xy$, so ist $a = b = 0$, und man hat:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

als Gleichung des geraden Cylinders von kreisförmiger Basis.

Beisp. 2. Die Leitlinie sei eine Ellipse in der Ebene der $xy$, deren Mittelpunkt mit dem Ursprunge und deren grosse Axe $2A$ mit der Axe der $x$ zusammenfällt, somit:

$$B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2, \quad z = 0$$

ihre Gleichungen; ferner wie oben $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gl. der Erzeugenden, so erhält man auf demselben Wege:

$$B^2 (x - az)^2 + A^2 (y - bz)^2 = A^2B^2$$

als Gleichung des schiefen elliptischen Cylinders, welche für $a = b = 0$ in die Gleichung:

$$B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2 \tag{1}$$

des geraden elliptischen Cylinders übergeht.

Schneiden wir diesen letzteren Cylinder durch eine Ebene, welche durch den Ursprung geht, gegen die $xy$-Ebene unter dem Winkel $\theta$ geneigt ist, und diese Ebene in einer Geraden schneidet, welche mit der Axe der $x$ den Winkel $\varphi$ einschliesst, so haben wir in (1) für $x$, $y$, $z$ ihre Werthe aus $(m)$ §. 270 zu substituiren. Indem wir den Ursprung beibehalten, somit in den angezogenen Gleichungen $a = b = c = 0$ setzen, erhalten wir als Gleichung des Cylinderschnittes:

$$y'^2 (A^2 \cos\varphi^2 + B^2 \sin\varphi^2) \cos\theta^2 + x'^2 (A^2 \sin\varphi^2 + B^2 \cos\varphi^2)$$
$$+ 2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta (A^2 - B^2)\, x'y' = A^2B^2,$$

wie leicht einzusehen, darauf hinaus, aus 5 Gleichungen, nämlich jenen (2) der Erzeugenden und obigen 3 Bedingungsgleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$ die 4 Grössen $\alpha$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\chi(\alpha)$ zu eliminiren, was auf beliebige Weise geschehen mag.

### VON DEN CYLINDERFLAECHEN.

**273.** Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, die einer gegebenen festen Geraden stets parallel bleibt, heisst eine Cylinderfläche.

Es seien:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen sofort, da diese Gerade ihre Richtung nicht ändert, $a$ und $b$ constante gegebene Grössen bedeuten, während $\alpha$, $\beta$, bekanntlich die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene der $xy$, als veränderlich zu betrachten sind. Setzen wir daher

$$\beta = \varphi(\alpha), \tag{2}$$

so werden die Gleichungen der irgend eine Cylinderfläche erzeugenden Geraden:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \varphi(\alpha), \tag{3}$$

aus welchen durch Elimination von $\alpha$:

$$y - bz = \varphi(x - az) \tag{4}$$

oder

$$f(x - az, \; y - bz) = 0 \tag{5}$$

als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen folgt.

Hätte man allgemeiner die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

gegeben, so würde man als Gleichung der Cylinderfläche:

$$ax + by + cz = \varphi(a'x + b'y + c'z)$$

erhalten; in jeder dieser Formen erkennt man als charakteristisches Merkmal der Gl. einer Cylinderfläche, dass dieselbe irgend eine Relation zwischen zwei linearen Funktionen von $x$, $y$, $z$ ausspricht.

Die Form der Funktion $\varphi$ oder $f$ bestimmt sich meistens durch die Bedingung, dass die Erzeugende bei ihrer Bewegung eine gegebene Curve stets schneide. Sind:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

die Gleichungen dieser Leitlinie, so wird man aus (1) und (6) die Coordinaten $x, y, z$ eliminiren, wodurch man zu der Relation (2): $f(\alpha, \beta) = 0$

oder $\beta = \varphi(\alpha)$ gelangt; aus dieser und den Gl. der Erzeugenden hat man dann noch $\alpha$ und $\beta$ zu eliminiren, um die gesuchte Gl. der Cylinderfläche zu erhalten.

**274.** Beisp. 1. Die Leitlinie sei ein Kreis in der Ebene der $xy$, dessen Gleichungen: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, $z=0$; ferner $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden. Durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus diesen 4 Gleichungen erhält man: $(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2=r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gleichungen der Erzeugenden $\alpha$ und $\beta$ eliminirt:

$$(x-az-p)^2+(y-bz-q)^2=r^2$$

als Gleichung des schiefen Cylinders von kreisförmiger Basis.

Lässt man den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises mit dem Ursprunge zusammenfallen, so wird $p=q=0$ und die Gl. des Cylinders:

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2.$$

Steht auch noch die erzeugende Gerade senkrecht auf der Ebene $xy$, so ist $a=b=0$, und man hat:

$$x^2+y^2=r^2$$

als Gleichung des geraden Cylinders von kreisförmiger Basis.

Beisp. 2. Die Leitlinie sei eine Ellipse in der Ebene der $xy$, deren Mittelpunkt mit dem Ursprunge und deren grosse Axe $2A$ mit der Axe der $x$ zusammenfällt, somit:

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2,\ z=0$$

ihre Gleichungen; ferner wie oben $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gl. der Erzeugenden, so erhält man auf demselben Wege:

$$B^2(x-az)^2+A^2(y-bz)^2=A^2B^2$$

als Gleichung des schiefen elliptischen Cylinders, welche für $a=b=0$ in die Gleichung:

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2 \tag{1}$$

des geraden elliptischen Cylinders übergeht.

Schneiden wir diesen letzteren Cylinder durch eine Ebene, welche durch den Ursprung geht, gegen die $xy$-Ebene unter dem Winkel $\theta$ geneigt ist, und diese Ebene in einer Geraden schneidet, welche mit der Axe der $x$ den Winkel $\varphi$ einschliesst, so haben wir in (1) für $x$, $y$, $z$ ihre Werthe aus $(m)$ §. 270 zu substituiren. Indem wir den Ursprung beibehalten, somit in den angezogenen Gleichungen $a=b=c=0$ setzen, erhalten wir als Gleichung des Cylinderschnittes:

$$y'^2(A^2\cos\varphi^2+B^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2+x'^2(A^2\sin\varphi^2+B^2\cos\varphi^2)$$
$$+2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta(A^2-B^2)x'y'=A^2B^2,$$

welcher somit im Allgemeinen eine Ellipse ist, da das charakteristische Binom dieser Gleichung $= - 4A^2B^2 \cos\theta^2$ wesentlich negativ ist.

Es entsteht die Frage, ob der elliptische Schnitt unter Umständen in einen Kreis übergehen könne? Hiezu wird erfordert, dass die Coefficienten von $x'^2$ und $y'^2$ einander gleich, jener von $x'y' = 0$ werde; man hat also, da $\cos\theta$ im Allgemeinen von 0 verschieden ist, die Bedingungsgleichungen:

$$\sin\varphi \cos\varphi = 0$$
$$(A^2 \cos\varphi^2 + B^2 \sin\varphi^2)\cos\theta^2 = A^2 \sin\varphi^2 + B^2 \cos\varphi^2,$$

welche die zweifache Auflösung gestatten:

$$\sin\varphi = 0, \text{ also } \varphi = 0 \quad \text{und } \cos\theta = \pm \frac{B}{A},$$
$$\cos\varphi = 0, \text{ also } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und } \cos\theta = \pm \frac{A}{B};$$

die 2te ist wegen $A > B$ unzulässig; aber die erste liefert zwei Richtungen der schneidenden Ebene, nach welchen der elliptische Cylinder in Kreisen geschnitten wird. Dieser Cylinder kann daher auch als schiefer Cylinder von kreisförmiger Basis, und zwar auf doppelte Weise betrachtet werden.

## VON DEN KEGELFLAECHEN.

**275.** Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die beständig durch einen festen Punkt geht, heisst eine Kegelfläche oder konische Fläche. Der feste Punkt heisst Mittelpunkt (wohl auch Scheitel) der Kegelfläche.

Bezeichnen wir mit $x'$, $y'$, $z'$ die Coordinaten des Mittelpunktes, so sind

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z') \qquad (1)$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, in welchen $a$, $b$ veränderliche Grössen bedeuten, da diese Gerade ihre Richtung fortwährend verändert. Setzen wir noch

$$b = \varphi(a) \qquad (2)$$

so nehmen die Gleichungen der irgend eine Kegelfläche erzeugenden Geraden die Form an:

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = \varphi(a)(z - z'), \qquad (3)$$

und aus diesen folgt durch Elimination von $a$:

$$\frac{y - y'}{z - z'} = \varphi\left(\frac{x - x'}{z - z'}\right) \text{ oder } f\left(\frac{y - y'}{z - z'}, \frac{x - x'}{z - z'}\right) = 0 \qquad (4)$$

als allgemeine Gleichung der Kegelflächen, deren wesentlicher

Charakter darin besteht, dass sie in Bezug auf die Grössen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ homogen ist.

Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammen, so verwandelt sich (4) in

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \text{ oder } f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{5}$$

welche Gleichung homogen ist in Bezug auf die Veränderlichen $x, y, z$.

Die Form der Funktion $\varphi$ oder $f$ bestimmt sich gewöhnlich dadurch, dass eine Curve gegeben ist, an welcher die erzeugende Gerade fortgleitet. Die Elimination von $x, y, z$ aus den Gleichungen dieser Leitlinie und jenen der erzeugenden Geraden, führt auf die Gl. (2), als Ausdruck der Bedingung, dass die Erzeugende die Leitlinie beständig schneide.

**276.** Beisp. 1. Sei die Leitlinie ein in der Ebene der $xy$ liegender Kreis vom Halbmesser $r$, dessen Centrum mit dem Ursprunge zusammenfällt; $x', y', z'$ seien die Coordinaten des Mittelpunktes der Kegelfläche, so sind die Gleichungen der Leitlinie: $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, und jene der erzeugenden Geraden: $x - x' = a(z - z')$, $y - y' = b(z - z')$; aus diesen 4 Gleichungen folgt durch Elimination von $x, y, z$: $(x' - az')^2 + (y' - bz')^2 = r^2$, und endlich, wenn man aus dieser und den Gl. der Erzeugenden $a$ und $b$ eliminirt:

$$(x'z - xz')^2 + (y'z - yz')^2 = r^2(z - z')^2, \tag{1}$$

als Gl. des schiefen Kegels von kreisförmiger Basis.

Setzt man $x' = y' = 0$, so erhält man:

$$(x^2 + y^2)\, z'^2 = r^2 (z - z')^2 \tag{2}$$

als Gleichung des geraden Kegels, dessen Scheitel in der Axe der $z$, in der Entfernung $= z'$ von der in der $xy$-Ebene liegenden Basis vom Halbmesser $r$ sich befindet.

Beisp. 2. Nehmen wir als Leitlinie eine Ellipse, deren Ebene parallel zur $xy$-Ebene im Abstande $= c$, deren Centrum in der Axe der $z$, und deren grosse Axe $= 2A$ in der Ebene der $xz$ liegt; ihre Gleichungen sind somit $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, $z = c$. Wählt man ferner den Ursprung als Mittelpunkt der Kegelfläche, so hat man $x = az$, $y = bz$ als Gleichungen der erzeugenden Geraden, und erhält

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 \tag{3}$$

als Gl. des geraden elliptischen Kegels.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $c^2$, und beachtet das $\frac{c}{A} = \cot \alpha$, $\frac{c}{B} = \cot \beta$ ist, wenn man mit $\alpha$ und $\beta$ die Winkel bezeichnet,

welche die Durchschnittslinien der Kegelfläche mit den Ebenen der $xz$ und $yz$ mit der Axe der $z$ einschliessen, so nimmt (3) die Form an:

$$x^2 \operatorname{cotg} \alpha^2 + y^2 \operatorname{cotg} \beta^2 = z^2; \tag{4}$$

für $a = b = r$, verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis und man hat

$$(x^2 + y^2)\, c^2 = r^2 z^2 \text{ oder } x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg} \alpha^2 \tag{5}$$

als Gl. des geraden Kreiskegels, dessen Scheitel im Ursprunge liegt, dessen Axe mit der Axe der $z$ zusammenfällt und mit einer Kante des Kegels den $\angle\ \alpha$ einschliesst.

**277.** Untersuchen wir noch die Durchschnittslinien, in welchen ein elliptischer oder Kreiskegel von einer Ebene geschnitten wird. — Die Gl. des geraden elliptischen Kegels ist:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2. \tag{1}$$

Wählen wir die Durchschnittslinie $ST$ (Fig. 12) der schneidenden Ebene $STU$ mit der $xy$-Ebene als Axe der $x'$, den Punkt $U$, in welchem dieselbe der Axe der $z$ begegnet, als Ursprung, setzen $OU = \gamma$, $\angle\ XST = \varphi$ und den Neigungswinkel der (schneidenden) Ebene der $x'y'$ gegen die $xy$-Ebene $= \theta$, so haben wir in den Ausdrücken ($m$), §. 270, $a = b = 0$, $c = \gamma$ zu setzen, und erhalten nach Substitution derselben in (1) als Gleichung des Kegelschnittes:

$$\left.\begin{array}{l} y'^2 \left[\left(\dfrac{\sin\varphi^2}{A^2} + \dfrac{\cos\varphi^2}{B^2}\right)\cos\theta^2 - \dfrac{\sin\theta^2}{c^2}\right] + x'^2 \left[\dfrac{\cos\varphi^2}{A^2} + \dfrac{\sin\varphi^2}{B^2}\right] \\ + 2x'y' \sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\, \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 B^2} - \dfrac{2\gamma\sin\theta}{c^2}\, y' - \dfrac{\gamma^2}{c^2} \end{array}\right\} = 0. \tag{2}$$

Der Schnitt ist also eine Linie der 2$^{\text{ten}}$ Ordnung, und wie man nach Entwickelung des charakteristischen Binoms dieser Gleichung leicht findet, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem, blos mit Rücksicht auf den Zahlenwerth:

$$\operatorname{tg}\theta \; \begin{array}{c}<\\>\\=\end{array} \; \frac{c}{\sqrt{B^2\cos\varphi^2 + A^2\sin\varphi^2}}. \tag{3}$$

Um insbesondere diejenige Lage der schneidenden Ebene zu finden, bei welcher die elliptischen in Kreisschnitte übergehen, müssen wir die Gl. (2) einen Kreis ausdrücken lassen und zu diesem Zwecke:

$$2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\,(A^2 - B^2) = 0,$$

$$\left(\frac{\sin\varphi^2}{A^2} + \frac{\cos\varphi^2}{B^2}\right)\cos\theta^2 - \frac{\sin\theta^2}{c^2} = \frac{\cos\varphi^2}{A^2} + \frac{\sin\varphi^2}{B^2}$$

setzen. Diese Gleichungen gestatten, so lange $A$ von $B$ verschieden, 3 Auflösungen, nämlich:

$$\theta = 90^0, \quad \frac{\cos\varphi^2}{A^2} + \frac{\sin\varphi^2}{B^2} + \frac{1}{c^2} = 0,$$

$$\varphi = 90^0, \quad \sin\theta = \pm\frac{c}{B}\sqrt{\frac{B^2 - A^2}{c^2 + A^2}},$$

$$\varphi = 0 \quad \sin\theta = \pm\frac{c}{A}\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{c^2 + B^2}},$$

von welchen aber die beiden ersten unzulässig sind, indem einerseits die Summe dreier positiver Grössen nicht Null sein kann, anderseits für $\varphi = 90^0$, wegen $B < A$, $\sin\theta$ imaginär wird. Hingegen ist der für $\varphi = 0$ folgende Werth von $\sin\theta$ immer reell und $< 1$; es gibt somit des doppelten Zeichens wegen zwei Systeme von parallelen Ebenen, welche den elliptischen Kegel in Kreisen schneiden. Sie sind sämmtlich wegen $\varphi = 0$ parallel zur Axe der $x$, d. h. zur grossen Axe der elliptischen Basis des Kegels. Der elliptische Kegel kann daher auch auf zweifache Weise als schiefer Kreiskegel betrachtet werden.

Für $A = B = r$ geht der elliptische Kegel in einen geraden Kreiskegel über. Die Gl. (2) des Kegelschnittes verwandelt sich in:

$$(c^2\cos\theta^2 - r^2\sin\theta^2)\, y'^2 + c^2 x'^2 - 2\gamma\sin\theta.\, y' - \gamma^2 = 0,$$

und derselbe ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem $\operatorname{tg}\theta <, >$ oder $= \frac{c}{r}$, oder je nachdem $\theta <, >$ oder $= 90^0 - \alpha$ ist, wenn man mit $\alpha$ den halben Scheitelwinkel des Kegels bezeichnet und beachtet, dass $\frac{c}{r} = \operatorname{cotg}\alpha$. Die Linien zweiter Ordnung entstehen daher durch ebene Schnitte des geraden Kreiskegels, worin die Benennung derselben, Kegelschnittslinien, ihren Grund hat.

## VON DEN ROTATIONSFLAECHEN.

**278.** Denkt man sich irgend eine Linie von einfacher oder doppelter Krümmung (die erzeugende Curve) mit einer der Lage nach gegebenen Geraden fest verbunden, und um letztere als Axe herumgedreht, so beschreibt die rotirende Curve eine Fläche, welche Rotations- oder Umdrehungsfläche genannt wird.

Aus dieser Erzeugungsart erhellt sogleich, dass eine solche Fläche durch Ebenen, welche senkrecht auf der Axe stehen, in Kreisen geschnitten wird; man pflegt diese Kreise Parallelkreise zu nennen. Alle Ebenen hingegen, welche durch die Axe gelegt werden, schneiden

die Rotationsfläche in congruenten ebenen Curven, welche Meridiane heissen. Es ist klar, dass, wie auch immer die Curve beschaffen sein mag, durch deren Umdrehung die Fläche entstanden ist, einer der Meridiane deren Stelle als erzeugende Curve vertreten kann.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass man sich die Rotationsflächen auch durch die Bewegung eines Kreises entstanden denken kann, dessen Ebene immer senkrecht bleibt auf der Rotationsaxe, dessen Mittelpunkt auf eben dieser Axe fortrückt, und dessen Halbmesser sich stetig so verändert, dass der Kreis eine gegebene Curve (bei der früheren Erzeugungsweise die rotirende Curve) beständig schneide. Hier übernimmt der bewegliche Kreis die Rolle der erzeugenden Curve, die rotirende Curve jene einer festen Leitlinie oder Directrix. Wir wollen diese letztere Erzeugungsweise zur Ableitung der allgemeinen Gleichung der Rotationsflächen benützen.

Es seien $x_0$, $y_0$, $z_0$ die Coordinaten eines Punktes der Rotationsaxe; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ihre Neigungswinkel gegen die Coordinatenaxen, welche 6 Grössen die Lage der Rotationsaxe bestimmen und als gegeben vorausgesetzt werden. Die Gleichungen des erzeugenden Kreises in irgend einer Lage desselben seien:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2, \tag{1}$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p, \tag{2}$$

von welchen die 1^te^ einer aus dem Punkte $x_0$, $y_0$, $z_0$ mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kugel, die 2^te^ einer Ebene angehört, welche in dem Abstande $=p$ vom Ursprunge auf der Rotationsaxe senkrecht steht, und wo offenbar $r$ eine Funktion von $p$ sein muss, damit der durch den Schnitt der Kugel mit der Ebene entstehende Kreis die gegebene Leitlinie schneide. Setzen wir also

$$r^2=\varphi(p), \tag{3}$$

so werden die Gleichungen des erzeugenden Kreises:

$$\left.\begin{aligned}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2&=\varphi(p),\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma&=p,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

aus welchen man durch Elimination von $p$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\varphi(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma) \tag{5}$$

als die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen erhält.

Die Form der Funktion $\varphi$ hängt von der Natur der Leitlinie ab, und bestimmt sich auf die bekannte Weise, indem man aus den Gleichungen derselben in Verbindung mit den obigen (1) und (2), $x$, $y$, $z$ eliminirt, wodurch man zur Gl. (3) gelangt, aus welcher sodann noch mit Hülfe von (1) und (2) die Grössen $r$ und $p$ zu eliminiren sind, um die Gl. der Rotationsfläche zu erhalten.

In den meisten Fällen ist die rotirende Curve eine ebene Curve, in deren Ebene die Rotationsaxe liegt, also mit den Meridianen identisch; lässt man dann noch die Rotationsaxe mit einer der Coordinatenaxen zusammenfallen, so werden die Gleichungen einfacher. Man kann dann den Ursprung als den Punkt $x_0$, $y_0$, $z_0$ annehmen, wodurch — die Axe der $z$ als Rotationsaxe vorausgesetzt — die Gleichungen des beweglichen Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = p \tag{6}$$

werden. Durch Substitution dieser Werthe in die Gl. (3) erhält man:

$$x^2 + y^2 = \varphi(z) \text{ oder } z = f(x^2 + y^2) \tag{7}$$

als allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, deren Axe mit der Axe der $z$ zusammenfällt. — Nimmt man sodann die Leitlinie, durch deren Rotation die Fläche entsteht, in der Ebene der $xz$ an, was immer möglich, so sind ihre Gleichungen:

$$F(x, z) = 0, \quad y = 0, \tag{8}$$

und man erhält wieder, wie oben durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus (6) und (8) die Gl. (3), in welcher sofort für $p$ und $r^2$ ihre Werthe aus (6) zu setzen sind, um zur Gl. der Rotationsfläche zu gelangen. Diese Elimination kann übrigens hier leicht allgemein ausgeführt werden. Mit dem Werthe $y = 0$ aus (8) gibt die 1^te der Gl. (6): $x = \pm r$, welcher Werth sammt jenem $z = p$ in die 1^te der Gl. (8) substituirt: $F(\pm r, p) = 0$ liefert. Substituirt man in diese Gl. für $p$ und $r$ die Werthe aus (6), so hat man:

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{9}$$

als Gl. der gesuchten Rotationsfläche, welche — wie man sieht — unmittelbar aus jener: $F(x, z) = 0$ des in der $xz$-Ebene liegenden Meridians hervorgeht, wenn man in derselben $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ statt $x$, oder $x^2 + y^2$ statt $x^2$ schreibt.

**279.** Beisp. 1. Die erzeugende Curve sei eine Ellipse, deren kleine Axe $2b$, zugleich Rotationsaxe, in der Axe der $z$, deren grosse Axe $2a$ in der Axe der $x$ liegt; die Gleichungen derselben sind $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $y = 0$; und man hat daher:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

als Gl. der Fläche, welche durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht und abgeplattetes Rotations-Ellipsoid (Sphäroid) genannt wird. Durch Vertauschung von $b$ mit $a$ erhält man die Gl. des gestreckten Rotations-Ellipsoides, welches durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe $= 2a$ entsteht. Für $a = b$ geht die Ellipse

in einen Kreis über, und die Gl. des Ellipsoides verwandelt sich in $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, welche einer Kugel vom Halbmesser $a$ angehört.

Beisp. 2. Die erzeugende Curve sei eine Hyperbel, deren erste Axe $= 2a$ mit der Rotationsaxe der $z$, die 2te Axe mit der Axe der $x$ zusammenfält; ihre Gleichungen sind daher $\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = -1$, $y = 0$; und man hat:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = -1 \qquad (2)$$

als Gl. der erzeugten Umdrehungsfläche, welche Rotations-Hyperboloid mit zwei Hölungen genannt wird, weil die Fläche aus zwei getrennten Theilen besteht.

Lässt man die zweite Axe mit der Drehungsaxe zusammenfallen, so kommt:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche den Namen Rotations-Hyperboloid mit einer Hölung führt.

Beisp. 3. Die Gleichungen einer in der $xz$-Ebene liegenden Parabel, deren Scheitel mit dem Ursprunge, deren Axe mit der Rotationsaxe der $z$ zusammenfällt, sind $x^2 = pz$, $y = 0$; man hat also:

$$x^2 + y^2 = pz \qquad (4)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche Rotationsparaboloid genannt wird.

Beisp. 4. Um die Axe der $z$ drehe sich eine Gerade, welche in dem Abstande $= a$ vom Ursprunge die $x$-Axe senkrecht schneidet, und mit der $xy$-Ebene nach der positiven Seite der $y$ hin den Winkel $\alpha$ einschliesst; die Gleichungen dieser Geraden sind daher $x = a$, $y = z \operatorname{cotg} \alpha$. Da hier die Erzeugende mit der Rotationsaxe nicht in derselben Ebene liegt, so haben wir diese Gleichungen mit jenen (6) [§. 278]: $x^2 + y^2 = r^2$, $z = p$ zu verbinden, und erhalten durch Elimination von $x, y, z$ : $r^2 = p^2 \operatorname{cotg} \alpha^2 + a^2$, und hieraus nach Wiederherstellung der Werthe von $r$ und $p$: $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{cotg} \alpha^2 + a^2$, oder:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2 \operatorname{tg} \alpha^2} = 1 \qquad (5)$$

als Gl. der erzeugten Fläche, welche sonach ein Rotationshyperboloid mit einer Hölung ist, dessen halbe 1te Axe $= a$, und halbe 2te Axe $b = a \operatorname{tg} \alpha$ ist. Da in (5) $\operatorname{tg} \alpha$ blos im Quadrate vorkommt, so entsteht dieselbe Fläche, wenn die rotirende Gerade gegen die $xy$-Ebene unter dem Winkel $180^0 - \alpha$ geneigt ist.

Aus dem Umstande, dass das Rotationshyperboloid mit einer Hölung durch Bewegung einer Geraden — und zwar auf doppelte Weise — erzeugt werden kann, folgt umgekehrt, dass auf dieser krummen Fläche unendlich viele Gerade gezogen werden können, deren jede im Endpunkte eines Halbmessers des kleinsten Parallelkreises auf diesem Halbmesser senkrecht steht, und gegen die Ebene dieses Kreises unter einem Winkel geneigt ist, welcher die Grösse $\pm \frac{b}{a}$ zur trigonometrischen Tangente hat.

### VON DEN WINDSCHIEFEN FLAECHEN.

**280.** Jede Fläche, welche durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, heisst eine geradlinige Fläche oder Regelfläche. Zu diesen gehören also z. B. die Cylinder- und Kegelflächen. Während aber bei diesen Flächen, wie aus der Entstehungsweise derselben sogleich erhellt, durch je zwei aufeinander folgende Lagen der erzeugenden Geraden eine Ebene gelegt werden kann, ist dies bei anderen Regelflächen nicht der Fall, und die Flächen der letzteren Art, welche also durch eine Gerade erzeugt werden, die sich so bewegt, dass je zwei aufeinanderfolgende Lagen derselben nicht in einer Ebene liegen, führen im Allgemeinen den Namen windschiefe Flächen. Ein Beispiel dieser Art haben wir schon an dem Rotationshyperboloide mit einer Hölung kennen gelernt.

Nach den in §. 272 entwickelten Gründen können wir die Gleichungen der erzeugenden Geraden in der Form:

$$x = az + \varphi(a); \quad y = \psi(a) . z + \chi(a)$$

annehmen; das System dieser beiden Gleichungen stellt jede geradlinige Fläche dar, deren Gleichung man durch Elimination von $a$ erhält, sobald die Funktionen $\varphi$, $\psi$ und $\chi$ gegeben sind, welche das Gesetz der Bewegung der Geraden bestimmen. Hiezu werden also drei von einander unabhängige Bedingungen erfordert, welche übrigens mannigfaltig sein können; einige hieher gehörige allgemeinere Aufgaben sind folgende.

I. Eine gerade Linie bewege sich so, dass sie stets drei gegebene Linien schneide, von denen eine eine Gerade sein soll.

Nehmen wir der Einfachheit halber, die gegebene gerade Leitlinie als Axe der $z$, so können wir die erzeugende Gerade durch die Gleichungen

$$y = ax, \quad mx + nz = 1$$

darstellen, in welcher Form sie bereits die Bedingung enthalten, dass diese Gerade die Axe der $z$ stets schneide, und wo $a$, $m$, $n$ drei veränderliche Parameter bezeichnen [§. 272]. Nehmen wir $a$ als den willkürlichen, und setzen $m = \varphi(a)$, $n = \psi(a)$, so können wir die Gleichungen der Erzeugenden auch in der Form: $y = ax$, $x.\varphi(a) + z.\psi(a) = 1$ darstellen, aus welchen durch Elimination von $a$:

$$x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z.\psi\left(\frac{y}{x}\right) = 1$$

als die allgemeine Form der Gleichung einer auf diesem Wege erzeugten Fläche folgt. Die beiden willkürlichen Funktionen $\varphi$ und $\psi$ lassen sich auf dem im §. 272 angegebenen Wege finden, sobald die Gleichungen der beiden anderen Leitlinien gegeben sind.

II. Wenn die erzeugende Gerade stets an einer geraden Leitlinie fortgleitet und dabei einer gegebenen Ebene (Richtebene) beständig parallel bleibt, so nennt man die so entstehende windschiefe Fläche conoidische Fläche oder Conoid.

Nehmen wir die Richtebene zur $xy$-Ebene, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden:

$$z = c, \quad y = \varphi(c).x + \psi(c), \tag{1}$$

wo $\varphi$ und $\psi$ zwei willkürliche Funktionen bedeuten, deren eine sich dadurch bestimmt, dass die Erzeugende die gerade Leitlinie, deren Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{2}$$

sein mögen, stets schneiden soll. Durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus (1) und (2) erhält man hiefür die Bedingungsgleichung:

$$bc + \beta = (ac + \alpha)\,\varphi(c) + \psi(c) \tag{3}$$

und endlich, indem man aus (1) und (3) $\psi(c)$ und $c$ eliminirt:

$$y - bz - \beta = \varphi(z)\,(x - az - \alpha),$$

oder $$\varphi(z) = \frac{y - bz - \beta}{x - az - \alpha}$$

oder $$z = f\left(\frac{y - bz - \beta}{x - az - \alpha}\right) \tag{4}$$

als allgemeine Gleichungsform der conoidischen Flächen.

Steht die gerade Leitlinie auf der Richtebene senkrecht, so wird $a = b = 0$ und die Richtlinie kann jetzt als Axe der $z$ angenommen werden, wodurch auch $\alpha = \beta = 0$ wird und die Gl. (4) sich in

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

verwandelt. Man pflegt solche Conoide gerade Conoide zu nennen. Die Form der Funktion $f$ in (4) oder (5) bestimmt sich, wenn noch

eine Bedingung, z. B. eine zweite Leitlinie gegeben wird, welcher die erzeugende Gerade folgen soll.

Beispiel. Es sei diese zweite Leitlinie ebenfalls eine Gerade und $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ ihre Gleichungen. Jene der erzeugenden Geraden, welche durch die Axe der $z$ gehend zur $xy$-Ebene parallel sich bewegt, sind $z = c$, $y = x \cdot \varphi(c)$ . . $(m)$, und wir erhalten durch Elimination von $x$, $y$, $z$ aus diesen 4 Gleichungen: $bc + \beta = (ac + \alpha) \cdot \varphi(c)$, folglich, wenn man aus dieser und den Gl. $(m)$ $c$ und $\varphi(c)$ eliminirt:

$$ayz - bxz + \alpha y - \beta x = 0,$$

die Gleichung der gesuchten Fläche zweiter Ordnung (hyperbolisches Paraboloid), auf welche wir im nächsten Capitel zurückkommen.

Zu den conoidischen Flächen gehört auch die Schraubenfläche, welche wir noch besonders betrachten wollen.

**281.** Schraubenlinie und Schraubenfläche. Wenn ein gegebener Winkel $BAC = \alpha$, Fig. (13), um einen geraden Cylinder von kreisförmiger Basis so herumgewickelt wird, dass der eine Schenkel $AC$ die Erzeugungslinien des Cylinders unter einem rechten Winkel schneidet, so erzeugt der andere Schenkel eine Curve auf der Cylinderfläche, welche Schraubenlinie genannt wird.

Um die Gleichungen dieser Curve zu finden, nehmen wir die Axe des Cylinders als Axe der $z$ und legen die Axe der $x$ durch jenen Punkt $A$ der Schraubenlinie, in welchem sie die Ebene der $xy$ schneidet. Sei $M$ ein beliebiger Punkt der Curve, $MP = z$, $PQ = y$, $OQ = x$ dessen Coordinaten, $r$ der Halbmesser des Cylinders und $\angle AOP = \varphi$, so ist:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r\varphi \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

indem, wie aus der Entstehung der Curve leicht erhellt, $z = MP = RQ = M'P' = AP' \operatorname{tg} \alpha$, und $AP' = \operatorname{arc} AP = r\varphi$ ist. Aus der letzten Gl. folgt $\varphi = \frac{z}{r \operatorname{tg} \alpha}$, womit die beiden ersteren in

$$x = r \cos \frac{z}{r \operatorname{tg} \alpha}, \quad y = r \sin \frac{z}{r \operatorname{tg} \alpha} \tag{2}$$

übergehen. Diess sind die Gleichungen der Schraubenlinie, und zwar ihrer Projectionen auf die Ebenen der $xz$ und $yz$. Quadrirt und addirt man dieselben, so erhält man

$$x^2 + y^2 = r^2$$

als Gleichung der Projection auf die Ebene der $xy$.

Der Winkel $\alpha$ heisst der Steigungswinkel der Schraubenlinie. Für zwei Punkte der Curve, welche den Werthen $\varphi$ und $\varphi + 2\pi$ ent-

sprechen, folglich in einer und derselben erzeugenden Geraden des Cylinders liegen und um einen Schraubenumgang von einander entfernt sind, hat man $z = r\varphi \operatorname{tg} \alpha$ und $z' = r(\varphi + 2\pi) \operatorname{tg} \alpha$, deren Differenz $z' - z = 2r\pi \operatorname{tg} \alpha = h$ die sogenannte Höhe eines Schraubenganges bestimmt. Durch Einführung dieser Grösse nehmen die Gl. (2) die Form an:

$$x = r \cos \frac{2\pi z}{h}, \quad y = r \sin \frac{2\pi z}{h}. \qquad (3)$$

Die Schraubenfläche entsteht durch die Bewegung einer Geraden, welche an der Schraubenlinie fortgleitet und dabei die Axe derselben stets senkrecht schneidet.

Fällt, der früheren Annahme gemäss, die Schraubenaxe mit der Axe der $z$ zusammen, so sind $z = c$, $y = x \cdot \varphi(c)$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden, welche mit den Gl. (2) oder (3) der Leitlinie verbunden, die Bedingungsgleichung: $\varphi(c) = \operatorname{tg} \frac{c}{r \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \frac{2\pi c}{h}$ liefern; eliminirt man aus dieser und den Gl. der erzeugenden Geraden $c$ und $\varphi(c)$, so erhält man als Gleichung der Schraubenfläche:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{r \operatorname{tg} \alpha}, \quad \text{oder } \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{h}. \qquad (4)$$

---

## VIERTES KAPITEL.

### VON DEN FLAECHEN DER ZWEITEN ORDNUNG.

**282.** Die allgemeinste Form einer Gleichung des $2^{\text{ten}}$ Grades zwischen drei veränderlichen Coordinaten ist:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F \end{aligned}\right\} = 0, \qquad (1)$$

und wir wollen uns nun mit der Untersuchung beschäftigen, welche Flächen überhaupt durch diese Gleichung dargestellt werden können. Zu diesem Zwecke müssen wir die Gleichung auf eine einfachere Form bringen, was durch Transformation der Coordinaten bewerkstelliget werden kann, in ähnlicher Weise, wie diess bei den Linien $2^{\text{ter}}$ Ordnung geschehen ist. Wir setzen voraus, dass die Gl. (1) sich auf ein recht-

winkliges Coordinatensystem beziehe, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung für unseren Zweck nicht beeinträchtiget wird, da der Grad der Gleichung durch den Uebergang von einem schiefwinkligen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem nie, und auch die Form der Gleichung nicht geändert wird, so lange die Lage des letzteren unbestimmt bleibt.

**283.** Mittelpunkt der Flächen. Nach dem am Schlusse des §. 270 bewiesenen Satze kann eine Fläche 2ten Grades in nicht mehr als zwei Punkten von einer Geraden geschnitten werden. Das von den beiden Durchschnittspunkten begrenzte Stück der Geraden heisst eine Sehne oder Chorde der Fläche.

Unter Mittelpunkt oder Centrum der Fläche versteht man einen solchen Punkt, welcher jede durch ihn gezogene Sehne halbirt.

Denken wir uns den Mittelpunkt einer Fläche als Ursprung des Coordinatensystemes, und durch denselben eine Gerade gezogen, welche die Fläche in den Punkten $M$ und $M'$ schneidet, so liegen der gemachten Voraussetzung zufolge diese beiden Punkte der Fläche auf entgegengesetzten Seiten des Ursprunges und in gleicher Entfernung von demselben. Bezeichnet man demnach mit $x'$, $y'$, $z'$ die Coordinaten von $M$, so sind offenbar $-x'$, $-y'$, $-z'$ jene von $M'$ und die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$, bezogen auf ihren Mittelpunkt als Ursprung, muss durch diese beiden Systeme von Werthen der Coordinaten erfüllt werden. Da aber dasselbe für jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne statt findet, so wird die eben genannte Gl. der Fläche die Eigenschaft haben, sich nicht zu ändern, wenn man darin $-x$, $-y$, $-z$ an die Stelle von $x$, $y$, $z$ treten lässt, wozu erfordert wird, dass in derselben nur Glieder der 2ten Dimension in Bezug auf $x$, $y$, $z$ vorkommen.

Hieraus folgt, dass die Gl. (1) eine einfachere Form erhalten wird, wenn man den Mittelpunkt als Ursprung wählt, vorausgesetzt, dass ein solcher existirt, indem dadurch jene drei Glieder aus der Gleichung verschwinden müssen, welche nach $x$, $y$, $z$ vom 1ten Grade (linear) sind.

**284.** Untersuchen wir nun, ob den Flächen 2ten Grades ein Mittelpunkt zukomme. Verlegen wir den Ursprung in den noch unbestimmten Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und substituiren zu diesem Zwecke in (1): $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ an die Stelle von $x$, $y$, $z$, so erhalten wir als transformirte Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz \\ + 2(A\xi + B\eta + B'\zeta + C)x \\ + 2(A'\eta + B\xi + B''\zeta + C')y \\ + 2(A''\zeta + B'\xi + B''\eta + C'')z \end{aligned}\right\} = H,$$

wo der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} -H = A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 + 2B\xi\eta + 2B'\xi\zeta + 2B''\eta\zeta \\ + 2C\xi + 2C'\eta + 2C''\zeta + F \end{aligned}$$

gesetzt ist. Bestimmen wir nun die Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ so, dass

$$A\xi + B\eta + B'\zeta + C = 0 \qquad (2)$$

$$A'\eta + B\xi + B''\zeta + C' = 0 \qquad (3)$$

$$A''\zeta + B'\xi + B''\eta + C'' = 0 \qquad (4)$$

werde, wodurch aus der transformirten Gleichung die Glieder der ersten Dimension wegfallen und somit die Bedingung ausgedrückt wird, dass der neue Ursprung Mittelpunkt der Fläche sei, so verwandelt sich obige Gleichung in die einfachere:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz = H, \qquad (5)$$

wobei wir noch bemerken, dass mit Hülfe der Gleichungen (2), (3), (4) die Grösse $H$ leicht auf den einfacheren Ausdruck:

$$H = -C\xi - C'\eta - C''\zeta - F \qquad (5^*)$$

gebracht werden kann.

Die Existenz eines Mittelpunktes, und somit die Möglichkeit dieser Transformation hängt nun davon ab, ob aus den Gl. (2), (3), (4) endliche und bestimmte Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ folgen, oder nicht.*) Durch Auflösung dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\xi = \frac{V}{\varDelta}, \quad \eta = \frac{V'}{\varDelta}, \quad \zeta = \frac{V''}{\varDelta}, \qquad (6)$$

wo

$$\begin{aligned} V &= C(A'A'' - B''^2) + C'(B'B'' - A''B) + C''(BB'' - A'B') \\ V' &= C'(AA'' - B'^2) + C(B'B'' - A''B) + C''(BB' - AB'') \\ V'' &= C''(AA' - B^2) + C(BB'' - A'B') + C'(BB' - AB'') \end{aligned}$$

$$\varDelta = AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - AA'A'' - 2BB'B''. \qquad (7)$$

Ist nun:

1) die Grösse $\varDelta$ von 0 verschieden, so ergibt sich aus (6) für jede der Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ein endlicher und bestimmter Werth; die Fläche hat in diesem Falle einen Mittelpunkt, und die Gleichung der Fläche nimmt die Form (5) an, wenn man den Ursprung in diesen Mittelpunkt verlegt.

---

*) Die Polynome dieser 3 Gleichungen sind, wie man leicht findet, die im Sinne des §. 86 gebildeten 1ten derivirten Funktionen des Polynoms der Gl. (1), wenn man der Reihe nach $x$, $y$, und $z$ allein als Veränderliche betrachtet; und daher immer leicht hinzuschreiben, sobald die Gl. (1) gegeben ist.

2) Ist $\varDelta = 0$, und sind nicht gleichzeitig auch die Zähler $V'$, $V'$, $V''$ der Nulle gleich, so wird wenigstens eine der Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ unendlich und die Fläche hat in diesem Falle keinen Mittelpunkt; man kann ihn in unendlicher Entfernung liegend betrachten. Die Mittelpunktsgleichungen (2), (3), (4) müssen in diesem Falle einen Widerspruch enthalten.

3) Ist $\varDelta = 0$ und verschwinden gleichzeitig auch alle drei Zähler $V$, $V'$, $V''$, so nehmen die Ausdrücke von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; es gibt dann unendlich viele Systeme von Werthen dieser Grössen, welche den Gl. (2), (3), (4) Genüge leisten und die Fläche hat daher unendlich viele Mittelpunkte. Wir wollen diesen Fall sogleich näher erörtern, da nur bereits bekannte Gebilde in ihm enthalten sind.

Da zur Bestimmung der drei Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die 3 Gleichungen (2), (3), (4) zu Gebote stehen, so kann bekanntlich diese Unbestimmtheit nur dann eintreten, wenn dieselben nicht sämmtlich von einander verschieden sind, sondern sich nur auf zwei wesentlich verschiedene, oder gar nur auf eine einzige Gleichung reduciren.

a) Kommen die besagten Gleichungen auf zwei wesentlich verschiedene zurück, was man daraus erkennt, dass die aus zweien derselben, z. B. (2) und (3) gezogenen Werthe von $\xi$ und $\eta$ die 3^te Gleichung für jeden Werth von $\zeta$ identisch machen, so stellen dieselben eine gerade Linie dar, welche der geometrische Ort sämmtlicher Mittelpunkte der Fläche ist. Es sei $KL$ (Fig. 14) diese Gerade; legen wir durch dieselbe eine beliebige Ebene, und sei $G$ ein Punkt der Durchschnittslinie dieser Ebene und der Fläche; ziehen wir ferner in dieser Ebene durch $G$ beliebige Gerade, welche die $KL$ in den Punkten $O$, $O'$, $O''$, u. s. w. schneiden und machen $JO = OG$, $J'O' = O'G$, $J''O'' = O''G$, u. s. w., so liegen die Punkte $J$, $J'$, $J''$, u. s. w. in einer zu $KL$ parallelen Geraden und gehören zugleich der Fläche an, da jeder der Punkte $O$, $O'$, $O''$, . . . ein Mittelpunkt ist. Eben so muss aus gleichem Grunde jeder Punkt der durch $G$ parallel zu $KL$ gezogenen Geraden ein Punkt der Fläche sein; hieraus folgt, dass jede durch $KL$ gelegte Ebene unsere Fläche in zwei zu $KL$ parallelen Geraden schneidet, wodurch dieselbe als Cylinderfläche charakterisirt wird. Zugleich kann dieser Cylinder nur ein elliptischer oder hyperbolischer sein. Denn schneidet man die Fläche durch eine auf $KL$ senkrechte Ebene $UV$, so ist der Schnitt [§. 270] eine Linie zweiten Grades, welche offenbar den Punkt $S$ zum Mittelpunkte hat und somit nur eine Ellipse oder Hyperbel sein kann. Die Gleichung (1)

stellt also in diesem Falle einen elliptischen oder hyperbolischen Cylinder vor.

b) Reduciren sich aber die Gl. (2), (3), (4) auf eine einzige, was daraus erkannt wird, dass der aus einer derselben gezogene Werth von $\xi$, die beiden anderen für jeden Werth von $\eta$ und $\zeta$ identisch macht, so drücken dieselben eine Ebene aus, als geometrischen Ort sämmtlicher Mittelpunkte der Fläche (1), und diese selbst ist in diesem Falle nichts anderes, als ein System zweier zur Mittelpunktsebene paralleler Ebenen. — In der That, sei $G$ (Fig. 15) irgend ein Punkt der Fläche (1), verbinden wir denselben mit einem beliebigen Punkte $O$ der Mittelpunktsebene $MN$, und verlängern wir $GO$ um das Stück $OJ = OG$, so ist offenbar ein jeder Punkt der durch $J$ parallel zur Mittelpunktsebene gelegten Ebene ein Punkt des durch Gl. (1) repräsentirten geometrischen Ortes, weil die Verbindungslinie eines jeden Punktes dieser Ebene mit dem Punkte $G$ von der Mittelpunktsebene halbirt wird; dasselbe lässt sich nun — von dem Punkte $J$ ausgehend — von der durch $G$ parallel zur Mittelpunktsebene gelegten Ebene erweisen. Dass endlich kein Punkt ausserhalb dieser beiden Ebenen der Gl. (1) genügen könne, erhellt daraus, dass ein geometrischer Ort $2^{ter}$ Ordnung von einer Geraden nicht in mehr als 2 Punkten geschnitten werden kann. Die Gl. (1) stellt also in diesem Falle ein System zweier paralleler Ebenen dar, und muss sich in zwei rationale Faktoren des $1^{ten}$ Grades zerlegen lassen.

Da hiernach der $3^{te}$ Fall keine neuen geometrischen Gebilde darbietet, und übrigens die in demselben begriffenen (elliptischer und hyperbolischer Cylinder, System zweier parallelen Ebenen) auch als Varietäten der mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen betrachtet werden können, so theilen wir die Flächen $2^{ten}$ Grades in zwei Classen ein, von welchen die $1^{te}$ die mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen umfasst, die $2^{te}$ diejenigen Flächen begreift, welche eines solchen ermangeln.

Nur bei ersteren ist die in diesem §. ausgeführte Transformation zulässig; ein anderes auf alle Flächen anwendbares Mittel zur Vereinfachung dieser Gleichung werden wir im Folgenden kennen lernen.

**285.** Diametral-Ebenen. Denken wir uns in einer beliebigen krummen Fläche eine Schaar paralleler Sehnen gezogen, so nennt man den geometrischen Ort der Halbirungspunkte derselben eine Diametral-Fläche. Die Diametralflächen von Flächen des $2^{ten}$ Grades können, wie wir sogleich sehen werden, nur Ebenen sein. Nimmt man nun eine solche Diametralebene als Ebene der $xy$ und die Axe der $z$ parallel mit den zugehörigen Sehnen, (wobei also im Allgemeinen

ein schiefwinkliges Coordinatensystem zu Stande kommt), so werden zu irgend einem Werthe $x = OR$ und $y = RP$ (Fig. 16) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von $z: PM$ und $PM'$ gehören, und es ist klar, dass die Gleichung der Fläche, auf ein solches Coordinatensystem bezogen, in Bezug auf $z$ rein quadratisch sein, also kein Glied enthalten wird, in welchem $z$ in der 1ten Potenz vorkommt. Hiedurch ist nun ein zweites Mittel zur Vereinfachung der Gl. (1) geboten, welches den Vorzug hat, auf alle Flächen anwendbar zu sein; übrigens werden wir, um den Vortheil, mit rechtwinkligen Coordinaten zu rechnen, nicht zu verlieren, uns nach solchen Diametral-Ebenen umzusehen haben, welche von den zugehörigen Sehnen rechtwinklig geschnitten und Haupt-Ebenen genannt werden.

Suchen wir zuvörderst die zu einer gegebenen Folge paralleler Sehnen gehörige Diametralebene. Es seien:

$$x = mz + p, \quad y = nz + q \tag{8}$$

die Gleichungen einer dieser Sehnen, in welchen $m$ und $n$ gegebene, die Richtung der Sehnen bestimmende Grössen sind, während $p$ und $q$ von einer Sehne zur anderen sich ändern. Verbinden wir dieselben mit der auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Gl. (1) der Fläche 2ter Ordnung, so erhalten wir durch Elimination von $x$ und $y$ zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichung:

$$Pz^2 + 2Qz + R = 0, \tag{9}$$

in welcher:

$$P = Am^2 + A'n^2 + A'' + 2(B''n + B'm + Bmn),$$
$$Q = Amp + A'nq + B''q + B'p + B(np + mq) + Cm + C'n + C'',$$
$$R = Ap^2 + A'q^2 + 2Bpq + 2Cp + 2C'q + F,$$

ist. Bezeichnen wir ferner mit $X$, $Y$, $Z$ die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne (8), so ist, wenn $z_1$, $z_2$ die beiden Wurzeln der Gl. (9) sind, $Z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = -\frac{Q}{P}$; folglich:

$$Z = -\frac{Amp + A'nq + B''q + B'p + B(np + mq) + Cm + C'n + C''}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2(B''n + B'm + Bmn)}$$
$$Y = nZ + q, \quad X = mZ + p.$$

Eliminiren wir endlich aus diesen 3 Gleichungen die Grössen $p$ und $q$, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}(Am+B'+Bn)X+(A'n+B''+Bm)Y+(A''+B''n+B'm)Z\\ +(Cm+C'n+C'')\end{aligned}\right\} = 0 \tag{10}$$

als Gleichung der gesuchten Diametral-Fläche, welche somit, in Folge der nach $X$, $Y$, $Z$ linearen Form dieser Gleichung, eine Ebene ist.

Da die Coefficienten von $X$, $Y$, $Z$ und das constante Glied in (10) für jeden reellen Werth von $m$ und $n$ reell sind, so entspricht im Allgemeinen jeder Folge paralleler Sehnen eine (conjugirte) Diametral-Ebene, und jede Fläche 2ter Ordnung lässt daher unendlich viele Diametral-Ebenen zu.

Nach $m$ und $n$ geordnet, nimmt (10) folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l}(AX+BY+B'Z+C)m+(A'Y+BX+B''Z+C')n\\ \qquad +A''Z+B'X+B''Y+C''\end{array}\right\}=0 \qquad (11)$$

und wird augenscheinlich identisch, wenn man darin für $X$, $Y$, $Z$ die aus den Gl. (2), (3), (4) folgenden Werthe der Mittelpunktscoordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ substituirt. Hieraus folgt, dass bei jenen Flächen, welchen ein Mittelpunkt zukommt, jede Diametral-Ebene durch diesen Punkt geht.

Die Durchschnittslinie zweier Diametral-Ebenen heisst ein Durchmesser der Fläche.

**286.** Hauptebenen. So nennt man jene Diametral-Ebenen, welche ihren conjugirten Sehnen unter einem rechten Winkel begegnen. Es folgt aus diesem Begriffe, dass jede Hauptebene die Fläche in zwei symmetrische Hälften theilt.

Damit die Diametral-Ebene (10) die zugehörigen Sehnen, deren eine durch die Gl. (8) dargestellt wird, senkrecht schneide, müssen [§. 257, Gl. (3)] die Bedingungsgleichungen:

$$m=\frac{Am+B'+Bn}{A''+B''n+B'm},\quad n=\frac{A'n+B''+Bm}{A''+B''n+B'm}$$

erfüllt werden. Aus diesen Gleichungen würde sich $m$ und $n$, und hiemit die Richtung jenes Systems paralleler Sehnen finden lassen, welche die conjugirte Diametral-Ebene senkrecht treffen, welche Richtung wir Hauptrichtung nennen wollen.

Zweckmässiger ist jedoch folgendes Verfahren. Setzen wir den Nenner:

$$A''+B''n+B'm=s,$$

wo $s$ als eine neue noch unbekannte Hülfsgrösse zu betrachten ist, so treten an die Stelle der beiden letzten Gleichungen folgende drei:

$$\left.\begin{array}{l}(A-s)\,m+Bn+B'=0\\ (A'-s)\,n+Bm+B''=0\\ A''-s\quad+B'm+B''n=0,\end{array}\right\} \qquad (12)$$

aus welchen man die Werthe von $s$, $m$, $n$ auf folgendem Wege findet.

Dividiren wir die 1[te] dieser Gleichungen durch $BB'$, addiren zu beiden Seiten $\frac{m}{B''}$, und setzen Kürze halber:

$$K = \frac{m}{B''} + \frac{n}{B'} + \frac{1}{B}, \tag{13}$$

so kommt:

$$(A - s)\frac{m}{BB'} - \frac{m}{B''} = -K,$$

oder

$$\left(A - s - \frac{BB'}{B''}\right)\frac{m}{BB'} = -K.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus der 2[ten] und 3[ten] der Gl. (12):

$$\left(A' - s - \frac{BB''}{B'}\right)\frac{n}{BB''} = -K,$$

$$\left(A'' - s - \frac{B'B''}{B}\right)\frac{1}{B'B''} = -K.$$

Setzt man nun:

$$L = A - \frac{BB'}{B''}, \quad M = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad N = A'' - \frac{B'B''}{B}, \tag{14}$$

so erhält man aus den drei letzten Gleichungen:

$$m = \frac{K \,.\, BB'}{s - L}, \quad n = \frac{K \,.\, BB''}{s - M}, \quad 1 = \frac{K \,.\, B'B''}{s - N}.$$

Die zwei ersten dieser Gleichungen, durch die 3[te] dividirt, geben:

$$m = \frac{B}{B''} \cdot \frac{s - N}{s - L}, \quad n = \frac{B}{B'} \cdot \frac{s - N}{s - M}. \tag{15}$$

Werden aber dieselben drei Gleichungen der Reihe nach durch $B''$, $B'$, $B$ dividirt und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (13):

$$1 = \frac{BB'}{B''(s - L)} + \frac{BB''}{B'(s - M)} + \frac{B'B''}{B(s - N)}, \tag{16}$$

welche Gleichung durch Multiplikation mit $(s - L)(s - M)(s - N)$ und Division mit $BB'B''$ die Form:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{BB'B''}(s - L)(s - M)(s - N) - \frac{1}{B''^2}(s - M)(s - N) \\ \quad - \frac{1}{B'^2}(s - L)(s - N) - \frac{1}{B^2}(s - L)(s - M) \end{array}\right\} = 0 \tag{17}$$

annimmt, und endlich wenn man entwickelt, und die Werthe von $L$, $M$, $N$ substituirt, in folgende sich verwandelt:

$$\left.\begin{array}{r} s^3 - s^2(A+A'+A'') - s(B^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B''^2 - A'A'') \\ +(AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - AA'A'' - 2BB'B'') \end{array}\right\} = 0, \quad (18)$$

in welcher das absolute Glied die in §. 284 mit $\Delta$ bezeichnete Grösse ist. Diese Gleichung ist nun vom dritten Grade, und liefert daher mindestens einen reellen Werth von $s$, mit welchem sich aus (15) ein System reeller Werthe von $m$ und $n$ ergibt. Hieraus folgt, dass den Flächen 2ter Ordnung mindestens eine Hauptrichtung und folglich auch eine Hauptebene zukomme.

Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die drei Wurzeln der obigen, in mehrfacher Beziehung merkwürdigen, cubischen Gleichung sämmtlich reell sind. Zu diesem Zwecke ist die Form (17) am geeignetsten. Im Allgemeinen werden die Grössen $L$, $M$, $N$ von einander versc ieden sein; nehmen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an, es sei $L < M < N$, wobei man leicht bemerken wird, dass eine andere Aufeinanderfolge an der folgenden Diskussion nichts ändert. Substituirt man nun in das Polynom der Gl. (17), welches wir mit $P$ bezeichnen wollen, der Reihe nach $s = -\infty$, $L$, $M$, $N$, $+\infty$, so erhält man:

| 1) wenn $BB'B''$ positiv: | | 2) wenn $BB'B''$ negativ: | |
|---|---|---|---|
| für $s = -\infty$ : | $P = -\infty$ | für $s = -\infty$ : | $P = +\infty$ |
| „ $s = L$ | $P = -\ldots$ | „ $s = L$ | $P = -\ldots$ |
| „ $s = M$ | $P = +\ldots$ | „ $s = M$ | $P = +\ldots$ |
| „ $s = N$ | $P = -\ldots$ | „ $s = N$ | $P = -\ldots$ |
| „ $s = +\infty$ | $P = +\infty$ | „ $s = +\infty$ | $P = -\infty$ |

In beiden Fällen wird durch die in den Substitutionsresultaten erscheinenden Zeichenwechsel die Existenz dreier reeller Wurzeln nachgewiesen [§. 112]. Man sieht zugleich, dass diese Wurzeln nothwendig von einander verschieden sein müssen, so lange es die Grössen $L$, $M$, $N$ sind.

Hieraus folgt also, dass in jeder Fläche des 2ten Grades im Allgemeinen drei Hauptrichtungen und somit auch drei Hauptebenen existiren, welche ihre conjugirten Sehnen normal halbiren.

Mit Hülfe der Gl. (12) verwandelt sich die Gl. (10) einer Diametral-Ebene in:

$$mX + nY + Z + \frac{Cm + C'n + C''}{s} = 0, \quad (19)$$

die Gleichung einer Hauptebene, wenn man darin ein System zusammengehöriger Werthe von $s$, $m$, $n$ substituirt.

**287.** Bezeichnen wir mit $s_1$, $s_2$, $s_3$ die drei Wurzeln der cubischen Gleichung, mit $m_1$, $n_1$; $m_2$, $n_2$; $m_3$, $n_3$ die aus (15) folgenden entsprechenden Werthe von $m$ und $n$, welche die Hauptrichtungen bestimmen; diese Werthe von $s$, $m$, $n$ müssen, weil hervorgegangen aus der Auflösung der Gleichungen (12), diesen Gleichungen nothwendig Genüge leisten, und man hat demzufolge identisch:

$$\begin{array}{l|l} Am_1 + B' + Bn_1 = m_1 s_1 \ldots (\alpha_1) & Am_2 + B' + Bn_2 = m_2 s_2 \ldots (\beta_1) \\ A'n_1 + B'' + Bm_1 = n_1 s_1 \ldots (\alpha_2) & A'n_2 + B'' + Bm_2 = n_2 s_2 \ldots (\beta_2) \\ A'' + B''n_1 + B'm_1 = s_1 \ldots (\alpha_3) & A'' + B''n_2 + B'm_2 = s_2 \ldots (\beta_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Am_3 + B' + Bn_3 = m_3 s_3 \ldots (\gamma_1) \\ A'n_3 + B'' + Bm_3 = n_3 s_3 \ldots (\gamma_2) \\ A'' + B''n_3 + B'm_3 = s_3 \ldots (\gamma_3) \end{array}$$

Multiplicirt man $(\alpha_1)$ mit $m_2$, $(\beta_1)$ mit $m_1$ und subtrahirt, wodurch $A$ eliminirt wird, so kommt:

$$B'(m_2 - m_1) + B(m_2 n_1 - m_1 n_2) = m_1 m_2 (s_1 - s_2).$$

Eben so erhält man durch Elimination von $A'$ aus $(\alpha_2)$ und $(\beta_2)$:

$$B''(n_2 - n_1) + B(m_1 n_2 - m_2 n_1) = n_1 n_2 (s_1 - s_2),$$

endlich durch Elimination von $A''$ aus $(\alpha_3)$ und $(\beta_3)$:

$$B''(n_1 - n_2) + B'(m_1 - m_2) = s_1 - s_2;$$

durch Addition dieser drei Gleichungen folgt:

$$(s_1 - s_2)(m_1 m_2 + n_1 n_2 + 1) = 0.$$

Da nun im Allgemeinen $s_1$ und $s_2$ von einander verschieden sein werden, so muss in Folge der letzten Gleichung:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + 1 = 0$$

sein, welche Gleichung ausspricht, dass die zwei Hauptrichtungen, welche durch die Grössen $m_1$, $n_1$ und $m_2$, $n_2$ bestimmt sind, auf einander senkrecht stehen [§. 256, Gl. (6)]. Zu demselben Ergebnisse führt die Verbindung der Systeme $(\alpha)$ und $(\gamma)$, $(\beta)$ und $(\gamma)$ in Bezug auf die 3[te] Hauptrichtung, woraus folgt, dass bei den Flächen 2[ter] Ordnung die drei Hauptrichtungen und folglich auch die drei Hauptebenen auf einander senkrecht stehen.

**288.** Diese Ergebnisse erleiden einige Modificationen, wenn die Gl. (17) wiederholte Wurzeln besitzt, oder wenn eine oder mehrere ihrer Wurzeln der Nulle gleich sind.

Wiederholte Wurzeln können bekanntlich nur auftreten, wenn die Grössen $L$, $M$, $N$ nicht sämmtlich von einander verschieden sind. Ist nun $L = M$, so geht (17) über in:

$$(s - L)\left[\frac{(s-M)(s-N)}{BB'B''} - \frac{s-N}{B''^2} - \frac{s-N}{B'^2} - \frac{s-M}{B^2}\right] = 0;$$

eine ihrer Wurzeln ist also dann $s = L$; die beiden anderen ergeben sich, wenn man den Faktor in den eckigen Klammern $= 0$ setzt, und werden im Allgemeinen sowohl von $L$ als unter sich verschieden sein. Ist aber $L = M = N$, so lässt sich aus obiger Gleichung ein Faktor $s - M = s - N = s - L$ nochmals sondern, welcher eine 2^te^ Wurzel $s = L$ liefert, während sich die 3^te^ aus der Gleichung

$$\frac{s-L}{BB'B''} - \frac{1}{B''^2} - \frac{1}{B'^2} - \frac{1}{B^2} = 0$$

d. i. $$s = L + BB'B''\left(\frac{1}{B''^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B^2}\right) \dots (\alpha)$$

ergibt. Unsere cubische Gleichung hat somit zwei gleiche Wurzeln, jede $= L$, wenn $L = M = N$ ist.

Alle drei Wurzeln können nun offenbar nur dann einander gleich werden, wenn auch die 3^te^ Wurzel $= L$ ist, wozu nach $(\alpha)$ erfordert wird, dass

$$BB'B''\left(\frac{1}{B''^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B^2}\right) = 0$$

werde, was nur für $B = B' = B'' = 0$ möglich ist. Die cubische Gleichung hat somit drei gleiche Wurzeln, wenn $L = M = N$, und $B = B' = B'' = 0$ ist.

**289.** Untersuchen wir nun den Einfluss, welchen diese besonderen Umstände auf die Lage der Hauptebenen nehmen, wobei wir zuerst voraussetzen wollen, dass keine der drei Wurzeln der Gl. (18) der Nulle gleich sei. Bei dieser Voraussetzung muss das absolute Glied $= \Delta$ dieser Gleichung von 0 verschieden sein und somit der Fläche ein bestimmter Mittelpunkt zukommen.

1) Die 3 Wurzeln sind von einander verschieden. In diesem Falle existiren 3 Hauptebenen, welche auf einander senkrecht stehen und sich im Mittelpunkte der Fläche schneiden. Jede theilt die Fläche in zwei symmetrische Hälften; ihre auf einander senkrechten Durchschnittslinien heissen Hauptdurchmesser oder Axen der Fläche.

2) Hat die Gl. (18) zwei gleiche Wurzeln, so muss $L = M = N$ sein, und die beiden gleichen Wurzeln sind $s_1 = s_2 = L$. Zunächst bestimmt sich nun mit Hilfe der 3^ten^ Wurzel $s_3$ aus (15) eine Hanptrichtung

$$m_3 = \frac{B}{B''}, \quad n_3 = \frac{B}{B'}; \dots (\alpha)$$

dieselben Ausdrücke (15) bieten aber die Werthe von $m_1$, $n_1$ und $m_2$, $n_2$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ dar, sobald man in ihnen eine der gleichen Wurzeln $s_1 = s_2 = L$ substituirt; woraus folgt, dass nebst der obigen bestimmten Hauptrichtung $(m_3, n_3)$ noch unendlich viele andere existiren. In der That kehren wir zu den Gl. (12) zurück, welche die Hauptrichtungen bestimmen; substituiren wir darin $s = L$ und beachten, dass aus (14):

$$A - L = \frac{BB'}{B''}, \; A' - M = \frac{BB''}{B'}, \; A'' - N = \frac{B'B''}{B}$$

folgt und jetzt $L = M = N$ ist, so geht aus jeder der Gleichungen (12) die folgende hervor:

$$\frac{B}{B''} m + \frac{B}{B'} n + 1 = 0; \; \ldots . (\beta)$$

wir erhalten daher zur Bestimmung von $m$ und $n$ nur diese eine Gleichung, welche zu jedem beliebig gewählten Werth von $n$ einen entsprechenden Werth von $m$ liefert, wodurch man offenbar unendlich viele Hauptrichtungen erhält. Aus der Verbindung der Gleichungen $(\alpha)$ und $(\beta)$ folgt nun weiter:

$$mm_3 + nn_3 + 1 = 0$$

woraus erhellt, dass jede der Hauptrichtungen $(\beta)$ auf der einen bestimmten Hauptrichtung $(\alpha)$ senkrecht steht.

Dieser Fall tritt ein, wenn die der Gl. (1) entsprechende Fläche durch Umdrehung entstanden ist. Man sieht leicht ein, dass jede durch die Rotationsaxe gelegte Ebene eine Hauptebene sein muss.

3) Hat die Gl. (18) drei gleiche Wurzeln, so muss nebst $L = M = N$, auch noch $B = B' = B''$ sein; jede der Wurzeln ist $= L$ und aus (14) folgt noch überdiess $L = A = A' = A''$. Unter diesen Umständen sind nun die Gl. (12), wenn man darin $s = L$ substituirt, für jeden Werth von $m$ und $n$ identisch erfüllt; jede beliebige Richtung ist eine Hauptrichtung, und die Fläche lässt folglich unendlich viele Hauptebenen zu. Dieser Fall tritt bei der Kugelfläche ein, für welche offenbar jede durch den Mittelpunkt gelegte Ebene eine Hauptebene ist. In der That verwandelt sich (1) in die Gleichung einer Kugel [§. 271, Gl. (4)], wenn man $A = A' = A''$ und $B = B' = B'' = 0$ setzt.

In allen diesen 3 Fällen, welche durch die gemeinschaftliche Bedingung, dass $\Delta$ von 0 verschieden sei, charakterisirt sind, können daher in der Fläche drei aufeinander senkrechte Hauptebenen angegeben werden. Sie haben gegen die Fläche eine vollkommen bestimmte Lage im 1^ten^ Falle; im 2^ten^

Falle hat nur eine Hauptebene gegen die Fläche eine bestimmte Lage, die beiden anderen können unter einander und auf die erste senkrecht beliebig durch den Mittelpunkt gelegt werden; im 3ten Falle kann man jedes System dreier im Mittelpunkte sich senkrecht schneidender Ebenen wählen.

**290.** Sind eine oder mehrere Wurzeln der Gl. (18) der Nulle gleich, so muss zunächst das absolute Glied $\Delta$ dieser Gleichung verschwinden; dieser Fall kann also nur bei solchen Flächen eintreten, welche keinen Mittelpunkt, oder deren unendlich viele besitzen [§. 284, 2) und 3)].

1) Ist eine Wurzel, z. B. $s_1 = 0$, und sind die zwei anderen $s_2$, $s_3$ von einander verschieden, so bestimmen wieder die Gl. (12) drei aufeinander senkrechte Hauptrichtungen; zweien von diesen entsprechen bestimmte Hauptebenen, deren Gleichungen sich aus (19) ergeben, wenn man $m_2$, $n_2$, $s_2$ und $m_3$, $n_3$, $s_3$ an die Stelle von $m$, $n$, $s$ setzt; für die 3te Hauptebene nimmt das absolute Glied der Gl. (19) der Hauptebene die Form an:

$$\frac{Cm_1 + C'n_1 + C''}{0} = h$$

wo $m_1$ und $n_1$ die für $s = s_1 = 0$ folgenden bestimmten Werthe sind. Bezeichnet man den Abstand dieser Hauptebene vom Ursprunge mit $p$, so ist [§. 250, Gl. (6)] $p = -h : \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + 1}$; ist nun:

$\alpha$) die Grösse $Cm_1 + C'n_1 + C''$ von der Nulle verschieden, so ist $h$ und somit auch $p$ unendlich gross; d. h. die 3te Hauptebene existirt in diesem Falle nicht, oder sie rückt in unendliche Entfernung hinaus. Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn das durch die Richtung $m_1$, $n_1$ bestimmte Sehnensystem die Fläche nur einmal schneidet. Ist aber

$\beta$) die Grösse $Cm_1 + C'n_1 + C''$ identisch $= 0$, so wird $h$ und somit auch $p$ unbestimmt; d. h. jede auf die Richtung $m_1$, $n_1$ senkrechte Ebene ist eine Hauptebene. Diess findet offenbar dann statt, wenn die Gl. (1) einen Cylinder darstellt; die Richtung $m_1$, $n_1$ ist jene der erzeugenden Geraden des Cylinders. Die zu dieser Richtung parallelen Sehnen schneiden die Fläche gar nicht und jeder Punkt derselben ist dann ein Halbirungspunkt, durch welchen eine Hauptebene gelegt werden kann.

Da der Durchschnittspunkt der drei Hauptebenen der Mittelpunkt der Fläche ist, so hat diese im Falle ($\alpha$) keinen Mittelpunkt, im Falle ($\beta$) deren unendlich viele, und der oben erwähnte Cylinder ist daher ein elliptischer oder hyperbolischer.

In dem Falle, dass eine Wurzel $= 0$ ist, hat die Fläche so-

mit nur zwei bestimmte Hauptebenen, die 3[te] liegt in unendlicher Entfernung, oder ist willkürlich.

2) Sind zwei Wurzeln $s_1 = s_2 = 0$, so muss in Folge dieser zwei gleichen Wurzeln auch $L = M = N = s_1 = s_2 = 0$ sein; die Gl. (12) reduciren sich wieder auf die eine:

$$\frac{B}{B''} m + \frac{B}{B'} n + 1 = 0 \; \ldots\ldots (\alpha)$$

welche unendlich viele Hauptrichtungen angibt, die sämmtlich auf der 3[ten], durch die Gl. (15) bestimmten:

$$m_3 = \frac{B}{B''}, \; n_3 = \frac{B}{B'}$$

senkrecht stehen. Dieser letzteren entspricht eine bestimmte durch (19) dargestellte Hauptebene, wenn man darin $m_3$, $n_3$, $s_3$ substituirt. Was die zu den Hauptrichtungen ($\alpha$) gehörigen Hauptebenen betrifft, so nimmt für diese das absolute Glied der Gl. (19) die Form an:

$$\frac{Cm + C'n + C''}{0}$$

und wird für alle Werthe von $m$ und $n$ unendlich, für welche die Gleichung

$$Cm + C'n + C'' = 0 \; \ldots (\beta)$$

nicht erfüllt ist; die zugehörigen Hauptebenen liegen daher in unendlicher Entfernung oder existiren nicht; jene Werthe von $m$ und $n$ jedoch, welche den Gl. ($\alpha$) und ($\beta$) gleichzeitig Genüge leisten, bestimmen eine Hauptrichtung, auf welche senkrecht in jedem ihrer Punkte eine Hauptebene gelegt werden kann, da für diese Richtung das absolute Glied in (19) die Form $\frac{0}{0}$ erhält. Auch dieser Fall, (welcher dem parabolischen Cylinder entspricht), lässt also zwei aufeinander senkrechte Hauptebenen zu.

Sind aber die zwei Gl. ($\alpha$) und ($\beta$) identisch (wenn nämlich $\frac{C}{C''} = \frac{B}{B''}, \; \frac{C'}{C''} = \frac{B}{B'}$), dann erhält das absolute Glied in (19) für alle aus ($\alpha$) folgenden Werthe von $m$ und $n$ die Form $\frac{0}{0}$; d. h. jede Ebene ist eine Hauptebene, welche durch einen beliebigen Punkt irgend einer der durch ($\alpha$) dargestellten Hauptrichtungen senkrecht gelegt wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gl. (1) ein System zweier paralleler Ebenen bedeutet.

3) Sämmtliche drei Wurzeln der Gl. (17) können nicht gleichzeitig 0 werden; denn zu diesem Ende müsste $s = L = M = N$, ferner $B = B' = B'' = 0$ werden [§. 288], womit aus (14) $A = A' = A'' = 0$ folgt, wodurch aber die Gl. (1) auf den 1[ten] Grad herabsinkt.

**291.** Aus den Erörterungen der beiden vorhergehenden §§. geht hervor, dass den durch die Gl. (1) dargestellten geometrischen Gebilden unter allen Umständen mindestens zwei auf einander senkrechte Hauptebenen zukommen, deren Lage durch die Gleichungen (15), (18) und (19) gegeben ist. Diese beiden Hauptebenen nehmen wir sofort als neue Coordinaten-Ebenen der $x'y'$ und $x'z'$, wobei die Ebene der $y'z'$ zwar parallel zur $3^{ten}$ (in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden) Hauptebene wird, ihr Durchschnittspunkt mit der Durchschnittslinie der beiden ersteren Hauptebenen, d. h. der neue Ursprung jedoch vorläufig willkürlich bleibt. Transformirt man nun die Gl. (1) auf dieses neue Coordinatensystem, so kann die transformirte Gleichung, nach dem im Anfange des §. 285 Gesagten, die Coordinaten $z'$ und $y'$ in der $1^{ten}$ Potenz nicht enthalten, und wird daher die einfachere Form:

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 + 2C_1x' + F_1 = 0 \qquad (20)$$

annehmen, in welcher somit noch sämmtliche Flächen der $2^{ten}$ Ordnung enthalten sind.

Die weitere Vereinfachung dieser Gleichung erfordert nun die Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem $P$ von der Nulle verschieden oder $= 0$ ist.

Im ersteren Falle können wir das Glied mit $x'$ verschwinden machen, indem wir den Ursprung um das Stück $a = \frac{C_1}{P}$ auf der Axe der $x'$ zurückschieben, somit in (20) $x' - \frac{C_1}{P}$ an die Stelle von $x'$ setzen. Hiedurch verwandelt sich (20) in:

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = K. \qquad (I)$$

Ist aber $P = 0$, so wird diese letzte Transformation unmöglich, weil $a = \infty$ würde; in diesem Falle hat aber (20) die Form:

$$P'y'^2 + P''z'^2 + 2C_1x' + F_1 = 0,$$

und wir können nun aus dieser Gleichung das constante Glied wegschaffen, indem wir den Ursprung um das Stück $b = \frac{F_1}{2C_1}$ auf der Axe der $x'$ zurückschieben, d. i. $x' - \frac{F_1}{2C_1}$ an die Stelle von $x'$ setzen; die letzte Gleichung verwandelt sich dadurch in folgende:

$$P'y'^2 + P''z'^2 = Qx'. \qquad (II)$$

Hieraus erhellt, dass die allgemeine Gleichung (1) des $2^{ten}$ Grades durch geeignete Transformation immer auf eine der beiden Formen (I) oder (II) gebracht werden kann, aus deren Diskussion folglich alle Flächen $2^{ter}$ Ordnung hervorgehen werden.

Die in der Gl. (I) begriffenen Flächen sind mit einem Mittelpunkte versehen (oder auch mit unendlich vielen in besonderen Fällen), welcher zugleich Ursprung der jetzigen Coordinaten ist, weil die Gleichung nur Glieder der $2^{ten}$ Dimension enthält [§. 283]; auch ist jede der coordinirten Ebenen eine Hauptebene, weil die Gleichung in Bezug auf alle drei Coordinaten rein quadratisch ist [§. 285].

Jene Flächen hingegen, welche aus der Gl. (II) hervorgehen, ermangeln eines Mittelpunktes in Folge der Anwesenheit des linearen Gliedes $Qx$, welches durch Veränderung des Ursprunges nicht weggeschafft werden kann; von den coordinirten Ebenen sind nur jene der $xy$ und $xz$ Hauptebenen.

Diskussion der Gleichung:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = K. \tag{I}$$

(Flächen mit Mittelpunkt.)

**292.** Wir wollen, was offenbar gestattet ist, voraussetzen, dass man den zweiten Theil $K$ dieser Gleichung positiv gemacht habe; die 3 Coefficienten $P$, $P'$, $P''$ können dann, ohne dass die Gl. aufhört eine reelle Bedeutung zu haben, nicht gleichzeitig negativ sein, und wenn wir im folgenden mit $P$, $P'$, $P''$, $K$ die numerischen Werthe der bisher mit diesen Buchstaben bezeichneten Grössen vorstellen, so haben wir nur folgende Fälle zu betrachten:

$$\left.\begin{aligned} Px^2 + P'y^2 + P''z^2 &= K \\ Px^2 + P'y^2 - P''z^2 &= K \\ Px^2 - P'y^2 - P''z^2 &= K \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

indem jede andere Combination von Zeichen durch geeignete Vertauschung der Coordinatenaxen auf eine der obigen zurückgeführt werden kann.

I. Das Ellipsoid. Betrachten wir zuerst die Gleichung

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = K, \tag{21}$$

in welcher sämmtliche Coefficienten positiv sind. Setzen wir der Reihe nach $y$ und $z$; dann $x$ und $z$; endlich $x$ und $y$ der Nulle gleich, so erhalten wir:

$$x = \pm\sqrt{\frac{K}{P}} = \pm a, \quad y = \pm\sqrt{\frac{K}{P'}} = \pm b,$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{K}{P''}} = \pm c \tag{22}$$

als Coordinaten der Durchschnittspunkte $A$, $A'$; $B$, $B'$; $C$, $C'$ (Fig. 17) der Fläche mit den Coordinatenaxen, welche somit, 6 an der Zahl, sämmtlich reell sind, und die Scheitel der Fläche genannt werden. Die Coordinatenaxen sind Hauptdurchmesser der Fläche, und die von

je zwei Scheiteln begrenzten Stücke derselben, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$, heissen die Axen der Fläche; diese besitzt demnach drei reelle Axen. Durch Einführung der Werthe (22) derselben in die Gl. (21) unserer Fläche erhält diese die symmetrische Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{23}$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach $z$, $y$, $x$ der Nulle gleich, so erhält man:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

als Gleichungen der Hauptschnitte, d. i. der Durchschnittslinien der Fläche mit den coordinirten Ebenen, welche demnach Ellipsen sind. Schneidet man ferner die Fläche durch eine im Abstande $z = \pm h$ zur $xy$-Ebene parallele Ebene, so ergibt sich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2}$$

als Gleichung des Schnittes, wie man sieht, einer Ellipse, deren Halbaxen

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}, \text{ und } b' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$$

sind. Alle zur Ebene der $xy$ parallelen Schnitte sind somit Ellipsen, und zwar ähnliche Ellipsen, da das Verhältniss ihrer Halbaxen $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ein constantes, von $h$ unabhängiges ist. Der Schnitt wird unmöglich, wenn $h > c$, woraus folgt, dass die Fläche sich über die Scheitel $C$ und $C'$ hinaus nicht erstreckt. Zu ganz ähnlichen Ergebnissen führt die Betrachtung von Schnitten, welche zu den beiden anderen Coordinaten-Ebenen parallel gemacht werden. Hieraus folgt zugleich, dass unsere Fläche nach allen Richtungen begrenzt, also eine geschlossene Fläche ist. Sie führt den Namen Ellipsoid.

Sind zwei der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$ gleich, z. B. $P = P'$, also auch $a = b$, so kann das Ellipsoid durch Umdrehung um die Axe der $Z$ entstanden gedacht werden (Rotations-Ellipsoid, Sphäroid) [§. 279]; denn jede auf die Axe der $z$ senkrechte Ebene $z = h$ schneidet die Fläche in einer Curve, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad \text{d. i. } x^2 + y^2 = \frac{a^2(c^2 - h^2)}{c^2}$$

ist, und offenbar einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt auf der Axe der $z$ liegt. — Für $P = P' = P''$ oder $a = b = c$ verwandelt sich (23) in: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, und das Ellipsoid geht somit in eine Kugel über.

**293.** Als besondere Fälle der Gl. (21) oder (23) sind folgende zu bemerken:

1) $K = 0$; die Gleichung wird dann nur durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erfüllt; sie bedeutet also einen Punkt, und zwar den gegenwärtigen Coordinatenanfang.

2) Ist einer der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$ der 0 gleich, oder was auf dasselbe hinauskommt, wird eine der Halbaxen $a$, $b$, $c$ unendlich, so geht die Gl. (23) des Ellipsoids in eine der Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

über, welche elliptischen Cylindern angehören, deren Axen beziehungsweise mit den Axen der $z$, $y$, $x$ zusammenfallen.

3) Sind zwei der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$ der Nulle gleich, z. B. $P'$, $P''$, so geht (21) über in $x = \pm \sqrt{\frac{K}{P}}$, und bedeutet sofort ein System zweier Ebenen, welche zur Ebene der $yz$ parallel laufen.

4) Verschwindet nebst $K$ einer der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$, z. B. $P''$, so reducirt sich Gl. (21) auf $Px^2 + P'y^2 = 0$, welche Gleichung in folgende zwei zerfällt: $x = 0$, $y = 0$ und somit der Axe der $z$ angehört. Unsere Gleichung hat also in diesem Falle eine gerade Linie zum geometrischen Orte.

5) Verschwinden endlich nebst $K$ noch zwei der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$, z. B. $P'$, $P''$, so geht (21) über in $Px^2 = 0$, oder $x = 0$, welche Gl. der Ebene der $yz$ angehört. Unsere Gleichung bedeutet demnach in diesem Falle eine einzige Ebene.

**294.** II. Das Hyperboloid mit einer Hölung. Die 2[te] der Gl. ($\alpha$), mit einem negativen Quadrate hat die Form:

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = K. \tag{24}$$

Als Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Fläche mit den Coordinatenaxen finden wir:

$$x = \pm \sqrt{\frac{K}{P}} = \pm a; \quad y = \pm \sqrt{\frac{K}{P'}} = \pm b,$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{K}{-P''}} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{K}{P''}} = \pm c \sqrt{-1}; \tag{25}$$

und schliessen hieraus, dass nur die Axen der $x$ und $y$ nicht aber jene der $z$ von der Fläche geschnitten werden. Diese Fläche hat daher nur zwei reelle Axen: $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, (Fig. 18) mit den vier reellen Scheiteln: $A$, $A'$, $B$, $B'$. Der Analogie nach pflegt man die Strecke $OC = OC' = c$ auf der Axe der $z$ aufzutragen, wo nun

$CC' = 2c$ die 3te imaginäre Axe vorstellt. Durch Einführung der Halbaxen $a$, $b$, $c$ in die Gl. (24) erhält diese die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (26)$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen der coordinirten Ebenen, so erhält man als Gleichungen der Hauptschnitte:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

von welchen die erste einer Ellipse, die beiden anderen jedoch Hyperbeln angehören.

Jeder zur Ebene der $xy$ im Abstande $z = h$ parallele Schnitt erzeugt eine Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2 + c^2}{c^2},$$

deren Halbaxen

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{h^2 + c^2}, \quad b' = \frac{b}{c}\sqrt{h^2 + c^2} \qquad (27)$$

mit zunehmendem $h$ immer grösser werden; den kleinsten dieser Querschnitte erhält man offenbar für $h = 0$ und dieser ist somit der elliptische Hauptschnitt $ABA'B'$, welcher die Kehlellipse genannt wird. Da ferner das Verhältniss $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ von $h$ unabhängig ist, so sind diese Ellipsen sämmtlich unter sich ähnlich. — Zu analogen Resultaten führt die Betrachtung von Schnitten, welche parallel zu den Ebenen der $xz$ und $yz$ geführt werden, nur dass statt der Ellipsen Hyperbeln als Durchschnittslinien erscheinen, unter welchen als Uebergangsglieder auch zwei Systeme sich schneidender Geraden sich befinden, wenn die Entfernung der schneidenden Ebene von den oben genannten coordinirten Ebenen beziehungsweise $= b$ oder $= a$ ist.

Von der Gestalt dieser Fläche wird man sich nun eine deutliche Vorstellung machen können; sie erstreckt sich nach den Richtungen der 3 Coordinatenaxen ins unendliche und ist nicht unterbrochen, so dass man von einem beliebigen Punkte der Fläche zu irgend einem anderen gelangen kann, ohne die Fläche zu verlassen. Sie führt den Namen Hyperboloid mit einer Hölung.

Ist $P = P'$, folglich auch $a = b$, d. i. sind beide reelle Axen einander gleich, so werden alle auf die Axe der $z$ senkrechten Schnitte zu Kreisen, deren Mittelpunkte in der Axe der $z$ liegen; die Fläche wird daher durch Umdrehung der Hyperbel $DAE$ um ihre imaginäre Axe $CC'$ erzeugt werden können und ist das Rotationshyperboloid mit einer Hölung [§. 279.].

**295.** Als besondere Fälle der Gl. (24) ergeben sich folgende:

1) $K = 0$; die Gleichung hat die Form:

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (28)$$

und gehört, wie man durch ebene Schnitte leicht erkennt, einem elliptischen Kegel an, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprunge und dessen Axe mit der Axe der $z$ zusammenfällt. Er steht in naher Beziehung mit dem durch die Gl. (24) oder (26) dargestellten Hyperboloide.

Die Hauptschnitte des Kegels mit den Ebenen der $xz$ und $yz$ sind durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{oder } x = \pm \frac{a}{c} z, \quad \text{und } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ oder } y = \pm \frac{b}{c} z$$

gegeben, und sind somit je zwei sich im Ursprunge schneidende Gerade, in welchen man aus den Coefficienten $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ die Asymtoten $UO$ und $VO$ der beiden hyperbolischen Hauptschnitte $DAE$ und $FBG$ erkennt. Ein in der Entfernung $= h$ vom Ursprunge parallel zur $xy$-Ebene geführter Schnitt $UVU'$ ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

als Ellipse charakterisirt, deren Halbaxen $a_1 = \frac{ah}{c}$, $b_1 = \frac{bh}{c}$ sind. Vergleicht man diese Ausdrücke mit jenen (27) der Halbaxen des durch dieselbe Ebene erzeugten elliptischen Schnittes $DFH$ des Hyperboloides, so findet man

$$a' - a_1 = \frac{a}{c}\left(\sqrt{h^2 + c^2} - h\right) = \frac{ac}{\sqrt{h^2 + c^2} + h},$$

$$b' - b_1 = \frac{b}{c}\left(\sqrt{h^2 + c^2} - h\right) = \frac{bc}{\sqrt{h^2 + c^2} + h};$$

diese Differenzen bleiben immer positiv, d. h. der Kegel liegt innerhalb des Hyperboloides, und sie werden unendlich klein, wenn $h$ unendlich wächst, woraus folgt, dass das Hyperboloid sich der Kegelfläche unendlich nähert, ohne dass beide Flächen sich jemals treffen. Aus diesem Grunde wird dieser Kegel der Asymtoten-Kegel des Hyperboloides genannt.

Ein Hyperboloid, dessen Axen zu jenen des Hyperboloides (26) in dem Verhältnisse $\alpha : 1$ stehen, wird durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2 a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 b^2} - \frac{z^2}{\alpha^2 c^2} = 1, \quad \text{oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \alpha^2$$

dargestellt; lässt man nun $\alpha$ gegen 0 convergiren, so geht dieses Hyperboloid in den Asymtotenkegel (28) über. Letzterer ist daher die Grenze, welcher sich das Hyperboloid unendlich nähert, wenn die Axen, während sie ihr Verhältniss unverändert beibehalten, unendlich klein werden.

Die folgenden Fälle sind jenen beim Ellipsoide vorgetragenen so ähnlich, dass eine kurze Anzeige genügen wird:

2) Wenn einer der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$ verschwindet: elliptischer oder hyperbolischer Cylinder.

3) Wenn zwei dieser Coefficienten verschwinden: zwei reelle oder imaginäre parallele Ebenen.

4) Wenn $K$ und einer der Coefficienten $P$, $P'$, $P''$ verschwindet: Eine Gerade, oder zwei sich schneidende Ebenen.

5) Wenn nebst $K$ noch zwei dieser Coefficienten verschwinden: eine einzige Ebene.

**296.** III. Das Hyperboloid mit zwei Hölungen. Die letzte Form der Gl. (I), welche wir zu untersuchen haben, ist:

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = K, \qquad (29)$$

mit zwei negativen Quadraten. Die Fläche trifft die Coordinatenaxen in den Punkten:

$$x = \pm\sqrt{\frac{K}{P}} = \pm a; \quad y = \pm\sqrt{\frac{K}{-P'}} = \pm b\sqrt{-1};$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{K}{-P''}} = \pm c\sqrt{-1},$$

und hat somit nur zwei reelle Scheitel $A$, $A'$ (Fig. 19) und eine reelle Axe $AA' = 2a$; die anderen zwei Axen $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ sind imaginär. Durch Einführung der Axen nimmt (29) die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (30)$$

Die Hauptschnitte der Fläche mit den coordinirten Ebenen sind durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gegeben, von welchen die beiden ersteren Hyperbeln ($DAE$ und $FAG$) angehören; die letztere hat keine reelle Bedeutung und die Ebene der $yz$ wird daher von unserer Fläche nicht geschnitten. Für alle parallel zu dieser Ebene in der Entfernung $x = \pm h$ vom Ursprunge geführten Schnitte erhält man:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2 - a^2}{a^2},$$

d. h. so lande $h > a$, Ellipsen, welche, unter sich ähnlich bleibend, mit zunehmendem $h$ immer grösser und grösser werden; für $h < a$ sind sie jedoch imaginär, woraus folgt, dass kein Punkt der Fläche zwischen den beiden Ebenen liegt, welche durch die beiden Endpunkte $A$, $A'$ der reellen Axe senkrecht auf diese gelegt werden. Die Fläche besteht daher aus zwei getrennten Theilen und wird Hyperboloid mit zwei Hölungen genannt.

Alle Schnitte, parallel zu den Ebenen der $xy$ und $xz$ geführt, sind Hyperbeln, welche den respektiven Hauptschnitten ähnlich sind.

Ist $P' = P''$ oder $b = c$, d. i. sind die beiden imaginären Axen gleich, so werden alle auf die reelle Axe senkrechten Schnitte zu Kreisen und die Fläche kann durch Umdrehung um diese Axe erzeugt werden. (Rotationshyperboloid mit zwei Hölungen.)

**297.** Die Voraussetzung, dass einer oder mehrere der Coefficienten der Gl. (29) verschwinden, führt mit Ausschluss des elliptischen Cylinders auf dieselben Gebilde wie in §. 295. Ist insbesondere $K = 0$, so gehört die Gleichung

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (31)$$

wieder einem Kegel $UOV$ an, welcher, wie man sich auf ähnliche Weise wie §. 295 überzeugt, Asymtotenkegel des Hyperboloids mit 2 Hölungen ist, die Fläche jedoch von Aussen umschliesst.

### Diskussion der Gleichung:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx. \qquad (II)$$

(Flächen ohne Mittelpunkt.)

**298.** Berücksichtiget man, dass das 1te Glied im 1ten Theile dieser Gleichung immer positiv gemacht werden kann, und in dem Falle, wenn das Glied $Qx$ negativ wäre, nur $x$ mit $-x$, d. i. die positive Halbaxe der $x$ mit der negativen zu vertauschen wäre, um dieses Glied ebenfalls positiv zu erhalten, so ist klar, dass obige Gleichung nur zwei wesentlich verschiedene Formen darbieten kann, nämlich:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx \quad \text{und} \quad P'y^2 - P''z^2 = Qx,$$

welche, so lange keiner der Coefficienten verschwindet, zwei krumme Flächen charakterisiren, von welchen die eine elliptisches, die andere hyperbolisches Paraboloid genannt wird.

I. Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung dieser Fläche ist:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qx. \qquad (32)$$

Setzt man zwei der Coordinaten $= 0$, so wird auch die 3te der Nulle gleich; die Fläche schneidet daher die Coordinatenaxen nur im Ursprunge $O$ (Fig. 20.); die Ebenen der $xy$ und $xz$ sind allein Hauptebenen dieser Fläche und die Axe der $x$, als ihre Durchschnittslinie, die einzige Axe derselben, welche sie im Punkte $O$, dem Scheitel der Fläche, trifft, und nach der anderen Seite ins Unendliche sich erstrecket.

Die Hauptschnitte der Fläche mit den Ebenen der $xy$ und $xz$ sind durch die Gleichungen

$$P'y^2 = Qx \quad \text{und} \quad P''z^2 = Qx$$

bestimmt, folglich Parabeln ($COD$ und $AOB$), deren Parameter beziehungsweise $p = \frac{Q}{P'}$ und $p' = \frac{Q}{P''}$ sind, welche den Ursprung zum Scheitel und die Axe der $x$ zur gemeinschaftlichen Axe haben. Irgend ein zur $xy$-Ebene paralleler ebener Schnitt der Fläche ist: $z = h$, $P'y^2 = Qx - P''h^2$, somit wieder eine Parabel vom Parameter $\frac{Q}{P'} = p$, woraus folgt, dass alle zur $xy$-Ebene parallelen Schnitte dieselbe Parabel erzeugen. Eben so sind alle zur $xz$-Ebene parallelen Schnitte unter sich gleiche Parabeln. Man kann daher diese Fläche durch eine stetige Bewegung dadurch erzeugen, dass man den Scheitel einer beweglichen Parabel an einer festen Parabel als Leitlinie fortrücken lässt, so dass die Ebenen beider Curven beständig auf einander senkrecht, und die Axen, nach derselben Seite gerichtet, einander parallel bleiben.

Für die senkrecht auf die Axe der $x$ in der Entfernung $x = h$ geführten Schnitte erhält man endlich:

$$P'y^2 + P''z^2 = Qh,$$

d. h. unter sich ähnliche Ellipsen, deren Halbaxen

$$a' = \sqrt{\frac{Qh}{P'}}, \quad b' = \sqrt{\frac{Qh}{P''}}$$

sind, und mit unendlich zunehmendem $h$ unendlich gross werden. Für $h = 0$ reducirt sich die Ellipse auf einen Punkt, den Scheitel $O$, und wird imaginär, wenn $h$ negativ. Die Fläche liegt daher nur auf der Seite der positiven $x$, und erstreckt sich hier ins Unendliche. Durch Einführung der Parameter $p$, $p'$ der beiden parabolischen Hauptschnitte erhält die Gl. des elliptischen Paraboloides die Form:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = x \quad \text{oder} \quad p'y^2 + pz^2 = pp'x. \qquad (33)$$

Die zur Axe der Fläche senkrechten Schnitte werden Kreise,

wenn $p = p'$ ist; die Fläche kann dann durch Umdrehung einer Parabel um ihre eigene Axe erzeugt werden (Rotationsparaboloid).

Das elliptische Paraboloid degenerirt in einen parabolischen Cylinder, wenn einer der Coefficienten $P'$ oder $P''$ verschwindet. Für $Q = 0$ bedeutet die Gl. (32) eine Gerade (die Axe der $x$); ihr Ort wird eine Ebene, wenn zwei der drei Coefficienten verschwinden.

**299.** II. Das Hyperbolische Paraboloid:

$$P'y^2 - P''z^2 = Qx. \tag{34}$$

Auch diese Fläche schneidet die Coordinatenaxen nur im Ursprunge $O$ (Fig. 21) und hat die Ebene der $xy$ und $xz$ zu Hauptebenen, deren Durchschnittslinie, die Axe der $x$, die einzige Axe der Fläche ist. Als Hauptschnitte der Fläche in den Ebenen der $xy$ und $xz$ erhalten wir:

$$P'y^2 = Qx \text{ und } P''z^2 = -Qx,$$

d. i. Parabeln $AOA'$ und $BOB'$, deren Parameter beziehungsweise $p = \frac{Q}{P'}$, $p' = \frac{Q}{P''}$ sind, deren Scheitel im Ursprunge, deren Axen in der Axe der $x$ aber vom Ursprunge aus nach entgegengesetzten Richtungen liegen. Irgend ein zur Ebene der $xz$ in der Entfernung $y = \pm h$ parallel geführter Schnitt ist:

$$y = \pm h, \quad P''z^2 = -Qx + P'h^2$$

also ebenfalls eine dem Hauptschnitte $BOB'$ gleiche Parabel, wie $DAD'$, $EA'E'$. In gleicher Weise erzeugt jeder zur Ebene der $xy$ parallele Schnitt eine dem Hauptschnitte $AOA'$ gleiche Parabel. Hieraus folgt, dass das hyperbolische Paraboloid durch die stetige Bewegung einer Parabel entsteht, deren Scheitel an einer zweiten Parabel so fortgleitet, dass die Ebenen beider Parabeln beständig auf einander senkrecht und die Axen derselben, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, einander parallel bleiben.

Die Gleichungen eines in der Entfernung $x = h$, parallel zur Ebene der $yz$ geführten Schnittes sind:

$$x = h, \quad P'y^2 - P''z^2 = Qh,$$

welche Hyperbeln angehören, deren Mittelpunkte auf der Axe der $x$ liegen; die Halbaxen sind: $a = \sqrt{\frac{Qh}{P'}}$, $b = \sqrt{\frac{Qh}{P''}}$, und werden mit zunehmendem $h$ unendlich gross; die erste Axe dieser Hyperbeln liegt parallel zur Axe der $y$ oder der $z$, je nachdem $h$ positiv oder negativ ist. Ein Schnitt der ersteren Art ist in der Figur durch $FGF'$, $HG'H'$, ein Schnitt der zweiten Art durch $DBE$, $D'B'E'$ dargestellt. Da, wie man sieht, das Verhältniss $a:b$ von $h$ unabhängig, also constant ist,

so sind die Asymtoten aller hyperbolischen Schnitte unter sich parallel, und die Hyperbeln eines jeden der beiden Systeme unter sich ähnlich.

Für $h = 0$ erhält man als Hauptschnitt der Fläche in der Ebene der $yz$:

$$P'y^2 - P''z^2 = 0 \quad \text{oder } z = \pm \sqrt{\frac{P'}{P''}} \cdot y,$$

d. i. zwei im Ursprunge sich schneidende gegen die Axe der $y$ gleich geneigte Gerade ($JJ'$, $KK'$), welche zugleich die gemeinschaftlichen Projectionen der Asymtoten sämmtlicher Hyperbelschnitte auf die Ebene $yz$ sind.

Durch Einführung der Parameter $p$, $p'$ der beiden parabolischen Hauptschnitte in die Gl. (34) erhält die Gl. des hyperbolischen Paraboloides die Form:

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x \quad \text{oder } p'y^2 - pz^2 = pp'x. \tag{35}$$

Die Fläche degenerirt in einen parabolischen Cylinder, wenn einer der Coefficienten $P'$, $P''$ verschwindet; in ein System zweier in der Axe der $x$ sich schneidenden Ebenen, wenn $Q = 0$ wird; in eine Ebene endlich, wenn zwei der Coefficienten der Gl. (34) verschwinden.

Die geometrischen Gebilde, welche einer Gleichung des 2ten Grades zwischen 3 veränderlichen Grössen entsprechen, sind demnach folgende:

1) Das Ellipsoid; 2) das Hyperboloid mit einer Hölung; 3) das Hyperboloid mit zwei Hölungen; 4) das elliptische Paraboloid; 5) das hyperbolische Paraboloid.

6) Der elliptische Kegel; 7) der elliptische Cylinder; 8) der hyperbolische Cylinder; 9) der parabolische Cylinder.

10) Zwei sich schneidende Ebenen; 11) zwei parallele Ebenen; 12) eine Ebene.

13) Eine gerade Linie.

14) Ein Punkt.

Endlich kann die Gleichung auch jeder geometrischen Bedeutung ermangeln.

### VON DEN EBENEN SCHNITTEN DER FLAECHEN ZWEITER ORDNUNG.

**300.** Eine Fläche der 2ten Ordnung werde von irgend einer Ebene geschnitten, deren Abstand vom Ursprunge $= h$ ist. Um die Gleichung des Schnittes, welcher eine Linie der 2ten Ordnung sein wird, zu erhalten, transformiren wir, ohne Veränderung des Ursprunges,

die Gleichung der gegebenen Fläche auf ein neues Coordinatensystem, dessen $xy$-Ebene der schneidenden Ebene parallel liegt. Die transformirte Gleichung wird im Allgemeinen die Form haben:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F \end{array}\right\} = 0.$$

In Bezug auf dieses neue Coordinatensystem ist nun $z = h$ die Gleichung der schneidenden Ebene, durch deren Verbindung mit obiger Gleichung sich:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2(C + B'h)\,x + 2(C' + B''h)\,y \\ + A''h^2 + 2C''h + F \end{array}\right\} = 0$$

als Gleichung des Durchschnittes, bezogen auf ein in der schneidenden Ebene liegendes rechtwinkliges Coordinatensystem ergibt. Wie man sieht, sind die Coefficienten $A$, $A'$, $2B$ der Glieder der $2^{\text{ten}}$ Ordnung von $h$ unabhängig. Nun kommt es bekanntlich nur auf das Zeichen der Grösse $B^2 - AA'$ an, ob die letzte Gleichung eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel bedeute; ferner hängt die Richtung der Axen der Curve, so wie — wenn die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel angehört, — das Verhältniss derselben bloss von den genannten drei Coefficienten ab, wie aus Gl. 16, §. 192 und Gl. 28, §. 196 sogleich erhellt. Durch diese Bemerkungen gelangt man zu dem Satze: dass, wenn eine krumme Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine Folge paralleler Ebenen geschnitten wird, die entstehenden Durchschnittslinien unter sich ähnliche Linien der $2^{\text{ten}}$ Ordnung sind, deren gleichnamige Axen einander parallel liegen; wobei, wie bekannt, in einer Folge von Ellipsen auch der Kreis und Punkt, in einer Folge von Hyperbeln zwei sich schneidende Gerade, in einer Folge von Parabeln zwei parallele Gerade oder eine einzige Gerade erscheinen können.

Man sieht leicht ein, dass man in Folge dieses Satzes bei der Untersuchung der ebenen Schnitte der Flächen $2^{\text{ter}}$ Ordnung sich auf solche beschränken könne, welche durch den Ursprung geführt werden.

**301.** Betrachten wir zuerst die mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen, deren Gleichung die Form hat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Wir wollen voraussetzen, dass zwischen den Quadraten der drei Halbaxen mit Rücksicht auf ihre Zeichen, die Relation:

$$a^2 > b^2 > c^2$$

bestehe, welche Voraussetzung nöthigenfalls durch Vertauschung der Axen immer erfüllt werden kann, und wobei $a^2$ immer positiv ist.

Schneiden wir nun diese Fläche durch eine durch den Ursprung — zugleich Mittelpunkt — gelegte Ebene, deren Knotenlinie in der Ebene der $xy$ mit der Axe der $x$ den Winkel $\varphi$ einschliesst, und welche gegen die $xy$-Ebene unter dem Winkel $\theta$ geneigt ist. Wir erhalten unter Anwendung der Ausdrücke ($m$), §. 270 als Gleichung des Schnittes, bezogen auf ein in der schneidenden Ebene liegendes Coordinatensystem der $x'y'$, dessen $x'$-Axe die oben erwähnte Knotenlinie ist:

$$\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \alpha' y'^2 = a^2b^2c^2, \tag{2}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= c^2(a^2 \sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2), \\ \beta &= c^2(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, \\ \alpha' &= c^2(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2 + a^2b^2\sin\theta^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ist. Es hängt nun die Natur des Schnittes von der Differenz:

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = -a^2b^2c^2\left[(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2)\sin\theta^2 + c^2\cos\theta^2)\right] \tag{4}$$

ab, welche wir für jede der drei Flächen besonders betrachten wollen.

I. Im Ellipsoide sind die 3 Grössen $a^2$, $b^2$, $c^2$ positiv, folglich ist die Differenz $\beta^2 - \alpha\alpha'$ wesentlich negativ, daher diese Fläche nur in Ellipsen geschnitten werden kann. — Von Interesse ist hier die Frage, ob die elliptischen Schnitte bei einer gewissen Lage der schneidenden Ebene nicht in kreisförmige übergehen können? Zu diesem Behufe muss in (2) $\beta = 0$ und $\alpha = \alpha'$ werden; wir haben also den Bedingungsgleichungen:

$$(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta = 0, \text{ und}$$

$$c^2(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) = c^2(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)\cos\theta^2 + a^2b^2\sin\theta^2$$

zu genügen, welche, wenn die Halbaxen $a$, $b$, $c$ von einander verschieden sind, nur folgende drei Auflösungen zulassen:

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi = 0$ | $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ | $\theta = \frac{1}{2}\pi$ |
| $\sin\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2}}$ | $\sin\theta = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$ | $\sin\varphi = \pm\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$. |

Hievon sind, in Folge der Relation $a^2 > b^2 > c^2$ die 1te und 3te Auflösung unzulässig, weil sie beziehungsweise $\sin\theta$ imaginär, und $\sin\varphi > 1$ geben; die aus der Annahme $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ folgenden zwei Werthe von $\sin\theta$, nämlich $\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$ sind aber reell und $< 1$; es gibt daher immer zwei Folgen paralleler Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; wegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stehen diese Ebenen senkrecht auf der Ebene $xz$, sind also parallel zur Axe $2b$ des Ellipsoides, d. h. zur mittleren Axe desselben.

II. Für das Hyperboloid mit einer Hölung ist in obigen Gleichungen $c^2$ negativ, somit

$\beta^2 - \alpha\alpha' = a^2b^2c^2\,[(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2) \sin\theta^2 - c^2 \cos\theta^2]$; (5)
der Schnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $\beta^2 - \alpha\alpha'$ negativ oder positiv, d. h. je nachdem dem Zahlenwerthe nach:

$$\operatorname{tg}\theta < \text{oder} > \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}$$

ist. — Auf ganz ähnliche Weise, wie beim Ellipsoide findet man, dass zwei Systeme von Ebenen, welche zur grösseren der beiden reellen Axen des Hyperboloides parallel und gegen die Ebene der $xy$ unter den durch die Gl. $\sin\theta = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}$ bestimmten Winkeln geneigt sind, das Hyperboloid in Kreisen schneiden.

Es erübriget noch die Untersuchung derjenigen Schnitte, welche aus der Anname $\beta^2 - \alpha\alpha' = 0$, d. i.:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}} \qquad (n)$$

hervorgehen. Es ist aber nach (3), $c^2$ negativ nehmend:

$$\alpha = -c^2(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2), \quad \beta = -c^2(a^2 - b^2) \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta,$$
$$\alpha' = \cos\theta^2\,[-c^2(a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2) + a^2b^2 \operatorname{tg}\theta^2];$$

der Ausdruck von $\alpha'$ nimmt, wenn man für $\operatorname{tg}\theta$ obigen Werth $(n)$ substituirt, die Grösse in den Klammern auf einerlei Nenner bringt und im Zähler das Glied $a^2b^2 \cos\varphi^4$ nach Potenzen von $\sin\varphi$ auflöst, die Form an:

$$\alpha' = -c^2 \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 \cos\theta^2}{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}.$$

Durch Einführung dieser Werthe von $\alpha$, $\beta$ und $\alpha'$ in die Gl. (2) wird der erste Theil der Gleichung ein vollständiges Quadrat, und wir erhalten nach Ausziehung der Wurzel, als Gleichung des Schnittes:

$$\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}\,.\,x + \frac{(a^2 - b^2) \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}\,.\,y = \pm ab,$$

welche zwei parallelen Geraden angehört. Vermöge des doppelten Zeichens von $\operatorname{tg}\theta$ in Gl. $(n)$ entsprechen also jedem Werthe von $\varphi$ zwei durch den Mittelpunkt gehende und gegen die Ebene der $xy$ gleich geneigte Ebenen, welche das Hyperboloid mit einer Hölung in geraden Linien schneiden. Wir werden diese Geraden in §. 303 noch einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Parabolische Schnitte entstehen endlich, wenn die schneidenden Ebenen parallel sind zu einer von jenen durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen, von welchen das Hyperboloid in zwei parallelen Geraden geschnitten wird.

III. Für das Hyperboloid mit zwei Hölungen haben wir in den Gl. (1) bis (4) $b^2$ und $c^2$ negativ zu nehmen und erhalten somit

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = - a^2b^2c^2 \, [(a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2) \sin\theta^2 - c^2 \cos\theta^2]$$
$$= a^2b^2c^2 \, [(b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2) \sin\theta^2 + c^2 \cos\theta^2].$$

Diese Grösse ist für jeden Werth von $\theta$ positiv, wenn $b^2 \cos\varphi^2 - \sin a^2\varphi^2 > 0$, d. i. $\operatorname{tg}\varphi < b:a$ ist, oder die Durchschnittslinie der schneidenden und der $xy$-Ebene innerhalb des Asymtotenwinkels des in dieser coordinirten Ebene befindlichen Hauptschnittes liegt; diese Schnitte sind also Hyperbeln. Ist aber $\operatorname{tg}\varphi > b:a$, so begegnet die schneidende Ebene dem Hyperboloide in Hyperbeln oder Ellipsen, je nachdem

$$\operatorname{tg}\theta < \text{oder} > \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2}};$$

in Parabeln endlich, wenn

$$\text{entweder } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \text{ und } \theta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\text{oder } \operatorname{tg}\varphi > \frac{b}{a} \text{ und } \operatorname{tg}\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2}}$$

ist. In geraden Linien kann diese Fläche nicht geschnitten werden, was schon daraus erhellt, dass dieselbe aus zwei getrennten Theilen besteht.

In Kreisen wird dieses Hyperboloid von Ebenen geschnitten, welche zur grösseren der beiden imaginären Axen parallel und gegen die reelle Axe unter einem Winkel geneigt sind, dessen Sinus $= \pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}}$ ist, wobei $b < c$ vorausgesetzt ist.

**302.** Die Flächen ohne Mittelpunkt sind in der Gleichung

$$p'y^2 + pz^2 - pp'x = 0 \qquad (1)$$

begriffen, welche unmittelbar dem elliptischen Paraboloide angehört, und sich durch Aenderung des Zeichens von $p'$ in jene des hyberbolischen verwandelt; durch Substitution der Ausdrücke ($m$), §. 270, erhalten wir:

$$\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \alpha' y'^2 + \gamma x' + \delta y' = 0 \qquad (2)$$

als Gleichung der Durchschnittslinie, und man findet:

$\alpha = p' \sin\varphi^2$, $\beta = p' \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta$, $\alpha' = p' \cos\varphi^2 \cos\theta^2 + p \sin\theta^2$, $\gamma = - pp' \cos\varphi$, $\delta = pp' \sin\varphi \cos\theta$, womit sich

$$\beta^2 - \alpha\alpha' = - pp' \sin\varphi^2 \sin\theta^2$$

ergibt.

I. Das elliptische Paraboloid, auf welches diese Ausdrücke sich unmittelbar beziehen, wird, da die Grösse $\beta^2 - \alpha\alpha'$ wesentlich

negativ, im Allgemeinen in Ellipsen geschnitten; nur wenn $\varphi$ oder $\theta = 0$, d. i. wenn die schneidende Ebene parallel ist zur Axe der Fläche, werden die Schnitte Parabeln. — In Hyperbeln kann diese Fläche nicht geschnitten werden; eben so wenig in geraden Linien, da sie bekanntlich nur nach einer Seite ins Unendliche sich erstreckt. — In Kreisen wird die Fläche von zwei Folgen paralleler Ebenen geschnitten, welche senkrecht stehen auf jenem parabolischen Hauptschnitte, welchem der kleinere Parameter entspricht und gegen die Ebene des anderen parabolischen Hauptschnittes unter Winkeln geneigt sind, deren Sinus $= \pm \sqrt{\frac{p}{p'}}$ ist, unter $p'$ den grösseren Parameter verstanden.

II. Für das hyperbolische Paraboloid ist in obigen Ausdrücken $p'$ negativ zu nehmen, wodurch die Grösse $\beta^2 - \alpha\alpha' = pp' \sin\varphi^2 \sin\theta^2$ wesentlich positiv wird.

Auf dieser Fläche kann daher keine Ellipse, also auch kein Kreis verzeichnet werden. So lange $\varphi$ und $\theta$ von Null verschieden sind, ist der Schnitt eine Hyperbel, welche jedoch für $\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die schneidende Ebene mit der $yz$-Ebene zusammenfällt, in ein System zweier im Ursprunge sich schneidender Geraden übergeht, deren Neigungswinkel gegen die Axe der $y$ die Grösse $\pm \sqrt{\frac{p'}{p}}$ zur trigonometrischen Tangente hat, weil für die genannten Werthe von $\varphi$ und $\theta$ die Gl. (2) des Schnittes in $py'^2 - p'x'^2 = 0$ sich verwandelt.

Damit der Schnitt eine Parabel werde, muss $\varphi$ oder $\theta = 0$, d. h. die schneidende Ebene parallel sein zur Axe der $x$. Die Annahme $\theta = 0$ führt auf den in der $xy$-Ebene liegenden parabolischen Hauptschnitt. Für $\varphi = 0$ folgt aus (2):

$$(p \sin\theta^2 - p' \cos\theta^2)\, y'^2 + pp'x' = 0$$

als Gleichung der Parabel, in welcher eine durch die $x$-Axe gelegte Ebene dem Paraboloide begegnet, und deren Aeste sich nach der Richtung der positiven oder negativen $x$ erstrecken, je nachdem die Grösse $p \sin\theta^2 - p' \cos\theta^2$ negativ oder positiv ist, d. h. je nachdem

$$\operatorname{tg}\theta < \text{ oder } > \sqrt{\frac{p'}{p}}$$

ist. Für $\operatorname{tg}\theta = \pm \sqrt{\frac{p'}{p}}$ geht die obige Gleichung über in $x' = 0$, d. i. in die Gl. der jetzigen Axe der $y'$, welche, da für $\varphi = 0$ die Axe der $x'$ mit jener der $x$ zusammenfällt, in der $yz$-Ebene liegt. Diese beiden geradlinigen Schnitte sind daher dieselben, welche schon oben durch den Schnitt unserer Fläche durch die $yz$-Ebene erhalten wurden.

**303.** Wir haben gesehen, dass das Hyperboloid mit einer Hölung und das hyperbolische Paraboloid von Ebenen in geraden Linien geschnitten, oder mit anderen Worten, dass auf diesen krummen Flächen gerade Linien gezogen werden können. Wir wollen nun diese Geraden noch einer näheren Untersuchung unterziehen.

Die Gleichung des Hyperboloides mit einer Hölung ist bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

Irgend eine auf die Ebene der $xy$ senkrechte Ebene, deren Gleichung

$$y = mx + \mu \qquad (2)$$

sein mag, wird das Hyperboloid im Allgemeinen in einer Linie des 2ten Grades schneiden, deren in der Ebene der $xy$ liegende horizontale Projection die durch die Gl. (2) ausgedrückte Gerade ist, und deren Projection auf die Ebene $xz$:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{a^2b^2}\left[(a^2m^2 + b^2)\, x^2 + 2a^2\, m\mu x + a^2\,(\mu^2 - b^2)\right] \qquad (3)$$

sich durch Elimination von $y$ aus (1) und (2) ergibt. Soll nun der Schnitt ein geradliniger sein, so muss auch diese Projection desselben geradlinig sein und somit die Gl. (3) in zwei Gleichungen vom 1ten Grade sich zerfällen lassen. Hiezu wird erfordert, dass, da der 1te Theil ein vollständiges Quadrat ist, auch der 2te Theil ein solches sei, zu welchem Behufe zwischen den noch willkürlichen Grössen $m$ und $\mu$ die Relation:

$$(a^2m^2 + b^2)\, a^2\, (\mu^2 - b^2) = a^4m^2\mu^2$$

bestehen muss, aus welcher $\mu = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ folgt. Substituiren wir daher diesen immer reellen Werth in (2) und (3), so erhalten wir:

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \ldots (4), \quad \pm\frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{ab}\, x + \frac{am}{b} \ldots (5)$$

als Gleichungen einer Geraden, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Fläche des Hyperboloides liegt*). Das Radikal kann man in diesen Gleichungen entweder positiv oder negativ nehmen, nur muss es in beiden mit demselben Zeichen versehen werden.

Aus der Unbestimmtheit der Grösse $m$ in den Gl. (5) erhellt nun sogleich, dass auf unserer Fläche unendlich viele Gerade gezogen werden können, deren wesentlichste Eigenschaften folgende sind:

---

*) Anmerk. Um diese Gleichungen für das Ellipsoid oder Hyperboloid mit zwei Hölungen umzugestalten, dürfte man nur beziehungsweise $c\sqrt{-1}$ statt $c$, oder $b\sqrt{-1}$ statt $b$ schreiben; in beiden Fällen hören sie auf reell zu sein, daher auf diesen Flächen keine Geraden gezogen werden können.

1) Aus der Gl. (4) folgt, dass die horizontalen Projectionen derselben sämmtlich Tangenten sind an der Kehlellipse des Hyperboloides; denn die Elimination von $y$ aus (4) und der Gleichung $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$ der Kehlellipse führt auf eine Gleichung nach $x$ vom 2ten Grade, deren beide Wurzeln gleich sind, zum Beweise, dass die Gerade (4) die Kehlellipse nur in einem Punkte trifft, also berührt. Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dass die vertikalen Projectionen der Geraden auf die Ebenen der $xz$ und $yz$ Tangenten sind an den respektiven hyperbolischen Hauptschnitten des Hyperboloides.

2) Schneidet man den Asymtotenkegel des Hyperboloides, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

ist, durch die durch die Axe der $z$ gehende Ebene $y = mx$, so erhält man als Projection des Durchschnittes auf die Ebene der $xz$: $\pm\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{ab}x$; es sind also

$$y=mx, \quad \pm\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{ab}x$$

die Gleichungen einer der erzeugenden Geraden dieses Kegels, und man erkennt aus der Vergleichung derselben mit den Gl. (4) und (5), dass die Geraden des Hyperboloides mit den erzeugenden Geraden des Asymtotenkegels parallel laufen.

3) Da, wie man leicht einsieht, irgend drei der erzeugenden Geraden dieses Kegels nicht in einer Ebene liegen, so folgt aus 2), dass irgend drei Gerade auf dem Hyperboloide nie zu einer und derselben Ebene parallel sein können.

4) Vermöge des doppelten Zeichens in Gl. (5) haben immer je zwei auf dem Hyperboloide gezogene Gerade eine gemeinschaftliche horizontale Projection (4); irgend zwei dieser Geraden sind:

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad \frac{z}{c}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{ab}x+\frac{am}{b}, \qquad (A)$$

und

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad -\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{ab}x+\frac{am}{b}. \qquad (B)$$

Hiedurch sondern sich sämmtliche Gerade, welche auf dem Hyperboloide gezogen werden können, in zwei Systeme ($A$) und ($B$).

5) Irgend zwei Gerade desselben Systemes liegen nicht in einer und derselben Ebene, schneiden sich also nicht. Denn sind

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2},\quad \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{ab}x + \frac{am}{b}$$

und $y = m'x + \sqrt{a^2m'^2+b^2},\quad \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{a^2m'^2+b^2}}{ab}x + \frac{am'}{b}$

zwei Gerade aus dem Systeme $(A)$, so findet man als Bedingungsgleichung für den Durchschnitt [§. 256, 1.)]: $(m - m')^2 = 0$, welche, so lange die beiden Geraden von einander verschieden sind, offenbar nicht erfüllt ist. Für zwei Gerade, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers der Kehlellipse gehen, hätte man allerdings $m = m'$ [§. 211]; allein damit obige Gleichungen zwei solche Gerade repräsentiren, müsste $m = m'$ und das Radikal in beiden mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden, in welcher Form sie als Bedingung für den Durchschnitt die Gleichung $a^2m^2 + b^2 = 0$ liefern, welche ebenfalls durch keinen Werth von $m$ erfüllt werden kann. — Dasselbe gilt natürlich für das System $(B)$.

6) Jede Gerade des einen Systemes schneidet hingegen alle Geraden des anderen Systemes. Denn eliminirt man aus den Gleichungen $(A)$ und $(B)$, nachdem in letzteren der Allgemeinheit wegen $m'$ statt $m$ gesetzt worden, $x$, $y$ und $z$, so erhält man eine identische Gleichung.

7) Lässt man in den Gleichungen $(A)$ $m$ sich stetig verändern, oder mit anderen Worten diese Gerade sich stetig bewegen, so beschreibt sie dabei offenbar die krumme Fläche des Hyperboloides mit einer Hölung*). Diese gehört somit zur Familie der geradlinigen oder Regel-Flächen und insbesondere zu den windschiefen Flächen [§. 280], weil vermöge 5) je zwei aufeinanderfolgende Positionen der erzeugenden Geraden nicht in einer Ebene liegen.

Da ferner eine erzeugende Gerade aus dem Systeme $(A)$ in jeder ihrer Lagen alle Geraden des Systemes $(B)$ schneidet und das Bewegungsgesetz einer Geraden durch drei Bedingungen vollkommen bestimmt ist [§. 280], so folgt mit Rücksicht auf 3), dass das Hyperboloid mit einer Hölung durch die Bewegung einer Geraden beschrieben wird, welche sich beständig auf drei nicht zu einer und derselben Ebene parallele Gerade stützt.

Da übrigens die erzeugende Gerade auch aus dem Systeme $(B)$ und die Leitlinien aus jenem $(A)$ gewählt werden können, so kann

---

*) Anmerk. In der That erhält man die Gl. des Hyperboloides, wenn man aus den Gleichungen $(A)$ oder jenen $(B)$ die Grösse $m$ eliminirt, durch welche die Lage der erzeugenden Geraden bestimmt ist.

jedes Hyperboloid mit einer Hölung auf doppelte Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden.

**304.** Betrachten wir nun die geraden Linien, welche auf dem hyperbolischen Paraboloide gezogen werden können, welche Fläche durch die Gleichung

$$p'y^2 - pz^2 = pp'x \qquad (1)$$

dargestellt ist. Schneiden wir diese Fläche durch eine auf die Ebene der $xy$ senkrechte Ebene: $y = mx + \mu \ldots (2)$, so erhalten wir durch Elimination von $x$ als Gl. der Projection des Schnittes auf die Ebene der $yz$:

$$\frac{p}{p'}z^2 = y^2 - \frac{p}{m}y + \frac{p\mu}{m}, \qquad (3)$$

welche wieder, wenn der Schnitt ein geradliniger sein soll, in zwei Gleichungen vom 1ten Grade zerfallen muss, wozu erfordert wird, dass der zweite Theil ein vollständiges Quadrat sei. Als Bedingung hiefür haben wir $\frac{p\mu}{m} = \frac{p^2}{4m^2}$ zu setzen, woraus $\mu = \frac{p}{4m}$ folgt. Durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (2) und (3) erhalten wir:

$$y = mx + \frac{p}{4m} \ldots . (4), \qquad \pm z = \sqrt{\frac{p'}{p}}.y - \frac{\sqrt{pp'}}{2m} \ldots . (5)$$

für die gesuchten Gleichungen einer Geraden, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Fläche des Paraboloides liegt. Für die Projection derselben auf die Ebene der $xz$ findet man leicht:

$$\pm z = m\sqrt{\frac{p'}{p}}.x - \frac{\sqrt{pp'}}{4m}. \qquad (6)$$

Diese Gleichungen sind nun immer reell, und da die Grösse $m$ willkürlich ist, so lassen sich auf dem hyperbolischen Paraboloide unendlich viele gerade Linien ziehen.

1) In Folge des doppelten Zeichens in (5) haben je zwei dieser Geraden immer eine gemeinschaftliche horizontale Projection, wodurch sich dieselben in zwei Systeme $(A)$ und $(B)$ scheiden; jene des einen Systemes sind durch die Gleichungen:

$$y = mx + \frac{p}{4m}, \quad + z = \sqrt{\frac{p'}{p}}.y - \frac{\sqrt{pp'}}{2m}, \qquad (A)$$

die des anderen Systemes durch die Gleichungen:

$$y = mx + \frac{p}{4m}, \quad - z = \sqrt{\frac{p'}{p}}.y - \frac{\sqrt{pp'}}{2m} \qquad (B)$$

repräsentirt.

2) Die horizontalen Projectionen sämmtlicher Geraden sind Tangenten an dem horizontalen Hauptschnitte $y^2 = px$ der Fläche, die vertikalen $xz$-Projectionen Tangenten an dem vertikalen Hauptschnitte $z^2 = -px$; man überzeugt sich hievon auf die bekannte Weise, wenn man die Gleichungen (4) und (6) mit jenen der respektiven Hauptschnitte verbindet.

3) Da der Coefficient von $y$ in (5) eine constante von $m$ unabhängige Grösse ist, so sind die $yz$-Projectionen der Geraden des Systemes $(A)$ unter sich und zu der Geraden

$$z = +\sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot y \tag{7}$$

parallel, in welcher das Paraboloid von der Ebene der $yz$ geschnitten wird. Es müssen daher auch die projicirenden Ebenen unter sich parallel sein, woraus folgt, dass sämmtliche Gerade des Systems $(A)$ parallel sind zu der durch die Gl. (7) dargestellten Ebene. Diese Ebene, oder eine zu ihr parallele heisst die Richtebene der Geraden des Systemes $(A)$.

Auf dieselbe Weise findet man, dass sämmtliche Gerade des Systemes $(B)$ zur Richtebene

$$z = -\sqrt{\frac{p'}{p}} \cdot y \tag{8}$$

parallel laufen. — Beide Richtebenen sind, wie man sieht, senkrecht auf der $yz$-Ebene und schneiden sich daher in der Axe der Fläche, oder in einer zu dieser parallelen Geraden.

So wie im vorigen §. beweist man auch hier, dass

4) irgend zwei Gerade desselben Systemes nicht in einer und derselben Ebene liegen, sich also niemals schneiden; und dass im Gegentheile

5) jede Gerade des einen Systemes alle Geraden des anderen Systems schneidet.

6) Betrachtet man wieder das hyperbolische Paraboloid als den geometrischen Ort dieser Geraden und berücksichtiget man, dass die Bewegung einer geraden Linie durch drei Bedingungen vollkommen bestimmt ist, so ergibt sich hieraus eine doppelte Erzeugungsart dieser krummen Fläche:

*a*) Durch Bewegung einer Geraden [etwa aus dem Systeme $(A)$], welche sich beständig auf drei zu einer gegebenen Ebene parallele Gerade [aus dem Systeme $(B)$] stützt.

*b*) Durch Bewegung einer Geraden [etwa aus dem Systeme $(A)$], welche an zwei gegebenen nicht in derselben Ebene liegenden Geraden

[aus dem Systeme ($B$)] fortgleitet und dabei einer gegebenen Ebene (Richtebene) beständig parallel bleibt. (Vergl. §. 280. II. Beisp.)

Auch diese Fläche gehört demnach zu den geradlinigen und insbesondere windschiefen Flächen, da vermöge 4) je zwei aufeinander folgende Positionen der erzeugenden Geraden nicht in einer und derselben Ebene liegen. Beide Erzeugungsarten lassen sich übrigens bei jedem Paraboloide auf zweifache Weise ausführen, je nachdem die erzeugende Gerade aus dem einen oder anderen Systeme gewählt wird.

## NAEHERE BESTIMMUNG DER DURCH EINE GEGEBENE GLEICHUNG DES $2^{ten}$ GRADES AUSGEDRUECKTEN FLAECHE.

**305.** Ist eine Gleichung des $2^{ten}$ Grades zwischen drei Veränderlichen mit bestimmten Coefficienten gegeben, so entsteht die Frage, welche der bisher betrachteten Flächen durch dieselbe ausgedrückt werde? Mit der Beantwortung derselben wollen wir uns zum Schlusse dieses Kapitels heschäftigen.

Die vorgelegte Gleichung sei:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F \end{array}\right\} = 0. \qquad (1)$$

Wir untersuchen zunächst, ob die Fläche einen Mittelpunkt besitze. Die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ desselben ergeben sich bekanntlich [§. 284] durch Auflösung der Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A\xi + B\eta + B'\zeta + C = 0 \\ A'\eta + B\xi + B''\zeta + C' = 0 \\ A''\zeta + B'\xi + B''\eta + C'' = 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

und deren allgemeine Ausdrücke sind:

$$\xi = \frac{V}{\Delta}, \quad \eta = \frac{V'}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{V''}{\Delta},$$

wo $\Delta = AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - AA'A'' - 2BB'B''$ (3)

ist, und $V$, $V'$, $V''$ die in §. 284 angeführten Ausdrücke bezeichnen, welche wir nicht weiter benöthigen, da es in jedem einzelnen Falle einfacher ist, die Gl. (2) unmittelbar aufzulösen.

Bei der Auflösung dieser Gleichungen können nun folgende drei Fälle eintreten:

1) Es ergeben sich für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ endliche und bestimmte Werthe; die Grösse $\Delta$ muss dann nothwendig von 0 verschieden sein, und die Fläche hat in diesem Falle einen Mittelpunkt.

2) Die Elimination führt auf einen Widerspruch; diess tritt ein, wenn $\Delta = 0$ und die Zähler $V$, $V'$, $V''$ von Null verschieden sind; die Fläche hat dann keinen Mittelpunkt;

3) die Elimination führt auf eine identische Gleichung, was dann eintritt, wenn die Gleichungen (2) unbestimmt, d. i. nicht sämmtlich von einander verschieden sind, sondern sich auf zwei, oder gar nur eine einzige reduciren. In diesem Falle verschwinden nebst $\Delta$ auch noch die Zähler $V$, $V'$, $V''$ und es existiren unendlich viele Mittelpunkte.

Wir wollen nun diese Fälle der Reihe nach betrachten.

## I. Fall: $\Delta \gtrless 0$.

Verlegt man den Ursprung, ohne die Richtung der Axen zu ändern, in den Mittelpunkt, dessen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ durch die Auflösung der Gl. (2) schon bekannt sind, so nimmt die Gl. (1) der Fläche folgende Form an [§. 284]:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz = H \quad (4)$$

wo

$$H = - C\xi - C'\eta - C''\zeta - F \quad (5)$$

ist, und mittelst der bekannten Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ leicht gerechnet werden kann.

Ergibt sich $H = 0$, so ist die Gl. (4) in Bezug auf $x$, $y$, $z$ homogen und gehört demnach einer Kegelfläche an, oder auch einem Punkte, was man leicht dadurch unterscheidet, dass man untersucht, ob ein Schnitt durch eine Ebene, etwa $z = h$, reell oder imaginär ausfällt.

Ist aber $H$ von Null verschieden, so kann die Gleichung nur einem Ellipsoide, oder einem der beiden Hyperboloide angehören, drei Flächen, welche sich bekanntlich durch die Anzahl ihrer reellen Axen unterscheiden. Wir wollen daher diese durch die Coefficienten der Gl. (4) zu bestimmen suchen.

Es seien
$$x = mz, \quad y = nz$$
die Gleichungen einer durch den Ursprung (Mittelpunkt) gehenden Geraden, welche die Fläche in einem (reellen oder imaginären) Punkte $x$, $y$, $z$ treffen wird, dessen Radiusvektor $R$ durch die Gleichung

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (m^2 + n^2 + 1)\, z^2$$

bestimmt ist. Die Verbindung der Gleichungen $x = mz$, $y = nz$ mit der Gl. (4) der Fläche durch Elimination von $x$ und $y$ gibt aber für diesen Durchschnittspunkt:

$$z^2 = \frac{H}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bmn + 2B'm + 2B''n},$$

wodurch $$R^2 = \frac{H(m^2+n^2+1)}{Am^2+A'n^2+A''+2Bmn+2B'm+2B''n}$$

wird. Bekanntlich sind aber die Axen der Flächen nichts anderes als die von den Flächen begrenzten Durchschnittslinien der Hauptebenen; der Radiusvektor $R$ wird daher in eine der drei Axen übergehen, wenn wir $m$ und $n$ so bestimmen, dass er mit einer dieser Durchschnittslinien zusammenfällt, oder mit anderen Worten, zu einer der 3 Hauptrichtungen parallel werde; diese Grössen müssen zu diesem Ende den Gleichungen (12) des §. 286:

$$Am + Bn + B' = ms$$
$$A'n + Bm + B'' = ns$$
$$A'' + B'm + B''n = s$$

Genüge leisten, wo $s$ bekanntlich durch die Gleichung:

$$s^3-(A+A'+A'')s^2-(B^2-AA'+B'^2-AA''+B''^2-A'A'')s+\varDelta=0 \quad (6)$$

bestimmt wird. Addirt man nun diese 3 Gleichungen, nachdem man die 1te mit $m$, die 2te mit $n$ multiplicirt hat, so erscheint links vom Gleichheitszeichen der Nenner des obigen Ausdruckes von $R^2$, nach dessen Substitution

$$R^2 = \frac{H}{s} \quad (7)$$

wird, welche Gleichung sofort die Werthe der 3 Halbaxen darbietet, sobald man darin für $s$ die 3 Wurzeln der Gl. (6) substituirt. Diese Werthe fallen nun, wie man sieht, reell oder imaginär aus, je nachdem die Grösse $\frac{H}{s}$ positiv oder negativ sich ergibt. Da nun das Zeichen von $H$ aus (5) bekannt ist, so bedarf man nur noch der Kenntniss der Zeichen der Wurzeln der Gl. (6); diese Gleichung lässt aber bekanntlich nur reelle Wurzeln zu und hat daher — gemäss der Cartesischen Zeichenregel — genau so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel.

Die vorgelegte Gleichung gehört endlich einem Ellipsoide, einem Hyperboloide mit einer, oder einem solchen mit zwei Hölungen, je nachdem diese Untersuchung drei, zwei, oder nur eine Axe als reell zu erkennen gibt. — Erscheinen alle drei Axen imaginär, so ist es auch die Fläche, und die vorgelegte Gleichung ermangelt dann einer geometrischen Bedeutung.

Beispiel. Die vorgelegte Gleichung sei:

$$x^2 - 2y^2 + xz - 2x + 4y + 7 = 0;$$

die Gleichungen des Mittelpunktes werden:

$$2x + z - 2 = 0, \quad -y + 1 = 0, \quad x = 0,$$

aus welchen für den Mittelpunkt die endlichen und bestimmten Coordinatenwerthe:

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2$$

folgen. Hiemit wird $H = -9$; die cubische Gleichung lautet:

$$s^3 + s^2 - \tfrac{9}{4}\, s - \tfrac{1}{2} = 0$$

mit 1 Zeichenwechsel, folglich mit 1 positiven und 2 negativen Wurzeln; da nun $H$ negativ, so sind zwei Axen reell und die Fläche ist ein Hyperboloid mit einer Hölung.

## II. Fall: $\Delta = 0$;

### und die Mittelpunktsgleichungen widersprechend.

Die durch die Gl. (1) dargestellte Fläche hat in diesem Falle keinen Mittelpunkt, und kann daher nur eines der beiden Paraboloide oder ein parabolischer Cylinder sein, welche Flächen durch die Hauptschnitte, in welchen die Fläche (1) von den coordinirten Ebenen geschnitten wird, leicht unterschieden werden, wenn wir folgende Punkte beachten.

1) Die besagten Hauptschnitte werden durch die Zeichen ihrer charakteristischen Binome:

$$B^2 - AA' = \delta, \quad B'^2 - AA'' = \delta', \quad B''^2 - A'A'' = \delta''$$

als Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln (mit ihren Varietäten) charakterisirt, je nachdem diese Binome negativ, positiv oder Null sind.

2) Das elliptische Paraboloid kann bekanntlich nicht in Hyperbeln, das hyperbolische nicht in Ellipsen geschnitten werden; diese Binome werden daher nothwendig einerlei Zeichen haben, können jedoch auch zum Theil oder alle $= 0$ sein.

3) Da die Axe eines Paraboloides nicht zu allen drei coordinirten Ebenen parallel sein kann, und diese Flächen bekanntlich nur von zur Axe parallelen Ebenen in Parabeln geschnitten werden können, so muss, soll die Fläche (1) einem Paraboloide angehören, mindestens eines der drei Binome von 0 verschieden sein, und das Zeichen dieses Binomes — ob negativ oder positiv — entscheidet für das elliptische oder hyperbolische Paraboloid.

4) Ein parabolischer Cylinder kann nur in Parabeln und geraden Linien geschnitten werden; für diese Fläche müssen daher alle drei Binome verschwinden.

Beisp. 1) Die gegebene Gleichung sei:

$$3x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy - 2yz + 2x - 1 = 0;$$

man findet als Gleichungen des Mittelpunktes:

$$3x + 3y + 1 = 0; \quad 4y + 3x - z = 0; \quad z - y = 0;$$

die Differenz der beiden ersten Gleichungen ist: $y - z - 1 = 0$ und widerspricht der dritten Gleichung: $y - z = 0$; da ferner $\delta^2 = B^2 - AA' = -3$ negativ ist, so ist die vorgelegte Fläche ein elliptisches Paraboloid.

Beisp. 2) Aus der Gleichung [§. 280]:

$$bxz - ayz + \beta x - \alpha y = 0$$

folgen die Gleichungen des Mittelpunktes:

$$bz + \beta = 0, \quad az + \alpha = 0, \quad bx - ay = 0,$$

von welchen die beiden ersten einen Widerspruch enthalten; ferner ist $\delta = 0$; $\delta' = \frac{1}{4} b^2$, also — eben so wie $\delta'' = \frac{1}{4} a^2$ positiv; die Gl. gehört daher zu einem hyperbolischen Paraboloide.

## III. Fall: $\Delta = 0$;

### und die Mittelpunktsgleichungen unbestimmt.

Dieser Fall wurde bereits in §. 284 [3) *a*) und *b*)] vollständig erörtert. Man hat nur zu untersuchen, ob die Mittelpunktsgleichungen sich auf zwei oder nur auf eine Gleichung reduciren.

Im 1ten Falle bedeutet die Gleichung einen elliptischen oder hyperbolischen Cylinder; und da ein Cylinder nicht gleichzeitig von jeder der drei coordinirten Ebenen in zwei parallelen Geraden geschnitten werden kann, so muss mindestens eines der Binome $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ von Null verschieden sein, dessen Zeichen zugleich die beiden Cylinder auf bekannte Weise von einander unterscheidet.

Im 2ten Falle bedeutet die Gleichung ein System zweier paralleler Ebenen, und die drei Binome werden sämmtlich der Nulle gleich.

In beiden Fällen kann übrigens der Ort der Gl. (1) imaginär sein; beide Cylinder können in eine Gerade, der hyperbolische in zwei sich schneidende Ebenen, und das System der zwei parallelen Ebenen in eine einzige Ebene degeneriren. Ein oder zwei zu den coordinirten Ebenen parallel geführte Schnitte geben hierüber ohne Schwierigkeit die nöthige Auskunft.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei:

$$4x^2 + 2z^2 + 4xy - 6xz - 2yz - 12y + 6z - 1 = 0;$$

die Gleichungen des Mittelpunktes:

$$4x + 2y - 3z = 0; \quad 2x - z - 6 = 0; \quad -3x - y + 2z + 3 = 0;$$

sind unbestimmt und reduciren sich auf zwei, da die aus zweien derselben gezogenen Werthe von $x$ und $y$ die 3te Gleichung für jeden Werth von $z$ identisch machen. Die Gleichung gehört also einem Cylinder an und zwar einem hyperbolischen, da $\delta = B^2 - AA' = 4$

positiv ist, und der Schnitt durch die Ebene der $xy$ die reelle Hyperbel: $x^2 + 4xy - 12y - 1 = 0$ darbietet. Man kann die gegebene Gleichung auf die Form:

$$y - \tfrac{1}{2}z = \frac{4\,(x - \frac{1}{2}z)^2 - 1}{12 - 4\,(x - \frac{1}{2}z)}$$

bringen und erkennt in dieser sogleich die für cylindrische Flächen charakteristische Gleichungsform: $y - bz = \varphi\,(x - az)$ [§. 273].

# DRITTER THEIL.

# DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

# I. ABSCHNITT.

## DIFFERENZIALRECHNUNG.

## ERSTES KAPITEL.

### GRUNDBEGRIFFE DER DIFFERENZIALRECHNUNG. — DIFFERENZIATION DER FUNKTIONEN EINER UND MEHRERER VERAENDERLICHEN GROESSEN.

### I. Grundbegriffe der Differenzialrechnung.

**306.** Betrachten wir eine Funktion $y = f(x)$ einer einzigen unabhängigen Veränderlichen $x$ in Bezug auf die allgemeinste, jeder Funktion zukommende Eigenschaft, darin bestehend, dass die Funktion $y$ ihren Werth verändert, sobald $x$ eine Aenderung seines Werthes erleidet, so bietet sich sogleich die Bemerkung dar, dass die verschiedenen Funktionen bei einer und derselben Zunahme der unabhängig Veränderlichen die eine mehr, die andere weniger sich verändern, oder mit anderen Worten, dass die Geschwindigkeit des Wachsthums der Funktion verschieden sei für die verschiedenen Funktionen. Ja selbst eine und dieselbe Funktion ändert sich im Allgemeinen bei gleicher Zunahme der unabhängig Veränderlichen ungleich rasch, je nach dem speciellen Werthe der letzteren, von welchem aus die Zunahme erfolgt. Dabei ändern sich die Funktionen im Allgemeinen stetig, d. h. jeder unendlich kleinen Aenderung der unabhängig Veränderlichen entspricht eine gleichfalls unendlich kleine Zu- oder Abnahme der Funktion, und nur für besondere Werthe der unabhängig Veränderlichen erleiden gewisse Funktionen eine Unterbrechung der Stetigkeit. Die Probleme der höheren Geometrie, der physikalischen und technischen Wissenschaften führen zuletzt grösstentheils auf Betrachtungen, welche von der Geschwindigkeit des Wachsthums der Funktionen abhängen, daher die Aufgabe, für diesen Begriff einen analytischen Ausdruck herzustellen, von grösster Wichtigkeit ist.

Lassen wir zu diesem Behufe in der Funktion $y = f(x)$ die unabhängig veränderliche Grösse $x$, von einem beliebigen aber bestimmten Werthe ausgehend, um die willkürliche Grösse $\Delta x$ zunehmen, und



Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

bezeichnen die dadurch bewirkte Veränderung der Funktion $y$ mit $\Delta y$, so ist $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, somit wegen $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

und
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Die Funktion ändert sich offenbar um so rascher, je grösser $\Delta y$ im Verhältnisse zu $\Delta x$, je grösser also der Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, und wir werden demnach dieses Verhältniss als das natürliche Maass der Geschwindigkeit des Wachsthums der Funktion betrachten können. Der Ausdruck dieses Verhältnisses ist: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$, und wird im Allgemeinen, wie man sieht, wieder eine Funktion von $x$ sein, wie es auch sein muss, weil ja eine Funktion $f(x)$ an den verschiedenen durch die speciellen Werthe von $x$ bestimmten Stellen ihres Verlaufes sich ungleich rasch verändert; der besagte Ausdruck hängt aber auch noch von dem der Grösse $\Delta x$ beigelegten Werthe ab; so lange dieser willkürlich ist, bleibt auch der Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unbestimmt, wodurch aber dasselbe unfähig würde, eine völlig bestimmte Grösse, nämlich die Geschwindigkeit des Wachsthums der Funktion bei einem bestimmten Werthe von $x$ auszudrücken, und von dem Verlaufe der Funktion $f(x)$ in der Nähe dieses bestimmten Werthes von $x$ abhängig wäre. Diese Unbestimmtheit wird beseitiget, wenn wir $\Delta x$ unendlich klein werden lassen; es wird dann, in Folge der Stetigkeit der Funktion $y$, auch $\Delta y$ unendlich abnehmen, während das Verhältniss $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ dieser beiden unendlich abnehmenden Grössen einer bestimmten und endlichen Grenze sich nähern wird. Diese Grenze ist im Allgemeinen wieder eine Funktion von $x$, und wird die abgeleitete oder derivirte Funktion genannt, und nach Lagrange mit $f'(x)$ oder $y'$ bezeichnet.

Diese abgeleitete Funktion $f'(x)$, welche nach dem oben Gesagten durch die Gleichung:

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

als Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt wird, ist nun als das genaue Maass der Geschwindigkeit zu betrachten, mit welcher die Funktion sich ändert, wenn man die unabhängig Veränderliche sich ändern lässt. Denn der Ausdruck dieses Grenzwerthes ist nun voll-

kommen bestimmt und hängt weder von den absoluten Werthen der beiden Inkremente $\Delta x$ und $\Delta y$ ab, noch von dem Verlaufe der Funktion in der Nähe desjenigen Werthes von $x$, von welchem aus die Aenderung erfolgt.

Die vorstehende Betrachtung wird durch die geometrische Darstellung der Funktion $y = f(x)$ sehr anschaulich. Sei (Fig. 22) $AB$ die Curve, welche aus der Construction der Gleichung $y = f(x)$, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, hervorgeht. Lassen wir die Abscisse $x$, von irgend einem Werthe $x = OP$ aus um das Stück $PP' = \Delta x$ zunehmen, so wächst die Ordinate $y$ um das Stück $M'P' - MP = M'R = \Delta y$ und es folgt aus dem $\triangle\ MM'R$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{M'R}{MR} = \operatorname{tg} M'MR;$$

das Verhältniss $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der gleichzeitigen Zunahmen der Abscisse und Ordinate stellt demnach die trigonometrische Tangente des Winkels dar, welchen die durch die Punkte $MM'$ gezogene Sekante mit der Abscissenaxe einschliesst. Lassen wir nun $\Delta x$ unendlich klein werden, so wird auch $\Delta y$ gegen Null convergiren; der Punkt $M'$ wird sich dem Punkte $M$ unendlich nähern und die Sekante mit der Tangente $MT$ zusammen fallen. Bezeichnen wir daher den Winkel, welchen letztere mit der Abscissenaxe einschliesst mit $\tau$, so verwandelt sich obige Gleichung, wenn wir zur Grenze übergehen, in folgende:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \operatorname{tg} \tau.$$

Die abgeleitete Funktion $f'(x)$ stellt demnach die trigonometrische Tangente des Winkels dar, welchen die geometrische Tangente an dem durch die Abscisse $= x$ bestimmten Punkte der Curve $y = f(x)$ mit der Axe der $x$ einschliesst.

Der Winkel $\tau$, welchen die Tangente am Punkte $M$ mit der $x$-Axe bildet, bestimmt offenbar die Steigung der Curve in diesem Punkte; diese ist aber einerlei mit dem Grade der Schnelligkeit des Wachsthums der Funktion an dieser Stelle, so dass also auch diese durch die abgeleitete Funktion $f'(x) = \operatorname{tg} \tau$ bestimmt wird.

**307.** Die Aenderungen $\Delta x$, $\Delta y$ werden, insoferne dieselben nichts anderes sind, als die Unterschiede zweier aufeinanderfolgenden Werthe von $x$ und $y$, Differenzen genannt; lässt man dieselben unendlich klein werden, so führen sie den Namen Differenziale, und werden mit $dx$ und $dy$ bezeichnet, indem man die Charakteristik $d$ an die

Stelle von $\Delta$ schreibt. Die Grenze $f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, welcher sich der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beim unendlichen Abnehmen von $x$ nähert, wird der Differenzialquotient genannt und mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet; dieser ist somit einerlei mit der abgeleiteten Funktion, und durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

definirt.

So lange $\Delta x$ einen endlichen Werth hat, ist $\frac{dy}{dx}$ von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verschieden, und man hat daher, wenn der Unterschied mit $\varepsilon$ bezeichnet wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine mit $\Delta x$ gleichzeitig verschwindende Grösse. Hieraus folgt:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \varepsilon \Delta x, \quad \text{oder} \quad \Delta y = f'(x)\, \Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

welche Gleichung, wenn man $\Delta x$ und $\Delta y$ unendlich klein werden lässt, sich in folgende:

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx \quad \text{oder} \quad dy = f'(x)\, dx \tag{1}$$

verwandelt; d. h. das Differenzial der Funktion ist gleich dem Produkte aus dem Differenzialquotienten in das Differenzial der unabhängig veränderlichen Grösse. Der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ wird aus diesem Grunde auch Differenzialcoefficient genannt.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Differenzialien Grössen von derselben Gattung sind, wie diejenigen, deren unendlich kleine Inkremente sie vorstellen. So ist $dx$ eine Linie, Fläche, ein Zeittheilchen, wenn $x$ eine Linie, eine Fläche oder die Zeit vorstellt.

Eine Funktion $y = f(x)$ differenziren heisst, das Differenzial derselben suchen, welches, wie aus (1) erhellt, sofort gegeben ist, sobald man den Differenzialquotienten der Funktion kennt. Der Weg, auf welchem dieser erhalten wird, ist durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

vorgezeichnet; man hat nämlich in der gegebenen Funktion $x + \Delta x$ an die Stelle von $x$ zu setzen, von dem Resultate dieser Substitution die ursprüngliche Funktion abzuziehen, und die Differenz durch $\Delta x$

zu dividiren; endlich die Grenze zu suchen, welcher sich der so erhaltene Quotient bei der unendlichen Abnahme von $\Delta x$ nähert.

Um diese Operation nicht für jeden einzelnen Fall vornehmen zu müssen, werden zunächst die Differenzialquotienten der einfachsten Funktionen:

$$x^m,\ a^x,\ l\,x,\ \sin x,\ \cos x,\ \text{arc}\sin x \text{ und } \text{arc}\cos x$$

ein für allemal entwickelt, und sodann Regeln aufgestellt, nach welchen man das Differenzial jeder zusammengesetzten Funktion ohne Schwierigkeit bestimmen kann.

Die Entwickelung der Vorschriften, nach welchen das Differenzial jeder wie immer beschaffenen Funktion gefunden wird, und die Anwendung der Eigenschaften der Differenzialien und Differenzialquotienten auf die verschiedenen Probleme der Analysis und Geometrie bilden den Gegenstand der Differenzialrechnung.

## II. Differenziation der einfachen Funktionen einer unabhängigen veränderlichen Grösse.

**308.** Differenziation der Potenz. Es sei $y = x^m$, unter $m$ eine constante, übrigens beliebige Zahl verstanden, so wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = x^{m-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

oder wenn man der Kürze wegen $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ setzt, wo $\alpha$ eine mit $\Delta x$ verschwindende Grösse bezeichnet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{m-1} \cdot \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha}.$$

Lässt man nun $\beta$ eine Grösse bedeuten, welche gleichzeitig mit $\alpha$ unendlich klein wird, so kann man:

$$(1 + \alpha)^m = 1 + \beta \ldots\ldots\ (p)$$

setzen; hiemit verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{m-1} \cdot \frac{\beta}{\alpha},$$

aus welcher sofort

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{m-1} \cdot \lim \frac{\beta}{\alpha}$$

folgt. Es kommt daher nur noch auf die Bestimmung des Grenzwerthes: $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ an. Aus der Gleichung $(p)$ folgt aber, wenn man von

beiden Gliedern die natürlichen Logarithmen nimmt: $ml(1+\alpha)=l(1+\beta)$, oder: $\frac{1}{m}=\frac{l(1+\alpha)}{l(1+\beta)}$ d. i. wenn man beiderseits mit $\frac{\beta}{\alpha}$ multiplicirt:

$$\frac{1}{m}.\frac{\beta}{\alpha}=\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}:\frac{l(1+\beta)}{\beta}=l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}:l(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Geht man nun zur Grenze über, und beachtet, dass $\lim l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = l\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = le = 1$ [§. 62], und aus gleichen Gründen auch $\lim l(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=1$ ist, so kommt: $\frac{1}{m}\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, woraus $\lim\frac{\beta}{\alpha}=m$ folgt. Hiemit erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}, \text{ und } d.x^m=mx^{m-1}\,dx.$$

Die in dieser Gleichung ausgesprochene Regel zur Differenziation einer Potenz lässt sich leicht in Worten ausdrücken. Als besondere Fälle derselben mögen ihrer häufigen Anwendung wegen folgende bemerkt werden:

$$\text{für } m=\tfrac{1}{2}:\ d.x^{\frac{1}{2}}=d.\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{für } m=-1:\ d.x^{-1}=d.\frac{1}{x}=-\frac{dx}{x^2}.$$

**309.** Differenziation der Exponentialfunktion. Es sei $y=a^x$, so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x.\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

und somit

$$\frac{dy}{dx}=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x.\lim\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Es ist aber [§. 61] $\lim\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{\log a}{\log e}$, wo die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme genommen werden können und $e=2{,}7182\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Man hat daher:

$$\frac{dy}{dx}=a^x\frac{\log a}{\log e}, \text{ und } d.a^x=a^x\frac{\log a}{\log e}dx.$$

Gebraucht man, wie gewöhnlich, die natürlichen Logarithmen, so gehen diese Gleichungen in die folgenden einfacheren über:

$$\frac{dy}{dx}=a^x.la, \text{ und } d.a^x=a^x.la.dx.$$

Für $a=e$ wird $y=e^x$, und

$$\frac{dy}{dx}=e^x,\quad d.e^x=e^xdx;$$

die natürliche Exponentialfunktion besitzt demnach die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihre derivirte Funktion gleich ist der ursprünglichen Funktion.

**310.** Differenziation des Logarithmus. Für $y = \log x$ erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}};$$

setzt man hier der Kürze halber $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Es ist aber $\lim \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \lim \log (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log \lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ $= \log e$, somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e \quad \text{und } d.\log x = \frac{1}{x} . \log e . dx$$

Ist $b$ die Grundzahl der hier mit log bezeichneten Logarithmen, so hat man bekanntlich $\log e = \frac{1}{lb}$ [§. 65], wenn mit $l$ wie gewöhnlich die natürlichen Logarithmen bezeichnet werden; man kann daher obige Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$d. \log x = \frac{1}{lb} . \frac{dx}{x}.$$

Ist endlich $b = e$, so wird $y = lx$ und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad d.lx = \frac{dx}{x}.$$

**311.** Differenziation der Funktionen: $\sin x$ und $\cos x$.

1) Es sei $y = \sin x$, so findet man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

d. i. wenn Kürze halber $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$ gesetzt wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos (x + \alpha).$$

Lässt man nun $\Delta x$ und somit auch $\alpha$ unendlich abnehmen, so folgt, weil bekanntlich $\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ ist:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \text{und } d. \sin x = \cos x \, dx.$$

2) Für $y = \cos x$ erhält man auf ähnliche Weise:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = - \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sin(x + \alpha);$$

und hieraus durch den Uebergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = - \sin x, \quad d.\cos x = - \sin x \, dx.$$

**312.** Differenziation der cyclometrischen Funktionen: arc sin $x$ und arc cos $x$.

1) Es sei $y = \text{arc} \sin x$, so ist $x = \sin y$, somit $\Delta x = \sin(y + \Delta y) - \sin y = 2 \sin \frac{\Delta y}{2} \cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)$, folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{2 \sin \frac{\Delta y}{2} \cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)} = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin \frac{\Delta y}{2}} \times \frac{1}{\cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)};$$

hieraus erhält man nun, zur Grenze übergehend:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin y^2}},$$

oder auch wegen $\sin y = x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d.\text{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2) Für $y = \text{arc} \cos x$ wird $x = \cos y$, somit $\Delta x = \cos(y + \Delta y) - \cos y = - 2 \sin \frac{\Delta y}{2} \sin\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)$, und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\Delta y}{2 \sin \frac{\Delta y}{2} \sin\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)} = - \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin \frac{\Delta y}{2}} \times \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)};$$

hieraus: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{1}{\sin y} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos y^2}};$

also:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d.\text{arc} \cos x = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

## III. Differenziation der Funktionen von Funktionen und der zusammengesetzten Funktionen.

**313.** Es sei $y = F(u)$ und $u = f(x)$, so wird bekanntlich $y$ Funktion einer Funktion genannt; wie man sieht, ist im Grunde $y$ doch nur eine Funktion von $x$, und es entsteht daher die Aufgabe, den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ dieser Funktion in Bezug auf die unabhängig Veränderliche $x$ zu entwickeln. Lassen wir zu diesem Ende $x$ um $\Delta x$ zunehmen, so werden auch $u$ und $y$ beziehungsweise die Aenderungen $\Delta u$ und $\Delta y$ erleiden. Aus der Gleichung $y = F(u)$ folgt zunächst $\Delta y = F(u + \Delta u) - F(u)$, folglich ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta x},$$

eine Gleichung, welcher man auch die Form:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

geben kann. Beim unendlichen Abnehmen von $\Delta x$ wird, wie aus dem Begriffe des Differenzialquotienten [§. 307] unmittelbar erhellt:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}, \quad \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx};$$

hiemit verwandelt sich obige Gleichung in folgende:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \text{ woraus } dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

folgt. Das Symbol $\frac{dy}{du}$ bedeutet, wie man aus der obigen Entstehungsweise desselben sogleich erkennt, den Differenzialquotienten der Funktion $y = F(u)$, so genommen, als ob $u$ die unabhängig Veränderliche wäre, oder — wie wir kurz sagen werden — den Differenzialquotienten der Funktion $y$ nach (oder in Bezug auf) $u$ genommen.

Die obige Gleichung spricht daher den Satz aus, dass der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y$ in Bezug auf $x$ gefunden wird, wenn man den Differenzialquotienten dieser Funktion, nach $u$ genommen, mit dem Differenzialquotienten von $u$, nach $x$ genommen, multiplicirt.

Wäre die Funktion $y = F(u)$ gegeben, und $u = f(z)$, $z = \varphi(x)$, so fände man auf gleiche Weise:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \text{ und } dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx$$

u. s. f. für eine beliebige Anzahl von Funktionen.

Die Anwendung dieser Regel auf besondere Beispiele bietet keine Schwierigkeiten dar. So findet man:

für $y = l \sin x$, indem man $\sin x = u$ setzt, $y = lu$, und

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sin x}, \quad \frac{du}{dx} = \cos x; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} . \cos x = \operatorname{cotg} x,$$

somit $d.l \sin x = \operatorname{cotg} x \, dx$;

für $y = (lx)^n$, indem man $lx = u$ setzt, $y = u^n$, und

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1} = n\,(lx)^{n-1}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = n\,(lx)^{n-1} . \frac{1}{x},$$

somit $d.\,(lx)^n = n\,(lx)^{n-1} \frac{dx}{x}$.

Bei einiger Uebung wird, wie man bald findet, die Einführung solcher Zwischenfunktionen, welche am Ende doch wieder herausfallen, ganz entbehrlich. So findet man leicht:

$$d.\,l \sin x = \frac{d.\sin x}{\sin x} [\text{nach §. 310}] = \frac{\cos x \, dx}{\sin x} \, [\text{nach §. 311}] = \operatorname{cotg} x \, dx,$$

$$d.\,[lx]^n = n\,[lx]^{n-1} \, d.\,lx \, [\text{nach §. 308}] = n\,[lx]^{n-1} \frac{dx}{x},$$

übereinstimmend mit den früheren Resultaten.

**314.** Es sei nun $y = f\,(u, v)$, wo $u$ und $v$ beliebige Funktionen der unabhängig Veränderlichen $x$ bedeuten sollen, und $y$ aus diesen Funktionen auf eine beliebige Weise gebildet sein mag. Die Funktion $y$, welche in diesem Falle eine zusammengesetzte Funktion genannt wird, ist auch hier mittelbar eine Funktion von $x$, und es bietet sich wieder die Aufgabe dar, den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ derselben, unmittelbar nach $x$ genommen, aufzusuchen. Zu diesem Behufe sei $\Delta x$ der der unabhängig Veränderlichen $x$ ertheilte Zuwachs, welcher in $y$, $u$, $v$, die Zunahmen $\Delta y$, $\Delta u$, $\Delta v$ nach sich zieht; aus der Gleichung $y = f\,(u, v)$ folgt:

$$\Delta y = f\,(u + \Delta u, \; v + \Delta v) - f\,(u, v);$$

addirt und subtrahirt man im 2ten Theile die Grösse $f\,(u + \Delta u, v)$, so erhält man:

$$\Delta y = f\,(u + \Delta u, v) - f\,(u, v) + f\,(u + \Delta u, v + \Delta v) - f\,(u + \Delta u, v),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta x} + \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)}{\Delta x},$$

endlich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)}{\Delta v} . \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Lassen wir nun $\Delta x$ unendlich klein werden, so nehmen auch $\Delta y$, $\Delta u$,

$\Delta v$ unendlich ab; die Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ haben bekanntlich die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ zur Grenze. Ferner ist

$$\lim \frac{f(u+\Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \frac{d.f(u, v)}{du} = \frac{dy}{du},$$

d. i. gleich dem Differenzialquotienten der Funktion $y = f(u, v)$, welchen man erhält, wenn man bei der Differenziation bloss $u$ als unabhängig veränderlich betrachtet, $v$ aber als constant ansieht. Diess erhellt sogleich, wenn man erwägt, dass in der im Zähler stehenden Differenz $f(u+\Delta u, v) - f(u, v)$ bloss $u$, nicht aber $v$ eine Veränderung erlitten hat. Aus demselben Grunde ist endlich:

$$\lim \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v)}{\Delta v} = \frac{d.f(u, v)}{dv} = \frac{dy}{dv}$$

der nach $v$ genommene Differenzialquotient der Funktion $y = f(u, v)$, d. h. so genommen, als ob bloss $v$ eine unabhängig Veränderliche, $u$ aber eine constante Grösse wäre. Demzufolge wird also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ und } dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} dx + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} dx.$$

Statt der letzteren Gleichung schreibt man kürzer:

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv.$$

Wäre die Funktion $y = f(u, v, w)$ gegeben, so würde man auf dieselbe Weise:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

und

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dw} dw$$

erhalten; u. s. f. für eine beliebige Anzahl von Funktionen. Hieraus folgt nun der wichtige Satz:

Das Differenzial einer zusammengesetzten Funktion wird gefunden, wenn man diese Funktion der Reihe nach in Bezug auf jede der Bestand-Funktionen differenzirt, so als ob nur immer eine der Bestand-Funktionen eine unabhängig Veränderliche, und die übrigen constant wären, und endlich die Summe der so erhaltenen Differenziale macht.

Man nennt $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$ die partiellen Differenzialquotienten, und $\frac{dy}{du} du$, $\frac{dy}{dv} dv$, $\frac{dy}{dw} dw$ die partiellen Differenziale der Funktion $y = f(u, v, w, \ldots\ldots)$.

**315.** Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Sätze reichen hin, um jede beliebige Funktion einer unabhängig Veränderlichen zu differenziren. Bevor wir jedoch zu speziellen Anwendungen schreiten, wollen wir noch einige allgemeine Regeln entwickeln.

1) Zunächst ist klar, dass das Differenzial einer constanten Grösse der Nulle gleich ist, weil ja eine Constante als solche jeder Veränderung unfähig ist. Bezeichnen wir daher mit $a$ eine Constante, mit $u$ eine beliebige Funktion von $x$, so folgt:
für $$y = a \pm u, \quad dy = \pm du.$$

2) Aus $y = au$ folgt ferner: $\Delta y = a(u + \Delta u) - au = a\Delta u$, somit, wenn man zur Grenze übergeht:
$$d.au = a\,du.$$
Constante Faktoren, mit welchen eine zu differenzirende Funktion behaftet ist, gehen daher als solche auch auf das Differenzial über.

3) Sind $u, v, w, \ldots$ Funktionen von $x$, und $y = \pm u \pm v \pm w \pm \ldots$, so hat man $\Delta y = \pm \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm \ldots$
und $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta w}{\Delta x} \pm \ldots$$
woraus durch den Uebergang zur Grenze:
$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$$
und somit auch:
$$dy = d(\pm u \pm v \pm w \pm \ldots) = \pm du \pm dv \pm dw \pm \ldots$$
folgt. Das Differenzial einer Summe oder Differenz mehrerer Funktionen ist also gleich der Summe oder Differenz der Differenzialien derselben.

4) Für $y = uv$ erhält man:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u . \Delta v}{\Delta x},$$
somit, wenn man zur Grenze übergeht:
$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad \text{oder } d.uv = vdu + udv.$$
Allgemein, ist $y = uvwt \ldots$ das Produkt aus einer beliebigen Anzahl veränderlicher Faktoren, so ist:
$$dy = vwt \ldots du + uwt \ldots dv + uvt \ldots dw + uvw \ldots dt + \ldots$$
oder wenn man diese Gleichung durch $y = uvwt \ldots$ dividirt:
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \frac{dt}{t} + \ldots$$
Ein Produkt wird daher differenzirt, wenn man das Differenzial

jedes Faktors mit allen übrigen Faktoren multiplicirt, und die Summe aller so erhaltenen Produkte bildet.

5) Es sei $y = \frac{u}{v}$, so hat man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right)\frac{1}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

woraus durch den Uebergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{oder } d.\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

folgt.

Das Differenzial eines Bruches ist daher gleich dem Nenner multiplicirt mit dem Differenzial des Zählers, weniger dem Zähler multiplicirt mit dem Differenzial des Nenners, das Ganze dividirt durch das Quadrat des Nenners.

**316.** Wenden wir nun diese Sätze zunächst auf die Differenziation der noch übrigen goniometrischen und cyclometrischen Funktionen an, wobei wir uns erinnern müssen, dass $d \sin x = \cos x\, dx$ und $d \cos x = \sin x\, dx$ ist.

1) $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $dy = \frac{\cos x^2 dx + \sin x^2 dx}{\cos x^2} = \frac{dx}{\cos x^2}$;

2) $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $dy = \frac{-\sin x^2 dx - \cos x^2 dx}{\sin x^2} = -\frac{dx}{\sin x^2}$;

3) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$; $dy = \frac{\sin x\, dx}{\cos x^2}$;

4) $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; $dy = -\frac{\cos x\, dx}{\sin x^2}$;

5) $y = \sin\operatorname{vers} x = 1 - \cos x$; $dy = \sin x\, dx$;

6) $y = \operatorname{cosin}\operatorname{vers} x = 1 - \sin x$; $dy = -\cos x\, dx$;

7) $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$; hieraus folgt: $x = \operatorname{tg} y$, $dx = \frac{dy}{\cos y^2}$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \cos y^2 = \frac{1}{\sec y^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg} y^2} = \frac{1}{1+x^2}; \text{ somit}$$

$$d.\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

8) $y = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$; $x = \operatorname{cotg} y$, $dx = -\frac{dy}{\sin y^2}$;

$$\frac{dy}{dx} = -\sin y^2 = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y^2} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg} y^2} = -\frac{1}{1+x^2}; \text{ folglich}$$

$$d.\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

9) $d.\text{arc sec}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $d.\text{arc cosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Bezeichnet man mit $\psi$ irgend eine der vier goniometrischen Funktionen sin, tg, sec, sin vers, mit $\psi'$ die entsprechende Cofunktion, so ist bekanntlich $\text{arc}\,\psi x + \text{arc}\,\psi' x = \frac{1}{2}\pi$, woraus $d\,\text{arc}\,\psi x + d\,\text{arc}\,\psi' x = 0$ folgt. Hierin liegt der Grund, dass sich $d.\text{arc sin}\, x = -d\,\text{arc cos}\, x$, $d.\text{arc tg}\, x = -d.\text{arc cotg}\, x$, u. s. w. ergibt.

Sind überhaupt $u$, $v$ zwei Funktionen von $x$, $C$ eine Constante, und $u \pm v = C$, so folgt hieraus [nach §. 315, 1) und 3)] $du \pm dv = 0$ oder $du = \mp dv$; diess gilt natürlich auch für $C = 0$. Hat man also $u - v = 0$ oder $u = v$, so ist auch $du = dv$, oder $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$; d. h. sind zwei Funktionen von $x$ identisch einander gleich, so sind auch ihre Differenziale und Differenzialquotienten gleich.

Der Uebersicht wegen wollen wir die bisher entwickelten Differenzialien der Hauptfunktionen zusammenstellen. Es genügt, diese im Gedächtnisse zu behalten, um sodann mit Hülfe der in den Paragraphen 313, 314 und 315 aufgestellten Sätze jede wie immer zusammengesetzte Funktion einer Veränderlichen leicht differenziren zu können.

$$d.x^m = mx^{m-1}\,dx;\quad d.a^x = a^x la\,dx;\quad d.e^x = e^x dx;$$

$$d.\log x = \log e.\frac{dx}{x};\quad d.lx = \frac{dx}{x}.$$

$$d.\sin x = \cos x\,dx,\qquad d.\cos x = -\sin x\,dx,$$

$$d.\text{tg}\, x = \frac{dx}{\cos x^2},\qquad d.\text{cotg}\, x = -\frac{dx}{\sin x^2},$$

$$d.\sec x = \frac{\sin x\,dx}{\cos x^2},\qquad d.\text{cosec}\, x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin x^2},$$

$$d.\text{sin vers}\, x = \sin x\,dx,\qquad d.\text{cos vers}\, x = -\cos x\,dx,$$

$$d.\text{arc sin}\, x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad d.\text{arc cos}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d.\text{arc tg}\, x = \frac{dx}{1+x^2},\qquad d.\text{arc cotg}\, x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d.\text{arc sec}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\qquad d.\text{arc cosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

**317.** Zur Erläuterung der bisher entwickelten Sätze über das Differenziren von Funktionen einer veränderlichen Grösse lassen wir einige Beispiele folgen.

1) $y = \sqrt{5x - x^2}$; man setze $5x = u$, $x^2 = v$, $z = u - v$, so wird $y = \sqrt{z}$, somit $dy = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$; $dz = du - dv$; $du = 5dx$, $dv = 2xdx$; folglich $dz = (5 - 2x)\,dx$ und

$$dy = \frac{(5 - 2x)\,dx}{2\sqrt{5x - x^2}}.$$

Schneller gelangt man aber zum Ziele, wenn man mit der gegebenen Funktion $y = (5x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ unmittelbar nach Vorschrift der Gleichung: $d.u^m = mu^{m-1}du$ operirt. Man erhält dann:

$$dy = d(5x - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(5x - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(5x - x^2) = \tfrac{1}{2}(5x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(5 - 2x)dx$$

d. i. $dy = \frac{(5 - 2x)\,dx}{2\sqrt{5x - x^2}}$, wie früher.

2) $y = (a^2 - b^2x^2)\sqrt[3]{2x^2 + 5}$; setzt man $a^2 - b^2x^2 = u$, $\sqrt[3]{2x^2 + 5} = v$, so wird $y = uv$, $dy = vdu + udv = \sqrt[3]{2x^2 + 5}\,.\,du + (a^2 - b^2x^2)dv$. Aber $du = d(a^2 - b^2x^2) = -2b^2xdx$, $dv = d\sqrt[3]{2x^2 + 5} = d\,(2x^2 + 5)^{\frac{1}{3}}$ $= \tfrac{1}{3}(2x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}}.\,4xdx = \frac{4xdx}{3\sqrt[3]{(2x^2 + 5)^2}}$, folglich wird:

$$dy = -2b^2x\sqrt[3]{2x^2 + 5}\,dx + \frac{4x(a^2 - b^2x^2)dx}{3\sqrt[3]{(2x^2 + 5)^2}}.$$

3) $y = a^{b^x}$; setzt man $b^x = u$, so wird $y = a^u$, $dy = a^u la\,du$, $du = b^x lb\,dx$, folglich:

$$dy = a^{b^x}b^x la\,lb\,dx.$$

4) $y = x^x$; hieraus folgt: $ly = xlx$, $d.ly = x\,d.lx + lx.\,dx$ d. i. $\frac{dy}{y} = dx + lx.\,dx = (1 + lx)dx$; somit

$$dy = x^x(1 + lx)\,dx.$$

5) $y = l\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x$; $dy = \frac{d.\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x}$; es ist aber $d.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{dx}{2\cos\frac{1}{2}x^2}$, somit $dy = \frac{dx}{2\cos\frac{1}{2}x^2.\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x} = \frac{dx}{2\cos\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x} = \frac{dx}{\sin x}$.

6) $y = \mathrm{arc\,tg}\frac{2x}{1 - x^2}$; setzt man $u = \frac{2x}{1 - x^2}$, so wird $y = \mathrm{arc\,tg}\,u$, $dy = \frac{du}{1 + u^2}$. Aber $du = \frac{2(1 - x^2) + 4x^2}{(1 - x^2)^2}dx = \frac{2(1 + x^2)\,dx}{(1 - x^2)^2}$; $1 + u^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}$; folglich

$$dy = \frac{2\,dx}{1 + x^2}.$$

## IV. Differenziation der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

**318.** Betrachtet man eine Funktion mehrerer von einander unabhängigen veränderlichen Grössen, so kann man entweder nur eine, oder auch gleichzeitig mehrere oder alle diese Variablen sich ändern lassen. Im ersten Falle sind die übrigen Variablen als constant anzusehen; die Funktion ist dann nur in Bezug auf die eine Veränderliche zu differenziren, was sofort nach den bisher vorgetragenen Vorschriften ausgeführt werden kann. Man sagt in diesem Falle, die Funktion werde partiell differenzirt in Bezug auf diese oder jene Veränderliche; das durch diese Operation erzeugte Differenzial der Funktion heisst ein partielles Differenzial, und der Differenzialquotient ein partieller Differenzialquotient. Ist $z = f(x, y, \ldots\ldots)$ eine Funktion mehrerer unabhängig Veränderlichen $x, y, \ldots$ so wird der nach $x$ genommene partielle Differenzialquotient von $z$ durch das mit Klammern versehene Symbol $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und das nach $x$ genommene partielle Differenzial mit $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$ bezeichnet. Indessen werden die Klammern auch häufig weggelassen, wie auch in der Folge geschehen soll, da hiedurch eine Zweideutigkeit nicht leicht veranlasst wird; man hat nur vor Augen zu behalten, dass das Symbol $\frac{dz}{dx}$ eben nur ein analytisches Zeichen ist, und nicht etwa $dz$ und $dx$ wie Zähler und Nenner eines Bruches sich verhalten.

Betrachten wir nun den Fall, in welchem sämmtliche Variable eine Veränderung erleiden. Sei zunächst $z = f(x, y)$ eine Funktion von zwei unabhängig Veränderlichen $x$ und $y$; lassen wir letztere um $\Delta x$, $\Delta y$ zunehmen, so wird die Zunahme $\Delta z$ der Funktion $z$ gegeben sein durch die Gleichung:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

welcher man auch die Form:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) + f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y),$$

oder:

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y}\Delta y$$

ertheilen kann.

Lässt man nun die Differenzen $\Delta x$, $\Delta y$ unendlich klein werden, so wird, gemäss den in §. 307 entwickelten Principien:

$$\lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{d.f(x,y)}{dy} = \frac{dz}{dx},$$

d. h. gleich dem partiellen Differenzialquotienten der Funktion $z = f(x, y)$ in Bezug auf $x$ genommen, weil, wie man sieht, in der Differenz $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ eben nur $x$ eine Veränderung erleidet, $y$ aber constant bleibt. Eben so erhält man, weil in dem Faktor von $\Delta y$ bloss $y$ sich ändert, und $\Delta x$ gleichzeitig mit $\Delta y$ verschwindet:

$$\lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{d \cdot f(x, y)'}{dy} = \frac{dz}{dy}$$

d. i. gleich dem partiellen Differenzialquotienten nach $y$ genommen. Hiemit verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$dz = \frac{d.f(x, y)}{dx} dx + \frac{d.f(x, y)}{dy} dy,$$

oder

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Die linker Hand stehende Grösse $dz$ ist nun die unendlich kleine Veränderung, welche die Funktion durch die gleichzeitigen unendlich kleinen Veränderungen beider Variablen erfährt, und heisst das **totale Differenzial** der Funktion. Die obige Gleichung spricht daher den Satz aus, **dass das totale Differenzial einer Funktion gleich ist der Summe der partiellen Differenzialien.**

Die obige Entwickelung lässt sich ohne alle Schwierigkeit auf Funktionen mit mehr als zwei unabhängig Veränderlichen ausdehnen. Man hat daher allgemein, wenn $u = f(x, y, z, t, \ldots)$ ist:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt + \ldots \quad (1)$$

Hiedurch ist die Aufgabe, das totale Differenziale einer Funktion von mehreren unabhängig Veränderlichen zu bilden, darauf zurückgeführt, die Funktion der Reihe nach in Bezug auf jede einzelne der Variablen zu differenziren, wobei alle übrigen jedesmal als constant gelten, und somit wieder die in den früheren Paragraphen für Funktionen einer Variablen entwickelten Vorschriften Platz greifen.

Beispiele: 1) Sei $z = \sin x \cos y$, so ist:

$$dz = \cos x \cos y \, dx - \sin x \sin y \, dy.$$

2) $z = \frac{y \cdot e^x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; hieraus folgt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(x^2 + y^2 - x) y e^x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x^2 e^x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

somit

$$dz = \frac{(x^2 + y^2 - x) y e^x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx + \frac{x^2 e^x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy.$$

3) Bezeichnet man mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $A$, $B$, $C$ die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreieckes, so ist bekanntlich:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

welche Gleichung den Winkel $\alpha$ als Funktion von $\beta$, $\gamma$ und $A$ bestimmt; man hat also:

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta}d\beta + \frac{d\alpha}{d\gamma}d\gamma + \frac{d\alpha}{dA}dA;$$

differenzirt man nun obige Gleichung partiell nach jeder der unabhängigen Veränderlichen $\beta$, $\gamma$ und $A$, so erhält man:

$$-\sin\alpha\,d\alpha = -(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma\cos A)\,d\beta = -\sin\alpha\cos C\,d\beta,$$
$$-\sin\alpha\,d\alpha = -(\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma\cos A)\,d\gamma = -\sin\alpha\cos B\,d\gamma,$$
$$-\sin\alpha\,d\alpha = -\sin\beta\sin\gamma\sin A\,dA = -\sin\alpha\sin\gamma\sin B\,dA;$$

somit sind die partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos C;\quad \frac{d\alpha}{d\gamma} = \cos B;\quad \frac{d\alpha}{dA} = \sin\gamma\sin B,$$

und man hat folglich:

$$d\alpha = \cos C\,d\beta + \cos B\,d\gamma + \sin\gamma\sin B\,dA.$$

Anmerkung. Ist so, wie oben, $u = f(x, y, z, t, ....)$ und sind $y, z, t, ...$ Funktionen der einzigen unabhängigen Veränderlichen $x$, gegeben durch die Gleichungen: $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $t = \chi(x)$, ....., so erhält man nach §. 314:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt + \ldots..,$$

welche Gleichung mit (1) vollkommen übereinstimmt, und demnach stattfindet, es mag nur eine der Veränderlichen $x, y, z, t, ...$ unabhängig sein, oder wenn alle es sind. Der Unterschied besteht aber darin, dass im letzteren Falle die unendlich kleinen Inkremente $dx$, $dy$, $dz$, $dt$ alle willkürlich und von einander unabhängig sind, während im ersten nur $dx$ willkürlich ist, und die übrigen von $dx$ abhängig, und durch die Gleichungen $dy = \varphi'(x)\,dx$, $dz = \psi'(x)\,dx$, $dt = \chi'(x)\,dx$ u. s. w. bestimmt sind.

**319.** I. Betrachten wir noch als speziellen Fall eine homogene Funktion von mehreren Veränderlichen. Eine Funktion $u=f(x,y,z,....)$ heisst bekanntlich homogen vom Grade $n$, wenn sie der Bedingung genügt:

$$f(tx, ty, tz, .....) = t^n f(x, y, z, ....),$$

wobei $t$ eine neue Veränderliche bedeutet. Differenziren wir diese Gleichung in Bezug auf $t$. Der Differenzialquotient des zweiten Theiles ist:

$$nt^{n-1}f(x, y, z, .....).$$

Setzt man ferner:

$$tx = \xi,\ ty = \eta,\ tz = \zeta, .....$$

so wird der erste Theil $= f(\xi, \eta, \zeta, \ldots..)$, und dessen Differenzialquotient:

$$\frac{df}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{df}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\frac{df}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\ldots..;$$

beachtet man nun, dass aus den Gleichungen $tx = \xi$, $ty = \eta$, $tz = \zeta$, u. s. w. folgt:

$$\frac{d\xi}{dt}=x,\quad \frac{d\eta}{dt}=y,\quad \frac{d\zeta}{dt}=z,\ldots.$$

so erhält man:

$$x\frac{df}{d\xi}+y\frac{df}{d\eta}+z\frac{df}{d\zeta}+\ldots.=nt^{n-1}f(x, y, z, \ldots).$$

Setzt man endlich $t = 1$, so wird $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, .... und die letzte Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}+\ldots.=nf(x, y, z, \ldots.).$$

Multiplicirt man daher die partiellen Differenzialquotienten einer homogenen Funktion des $n^{\text{ten}}$ Grades beziehungsweise mit jenen Veränderlichen, nach welchen sie genommen sind, so ist die Summe der so gebildeten Produkte gleich dem Produkte aus der Funktion selbst in die Zahl $n$.

Dieser Satz ist unter dem Namen: Lehrsatz von den homogenen Funktionen bekannt.

Ist z. B. $u = (x^2 + y^2)c^2 - r^2z^2$ so hat man $\frac{du}{dx} = 2c^2x$, $\frac{du}{dy} = 2c^2y$, $\frac{du}{dz} = -2r^2z$ und $n = 2$; und es ist in der That:

$$2c^2x.x+2c^2y.y-2r^2z.z=2[(x^2+y^2)c^2-r^2z^2]=2u.$$

II. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft kommt auch den Funktionen von der Form

$$u=f(x+y+z+\ldots.)$$

zu, wenn nämlich die Funktion bloss von der Summe mehrerer unabhängig Veränderlichen abhängt. Setzt man $t = x + y + z + \ldots.$, so wird $u = f(t)$ und

$$\frac{du}{dx}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dx},\quad \frac{du}{dy}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dy},\quad \frac{du}{dz}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dz},\ldots$$

Aus der Gleichung $t = x + y + z + \ldots.$ folgt aber;

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{dy}=\frac{dt}{dz}=\ldots..=1;$$

somit auch

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}=\frac{du}{dz}=\ldots..;$$

die partiellen Differenzialquotienten solcher Funktionen sind demnach unter einander gleich.

### V. Differenziation der unentwickelten Funktionen.

**320.** Wir haben uns bisher nur mit entwickelten oder expliciten Funktionen beschäftigt. Es sei nun eine Gleichung von der Form:

$$f(x, y) = 0 \ldots\ldots (1)$$

gegeben; die Auflösung derselben nach $y$, gleichgiltig ob sie ausführbar ist oder nicht, würde ein Resultat von der Form $y = \varphi(x)$ darbieten, woraus man erkennt, dass nur eine der beiden Veränderlichen, etwa $x$, als unabhängige Variable, die andere $y$ als Funktion von $x$ betrachtet werden muss. Man sagt in diesem Falle, $y$ sei durch die Gleichung (1) als unentwickelte Funktion gegeben. Handelt es sich nun um die Darstellung des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, und kann oder will man die Gleichung $y = \varphi(x)$, aus welcher er nach dem bisher Vorgetragenen leicht gefunden werden könnte, aus (1) nicht ableiten, so kann derselbe auch aus der Gleichung (1) unmittelbar ohne Schwierigkeit entwickelt werden.

Zu diesem Behufe bemerken wir, dass, wenn eine Funktion von $x$ identisch für jeden Werth von $x$ der Nulle gleich ist, ihr Differenzial und ihr Differenzialquotient ebenfalls Null sein müssen. Es folgt diess schon aus dem Begriffe des Differenzials, wenn man erwägt, dass bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Funktion diese ihren Werth nicht ändert, wie auch immer $x$ sich verändern möge.

Betrachten wir nun eine durch die Gleichung $u = f(x, y) = 0$ gegebene unentwickelte Funktion, und denken wir uns in derselben statt $y$ den Werth $y = \varphi(x)$ substituirt, welchen wir aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ durch Auflösung derselben nach $y$ gewinnen würden. Wir erhielten dadurch die für jedes $x$ geltende identische Gleichung $u = f(x, \varphi(x)) = 0$, deren Differenzial gemäss der oben gemachten Bemerkung $= 0$ ist. Hieraus folgt also, dass auch das Differenzial der ihr gleichgeltenden Gleichung $f(x, y) = 0$ der Nulle gleich zu setzen ist. Es ist aber diese Gleichung nur ein specieller Fall der allgemeineren: $u = f(z, y)$, aus welchem jene hervorgeht, wenn man $u = 0$, $z = x$ und $y = \varphi(x)$ setzt. Das Differenzial der Gleichung $u = f(z, y)$ ist aber bekanntlich $du = \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dy} dy$; schreibt man nun in diesem $x$ statt $z$, und setzt dasselbe $= 0$, so erhält man:

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0$$

als Resultat der Differenziation der Gleichung $u = f(x, y) = 0$, wofür man auch häufig

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0$$

schreibt. Hieraus folgt nun:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}, \text{ und } dy = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} dx.$$

Ohne daher die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach $y$ aufzulösen, erhält man den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, indem man den ersten Theil derselben nach $x$ und $y$ partiell differenzirt, als ob beide Grössen unabhängig Veränderliche wären, die beiden so erhaltenen derivirten Funktionen durcheinander dividirt, und den Quotienten mit entgegengesetztem Zeichen nimmt.

Es sei z. B. 1) $u = y^5 - 2ax^2y^2 + x^5 = 0$; man hat $\frac{du}{dx} = 5x^4 - 4axy^2$, $\frac{du}{dy} = 5y^4 - 4ax^2y$, somit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4 - 4axy^2}{5y^4 - 4ax^2y} = \frac{4axy^2 - 5x^4}{5y^4 - 4ax^2y}.$$

2) Ist $u = xy - \text{arc tg} \frac{y}{x} = 0$, so erhält man $\frac{du}{dx} = y + \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{du}{dy} = x - \frac{x}{x^2 + y^2}$ folglich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Man kann übrigens auch, wie leicht einzusehen, die gegebene Gleichung unmittelbar differenziren, und wird dadurch, ohne auf obigen allgemeinen Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ zurückzugehen, oft schneller zum Ziele gelangen. So ist das Differenzial der Gleichung des ersten Beispieles: $(5y^4 - 4ax^2y)\, dy - (4axy^2 - 5x^4)\, dx = 0$ woraus $\frac{dy}{dx} = \frac{4axy^2 - 5x^4}{5y^4 - 4ax^2y}$ folgt, wie oben.

Es liegt in der Natur der Sache, dass der Ausdruck des auf diese Art gefundenen Differenzialquotienten einer unentwickelten Funktion nebst $x$ auch noch $y$ enthält, welche Grösse aus demselben auch nicht weggeschafft werden kann, wenn man die Gleichung $f(x, y) = 0$ allgemein nach $y$ nicht aufzulösen vermag. Nichts desto weniger kann

aber der einem bestimmten Zahlenwerthe von $x$ entsprechende Zahlenwerth des Differenzialquotienten immer angegeben werden. Man wird nämlich zuvörderst den gegebenen Zahlenwerth von $x = a$ in die Gleichung $f(x, y) = 0$ substituiren, wodurch dieselbe eine numerische Gleichung mit einer Unbekannten $y$ wird, welche bekanntlich durch Näherungsmethoden immer aufgelöst werden kann. Findet man aus derselben $y = b$, so wird man die Werthe $x = a$, $y = b$ in den Differenzialquotienten substituiren, und so den gesuchten Zahlenwerth desselben für $x = a$ erhalten.

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die gegebene Gleichung mehr als zwei Veränderliche enthält. Ist z. B. die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben, in welcher $x$, $y$, die unabhängig Veränderlichen sein mögen, so erhält man zunächst durch Differenziation nach allen drei Veränderlichen:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0 \ldots\ldots (m)$$

woraus
$$dz = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}dx - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}dy$$

folgt. Hier sind $-\frac{df}{dx}:\frac{df}{dz}$ und $-\frac{df}{dy}:\frac{df}{dz}$ die partiellen Differenzialquotienten der Funktion $z$ nach $x$ und $y$ genommen. Man kann dieselben auch noch auf einem anderen Wege erhalten. Da in Folge der gegebenen Gleichung $z$ als Funktion von $x$ und $y$ bestimmt wird, so hat man $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$. Setzt man diesen Werth von $dz$ in die Gleichung $(m)$, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}\right)dy = 0;$$

da nun die Grössen $x$ und $y$, folglich auch ihre Differenzialien von einander unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn jeder der Coefficienten von $dx$ und $dy$ für sich $= 0$ ist; man hat daher:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

aus welchen Gleichungen für die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die schon oben erhaltenen Werthe sich ergeben.

**321.** Es erübrigt noch die Betrachtung des Falles, wenn die veränderlichen Grössen durch mehr als eine Gleichung mit einander verknüpft sind. Es seien z. B. die beiden Gleichungen:

$$f(x, y, u, v) = 0, \qquad F(x, y, u, v) = 0$$

gegeben, in welchen $x$, $y$ unabhängige Variable, $u$, $v$ zwei Funktionen derselben bedeuten. Differenzirt man diese Gleichungen nach $x$ und $y$, und beachtet, dass $u$ und $v$ Funktionen von $x$ und $y$ sind, so erhält man:

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{du}\frac{du}{dy} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dy}\right)dy = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dy}\right)dy = 0.$$

Da die Grössen $x$, $y$, und folglich auch ihre Differenzialien $dx$ und $dy$, von einander unabhängig sind, so können diese beiden Gleichungen nur bestehen, wenn jedes der vier in Klammern eingeschlossenen Trinome für sich $= 0$ ist, wodurch obige Gleichungen in vier andere zerfallen, aus welchen sofort die vier partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ bestimmt werden können.

---

## ZWEITES KAPITEL.

### VON DEN HOEHEREN DIFFERENZIALIEN UND DIFFERENZIALQUOTIENTEN DER FUNKTIONEN.

---

### 1. Höhere Differenzialien der Funktionen einer Variablen.

**322.** Wir wissen, dass der Differenzialquotient $y' = f'(x)$ einer beliebigen Funktion $y = f(x)$ im allgemeinen wieder eine Funktion von $x$ ist. Nichts hindert daher, diese Funktion $y' = f'(x)$ einer neuerlichen Differenziation zu unterwerfen; der Differenzialquotient derselben, den wir mit $y''$ oder $f''(x)$ bezeichnen, wird abermals eine Funktion von $x$ sein, welche wir wieder differenziren können, und deren Differenzialquotienten wir mit $y'''$ oder $f'''(x)$ bezeichnen wollen. Auf diese Weise fortfahrend können wir aus jeder Funktion $y = f(x)$ eine Reihe anderer Funktionen ableiten, von welchen jede der Differenzialquotient der vorhergehenden ist; hiedurch entstehen

die Differenzialquotienten der verschiedenen Ordnungen der Funktion $y = f(x)$; man bezeichnet sie mit:

$$y', \; y'', \; y''', \; y'''', \; \ldots \; y^{(n)},$$

oder

$$f'(x), \; f''(x), \; f'''(x), \; f''''(x), \; \ldots\ldots f^{(n)}(x),$$

und nennt nun insbesondere $f'(x)$ den ersten, $f''(x)$ den zweiten, ..... $f^{(n)}(x)$ den $n^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten der Funktion $f(x)$.

In gleicher Weise können aus dem ersten Differenziale

$$dy = f'(x)dx$$

der Funktion $y = f(x)$ die höheren Differenzialien derselben abgeleitet werden, da jenes wieder als Funktion von $x$ sich darstellt, und somit einer neuerlichen Differenziation unterzogen werden kann. Hiebei ist auf zwei Umstände zu achten. Erstlich wird man in dem Produkte $f'(x)dx$, $dx$ als einen constanten Faktor zu beachten haben, indem der an sich willkürliche Werth des Inkrementes $dx$ von $x$ unabhängig ist. Ferner: die Funktion $dy = f'(x)dx$ differenziren, heisst nichts anderes, als die unendlich kleine Veränderung suchen, welche $dy$ erleidet, wenn $x$ neuerdings einen unendlich kleinen Zuwachs erhält; dieser muss nun offenbar jenem $dx$ bei der $1^{\text{ten}}$ Differenziation gleich angenommen werden, weil sonst das $2^{\text{te}}$ Differenziale keinen bestimmten Sinn haben würde und mit dem $1^{\text{ten}}$ Differenziale $dy$ nicht vergleichbar wäre. — Diess vorausgesetzt, ergibt sich durch Differenziation der Gleichung $dy = f'(x)dx$ die folgende: $d.dy = df'(x).dx$; es ist aber dem Begriffe des $2^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten gemäss: $df'(x) = f''(x)dx$, somit $d.dy = f''(x)dx^2$; statt $d.dy$ pflegt man Kürze halber $d^2y$ zu schreiben, und hat daher:

$$d^2y = f''(x).dx^2$$

als zweites Differenzial der Funktion $f(x)$. Aus diesem folgt auf gleiche Weise: $d.d^2y = df''(x).dx^2$, d. i. weil $df''(x) = f'''(x)dx$ ist, und wenn man $d^3y$ statt $d.d^2y$ schreibt:

$$d^3y = f'''(x)dx^3$$

als drittes Differenzial u. s. w. Wie man sieht, sind in den Ausdrücken der aufeinanderfolgenden Differenzialien der Funktion $y = f(x)$ die endlichen Faktoren $f'(x), f''(x), f'''(x)$, u. s. w. mit immer höheren Potenzen der unendlich kleinen Grösse $dx$ multiplicirt, und sind demnach unendlich kleine Grössen derselben Ordnung, wie die Potenzen von $dx$, welche in ihren Ausdrücken erscheinen. Betrachtet man daher $dx$ als ein unendlich Kleines der $1^{\text{ten}}$ Ordnung, so sind die successiven Differenzialien der Funktion $y = f(x)$: $dy = f'(x)dx$, $d^2y = f''(x)dx^2$, $d^3y = f'''(x)\, dx^3$, .... $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$ beziehungsweise unendlich kleine Grössen der $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, $3^{\text{ten}}$, ..... $n^{\text{ten}}$ Ordnung; so dass

also jedes dieser Differenziale unendlich klein ist im Verhältniss zu dem unmittelbar vorhergehenden.

Die obigen Gleichungen lassen sich noch in folgender Form schreiben:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),\ \ldots\ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x),$$

wodurch die häufig angewendete Bezeichnung der höheren Differenzialquotienten durch die Symbole $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w. gerechtfertiget wird.

**323.** Nach dem Gesagten hat die successive Entwickelung der höheren Differenzialien einer Funktion keine Schwierigkeit. Betrachten wir zunächst die einfachen Funktionen.

1) Für $y = x^m$ findet man:

$$dy = mx^{m-1}\,dx,$$
$$d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2,$$
$$d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^ny = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots[m-(n-1)]x^{m-n}\,dx^n.$$

Man sieht leicht, dass die Reihe dieser Differenzialien ohne Ende fortläuft, wenn $m$ eine gebrochene oder negative Zahl; ist aber $m$ eine ganze positive Zahl, so wird das $m^{te}$ Differenzial und der $m^{te}$ Differenzialquotient beziehungsweise:

$$d^my = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1.dx^m,$$
$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1,$$

also constant, und alle folgenden sind der Nulle gleich.

Aus obiger Gleichung für $d^ny$, folgt:

$$\text{für } m=-1:\ d^n\left[\frac{1}{x}\right] = (-1)^n.\frac{1.2.3\ldots.n}{x^{n+1}}dx^n$$

$$\text{für } m=\tfrac{1}{2}:\ d^n\left[\sqrt{x}\right] = \frac{(-1)^{n-1}.1.3.5\ldots.(2n-3)\sqrt{x}}{2^nx^n}dx^n$$

$$\text{für } m=-\tfrac{1}{2}:\ d^n\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{(-1)^n.1.3.5\ldots(2n-1)}{2^nx^n\sqrt{x}}dx^n$$

2) für $y = a^x$ und $y = e^x$ erhält man:

| | |
|---|---|
| $d\,.a^x = a^x\,la\,dx$ | $d\,.e^x = e^x dx$ |
| $d^2.a^x = a^x\,(la)^2dx^2$ | $d^2.e^x = e^x dx^2$ |
| $d^3.a^x = a^x\,(la)^3dx^3$ | $d^3.e^x = e^x dx^3$ |
| $\ldots\ldots\ldots\ldots$ | $\ldots\ldots\ldots$ |
| $d^n.a^x = a^x\,(la)^ndx^n$, | $d^n.e^x = e^x dx^n$. |

Die Differenzialquotienten der verschiedenen Ordnungen der Funktion $e^x$ sind daher unter sich gleich.

3) Für $y = lx$ findet man:

$$dy = \frac{1}{x}\,dx;\quad d^2y = -\frac{1}{x^2}\,dx^2;\quad d^3y = \frac{2}{x^3}\,dx^3;\ \ldots\ldots$$

$$d^n.lx = d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\,.\,dx\right) = \frac{(-1)^{n-1}.\,1.2.3\ldots.(n-1)}{x^n}\,dx^n.$$

4) Für die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} d\ \sin x = \cos x\,dx & d\ \cos x = -\sin x\,dx \\ d^2\sin x = -\sin x\,dx & d^2\cos x = -\cos x\,dx \\ d^3\sin x = -\cos x\,dx & d^3\cos x = \sin x\,dx \\ d^4\sin x = \sin x\,dx & d^4\cos x = \cos x\,dx. \end{array}$$

Die abgeleiteten Funktionen von $\sin x$ und $\cos x$ haben daher vier verschiedene Werthe, welche periodisch wiederkehren. Allgemein ist:

$$d^n\sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)dx^n,\quad d^n\cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)dx^n;$$

man überzeugt sich hievon leicht, wenn man erwägt, dass $n$ nur eine der vier Formen, $4m + 1$, $4m + 2$, $4m + 3$, $4m + 4$ haben kann, für welche sich $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ der Reihe nach auf $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ reducirt. Ein Gleiches gilt vom Cosinus.

5) Für $y = \text{arc}\sin x$ findet man:

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}};\quad \frac{d^3y}{dx^3} = (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}};$$

u. s. w., und für $y = \text{arc}\cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}};\ \frac{d^2y}{dx^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}};\ \frac{d^3y}{dx^3} = -(1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}};$$

u. s. w.

## II. Höhere Differenzialien der Funktionen von Funktionen und der zusammengesetzten Funktionen.

**324.** Es sei $y = f(u)$ und $u = \varphi(x)$, so hat man bekanntlich [§. 313.]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx};$$

differenzirt man diese Gleichung mit Rücksicht darauf, dass der 2[te] Theil ein Produkt aus zwei veränderlichen Grössen ist, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\dfrac{dy}{du}}{dx}\,\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\,\frac{d\dfrac{du}{dx}}{dx};$$

Nun ist offenbar $\frac{d\frac{du}{dx}}{dx}$ der $2^{\text{te}}$ Differenzialquotient der Funktion $u$, also $=\frac{d^2u}{dx^2}$; das Symbol $\frac{d\frac{dy}{du}}{dx}$ drückt den ersten Differenzialquotienten der Funktion $\frac{dy}{du}$ nach $x$ genommen aus; erwägt man nun, dass $\frac{dy}{du}$ zunächst eine Funktion von $u$ ist, so hat man, gemäss der Regel des §. 313, $\frac{d\frac{dy}{du}}{dx}=\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}$; hiemit wird nun:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\frac{du^2}{dx^2}+\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} \text{ und } d^2y=\frac{d^2y}{du^2}du^2+\frac{dy}{du}d^2u.$$

Hieraus ergibt sich durch eine $3^{\text{te}}$ Differenziation:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{du^3}\frac{du^3}{dx^3}+3\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3};$$

u. s. w. Wäre z. B. die Funktion $y=l\operatorname{tg}x$ gegeben, so kann man $y=lu$, $u=\operatorname{tg}x$ setzen und hat nun:

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u},\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos x^2},\quad \text{somit } \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sin 2x};$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=-\frac{1}{u^2},\quad \frac{du^2}{dx^2}=\frac{1}{\cos x^4},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{2\sin x}{\cos x^3},$$

womit man nach leichter Reduktion:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4\cos 2x}{\sin 2x^2} \text{ findet; u. s. w.}$$

In speciellen Fällen hat man übrigens nicht nöthig, auf die obigen allgemeinen Ausdrücke zurückzugehen; es ist in der Regel immer einfacher, mit der gegebenen Funktion unmittelbar zu operiren. So hätte man für $y=l\operatorname{tg}x$: $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sin 2x}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4\cos 2x}{\sin 2x^2}$; u. s. f.

**325.** Es sei $y=f(u,v)$, und $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ zwei Funktionen von $x$, aus welchen $y$ auf beliebige Weise zusammengesetzt sein mag. Nach §. 314 hat man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx};$$

um diese Gleichung zu differenziren, erwägen wir, dass die Grössen $\frac{dy}{du}$ und $\frac{dy}{dv}$ im Allgemeinen Funktionen von $u$ und $v$ sein werden, und somit nach der Regel für die zusammengesetzten Funktionen zu diffe-

renziren sind; bezeichnen wir daher mit $\frac{d^2y}{du\,dv}$ und $\frac{d^2y}{dv\,du}$ die Differenzialquotienten, welche man erhält, wenn man $\frac{dy}{du}$ nach $v$ und $\frac{dy}{dv}$ nach $u$ differenzirt, so kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx} + \frac{d^2y}{du\,dv}\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} +$$
$$+ \left(\frac{d^2y}{dv\,du}\frac{du}{dx} + \frac{d^2y}{dv^2}\frac{dv}{dx}\right)\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{d^2v}{dx^2};$$

es ist aber, wie wir später [§. 326] sehen werden, $\frac{d^2y}{dv\,du} = \frac{d^2y}{du\,dv}$; somit:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\frac{du^2}{dx^2} + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2y}{du\,dv}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2y}{dv^2}\frac{dv^2}{dx^2}.$$

In dieser Weise fortfahrend, könnte man ohne Schwierigkeit zu den höheren Differenzialquotienten gelangen, was jedoch von wenig Nutzen wäre; das Gesagte reicht hin, um das Verfahren deutlich zu machen, wenn mit allgemeinen Funktionszeichen zu rechnen ist. In besonderen Fällen führt die unmittelbare successive Differenziation rascher zum Ziele.

Betrachten wir, um ein allgemeineres Beispiel über diesen Fall zu geben, die Funktion $y = uv$, unter $u$ und $v$ beliebige Funktionen verstanden; wiederholt differenzirend erhalten wir:

$$d\ .uv = u\,dv + v\,du,$$
$$d^2.uv = u\,d^2v + 2\,dvdu + v\,d^2u,$$
$$d^3.uv = u\,d^3v + 3\,dud^2v + 3\,d^2udv + v\,d^3u,$$
$$d^4.uv = u\,d^4v + 4\,dud^3v + 6\,d^2ud^2v + 4\,d^3udv + v\,d^4u,$$

u. s. w. In den Coefficienten erkennt man das Gesetz der Binomialcoefficienten, so dass also allgemein sein wird:

$$d^n.\,uv = ud^nv + \binom{n}{1}dud^{n-1}v + \binom{n}{2}d^2ud^{n-2}v + \ldots\ldots + vd^nu;$$

die Richtigkeit dieses Ausdruckes lässt sich leicht durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ nachweisen; man bedient sich desselben mit Vortheil, um die höheren Differenzialien eines Produktes zu bilden.

Es sei z. B. ein Ausdruck für den $n^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten der Funktion $f(x) = \operatorname{tg} x$ zu entwickeln. Schreibt man diese Gleichung in der Form: $\sin x = \cos x f(x)$, so erhält man durch $n$malige Differenziation derselben, indem man auf den $2^{\text{ten}}$ Theil die obige Formel für $d^n.uv$ anwendet, und beachtet, dass $d^n \sin x = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$ ist

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos x f^{(n)}(x) - \binom{n}{1}\sin x f^{(n-1)}(x) - \binom{n}{2}\cos x f^{(n-2)}(x) +$$
$$+ \binom{n}{3}\sin x f^{(n-3)}(x) + \binom{n}{4}\cos x f^{(n-4)}(x) - \ldots..$$

woraus:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\sin(x + \frac{1}{2}n\pi)}{\cos x} + \left[\binom{n}{1}f^{(n-1)}(x) - \binom{n}{3}f^{(n-3)}(x) + \ldots\right]\operatorname{tg} x +$$
$$+ \left[\binom{n}{2}f^{(n-2)}(x) - \binom{n}{4}f^{(n-4)}(x) + \ldots..\right]$$

folgt. Diese Gleichung gibt den $n^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten, ausgedrückt durch alle vorhergehenden, und kann demnach zur successiven Entwickelung derselben benutzt werden.

Um eine Rekursionsformel für den $n^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten von $f(x) = \arcsin x$ zu erhalten, wird man diese Gleichung zweimal differenziren, wodurch man:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

erhält; durch Elimination von $\sqrt{1-x^2}$ gewinnt man aus diesen beiden Gleichungen folgende Relation:

$$(1-x^2)f''(x) = xf'(x);$$

differenzirt man nun diese Gleichung $(n-2)$ mal, indem man auf jedes der Produkte die Formel für $d^n.uv$ anwendet, so ergibt sich:

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - 2(n-2)xf^{(n-1)}(x) - 2\binom{n-2}{2}f^{(n-2)}(x) = xf^{(n-1)}(x)$$
$$+ (n-2)f^{(n-2)}(x),$$

und hieraus:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)^2 f^{(n-2)}(x)}{1-x^2}.$$

Auf ähnliche Weise kann man sich Rekursionsformeln für die übrigen goniometrischen und cyklometrischen Funktionen verschaffen.

## III. Höhere Differenzialien der Funktionen von mehreren veränderlichen Grössen.

**326.** Es sei $u = f(x, y, z, \ldots.)$ eine Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen; das Differenziale derselben:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots.$$

ist im allgemeinen wieder eine Funktion von $x, y, z, \ldots.$, und kann demnach wiederholt differenzirt werden, entweder nach allen Veränderlichen oder nur nach einer oder mehreren derselben. Im ersten

Falle erhalten wir die successiven totalen Differenziale der Funktion $u$, welche wir mit $du$, $d^2u$, $d^3u$, ... bezeichnen; im zweiten Falle entstehen die successiven partiellen Differenzialien und Differenzialquotienten, über deren Bezeichnung folgendes zu bemerken ist.

Die Symbole $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n u}{dy^n}$, u. s. w. stellen die $n^{\text{ten}}$ partiellen Differenzialquotienten der Funktion $u$ vor, genommen bloss nach einer Veränderlichen $x$, $y$, u. s. w., welche man erhält, wenn man die Funktion $n$mal hinter einander nach $x$, oder $y$ u. s. w. differenzirt.

Jeder solche Differenzialquotient ist aber im Allgemeinen wieder eine Funktion von $x$, $y$, $z$, .... und kann daher wieder nach jeder dieser Veränderlichen differenzirt werden. Wollte man z. B. $\frac{d^n u}{dx^n}$ $m$mal nach $y$ differenziren, so hätte man den resultirenden Differenzialquotienten zu bezeichnen mit:

$$\frac{d^m . \frac{d^n u}{dx^n}}{dy^m}$$

wofür man kürzer $\frac{d^{n+m} u}{dy^m \, dx^n}$ schreibt, wobei zugleich die Reihenfolge der Differenzialfaktoren im Nenner, von rechts nach links, die Ordnung anzeigt, in welcher in Bezug auf die einzelnen Variablen differenzirt wurde. Hieraus geht die Bedeutung von Symbolen, wie folgende:

$$\frac{d^2 u}{dy\,dx}, \quad \frac{d^3 u}{dx^2\,dy}, \quad \frac{d^3 u}{dx\,dy^2}, \quad \frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz}, \text{ u. s. w.}$$

klar hervor; $\frac{d^2 u}{dy\,dx}$ wird erhalten, wenn man die Funktion $u$ zuerst nach $x$, und den hiedurch gewonnenen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}$ sodann nach $y$ differenzirt; $\frac{d^3 u}{dx^2\,dy}$ ist das Ergebniss einer dreifachen Differenziation, die $1^{\text{te}}$ nach $y$, die beiden folgenden wiederholt nach $x$ ausgeführt; u. s. w.

Der Ausdruck oder Werth eines solchen nach mehreren Veränderlichen genommenen partiellen Differenzialquotienten ist völlig unabhängig von der Ordnung, in welcher man die angezeigten Differenziationen nach den einzelnen Veränderlichen ausführt.

Wir wollen diesen Satz zunächst für den Differenzialquotienten zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}$$

nachweisen. Bekanntlich ist, wenn wir $u=f(x, y)$ sein lassen, $\frac{du}{dx}$ die Grenze, welcher sich das Verhältniss

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}$$

bei unendlich abnehmendem $\Delta x$ nähert; hieraus folgt, dass nach dem Begriffe des Differenzialquotienten, $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ die Grenze des Verhältnisses:

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}-\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y}\quad\ldots(m)$$

ist, wenn $\Delta x$ und $\Delta y$ sich gleichzeitig der Nulle nähern. Gehen wir umgekehrt von dem Differenzialquotienten $\frac{du}{dy}$ als der Grenze des Verhältnisses:

$$\frac{\Delta u}{\Delta y}=\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}$$

aus, so haben wir $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ als die Grenze des Ausdruckes:

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}-\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}}{\Delta x}\quad\ldots(n)$$

zu betrachten. Wie man sieht, sind die beiden Ausdrücke $(m)$ und $(n)$ identisch gleich, folglich sind es auch ihre Grenzwerthe; es ist folglich:

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

Dieser Satz erstreckt sich nun auch auf die Differenzialquotienten höherer Ordnung, da jede beliebige Aenderung in der Aufeinanderfolge der nach den verschiedenen Variablen auszuführenden Differenziationen, immer durch mehrmalige Anwendung des obigen für zwei Veränderliche nachgewiesenen Satzes bewerkstelliget werden kann.

Es sei z. B. $u=\text{arc tg}\,\frac{x}{y}$, so hat man:

$$\frac{du}{dx}=\frac{y}{y^2+x^2},\quad \frac{du}{dy}=-\frac{x}{y^2+x^2},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\text{ und }\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

**327.** Nach dem im vorigen §. Gesagten hat nun die wiederholte Differenziation von Funktionen mehrerer Veränderlichen keine Schwierigkeit. Es sei:

$$u = f(x, y),$$

so hat man
$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy;$$

differenzirt man neuerdings, und beachtet, dass $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ im Allgemeinen Funktionen von $x$ und $y$ sind, so erhält man, da $dx$ und $dy$ als constant zu betrachten sind:

$$d^2u = \left[\frac{d\frac{du}{dx}}{dx} dx + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} dy\right] dx + \left[\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} dx + \frac{d\frac{du}{dy}}{dy} dy\right] dy,$$

d. i.

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy\,dx} dy\,dx + \frac{d^2u}{dx\,dy} dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2,$$

und endlich, weil $\frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^2u}{dy\,dx} dy\,dx + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2.$$

Hieraus findet man:

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2\,dy} dx^2\,dy + 3\frac{d^3u}{dx\,dy^2} dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3} dy^3$$

u. s. w. Es treten hier abermals die Binomialcoefficienten auf, und man hat allgemein:

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{d^nu}{dx^{n-1}\,dy} dx^{n-1}\,dy + \binom{n}{2} \frac{d^nu}{dx^{n-2}\,dy^2} dx^{n-2}\,dy^2 + \ldots\ldots + \frac{d^nu}{dy^n} dy^n,$$

wofür man symbolisch schreiben kann:

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n$$

wenn man nur nach vollbrachter Entwickelung allenthalben $d^ru$ statt $du^r$ schreibt.

Eben so einfach liessen sich die Formeln für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen entwickeln, was hier kein weiteres Interesse gewährt. Das Bildungsgesetz des $n^{\text{ten}}$ totalen Differenzials einer

Funktion von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen wird ganz allgemein durch die symbolische Gleichung:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots\ldots\right)^n$$

dargestellt.

## IV. Höhere Differenzialien der unentwickelten Funktionen.

**328.** Es sei durch die Gleichung: $f(x, y) = 0$, $y$ als unentwickelte Funktion der unabhängig Veränderlichen $x$ gegeben, so erhalten wir durch Differenziation derselben bekanntlich die erste Differenzialgleichung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \ldots\ldots (1)$$

woraus man, wenn nöthig, den 1$^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} \ldots\ldots (2)$$

ziehen kann. Differenziren wir nun die Gl. (1), und erwägen dabei, dass $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ im Allgemeinen Funktionen von $x$ und $y$ sein werden, $\frac{dy}{dx}$ jedoch bloss von $x$ abhängig ist, so kommt:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy\,dx}\frac{dy}{dx} + \left[\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

d. i. weil $\frac{d^2f}{dy\,dx} = \frac{d^2f}{dx\,dy}$ ist:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \ldots\ldots (3)$$

als 2$^{\text{te}}$ Differenzialgleichung der primitiven Gl. $f(x, y) = 0$, aus welcher sich sofort der Werth des 2$^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergibt.

Auf gleiche Weise könnte man aus (3) die Differenzialgleichung 3$^{\text{ter}}$ Ordnung entwickeln, wobei alle in (3) vorkommenden Differenzialquotienten als Funktionen von $x$ und $y$ zu behandeln sind, mit Ausnahme von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, und bekanntlich:

$$\frac{d^3f}{dy\,dx^2} = \frac{d^3f}{dx^2\,dy} = \frac{d^3f}{dx\,dy\,dx} \text{ und}$$

$$\frac{d^3f}{dx\,dy^2} = \frac{d^3f}{dy^2\,dx} = \frac{d^3f}{dy\,dx\,dy}$$

zu setzen ist; man findet:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^3f}{dx^3}+3\frac{d^3f}{dx^2dy}\frac{dy}{dx}+3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d^3f}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\\ \quad+3\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{df}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}\end{array}\right\}=0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

woraus sich $\frac{d^3y}{dx^3}$ ergibt; u. s. w. Es bedarf übrigens kaum der Erinnerung, dass man in jedem besonderen Falle diese Differenzialgleichungen einfacher erhält, indem man die gegebene Gleichung Glied für Glied differenzirt, auf dieselbe Art mit der ersten Differenzialgleichung verfährt, u. s. f., ohne die allgemeinen Ausdrücke (3) und (4) zu Hülfe zu nehmen.

Beisp. Sei $f(x, y) = x^4 - 2a^2xy + y^4 = 0$, so erhält man als 1te Differenzialgleichung:

$$(2y^3 - a^2x)\frac{dy}{dx} + 2x^3 - a^2y = 0,$$

hieraus als Differenzialgleichung 2ter Ordnung:

$$(2y^3 - a^2x)\frac{d^2y}{dx^2} + 6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a^2\frac{dy}{dx} + 6x^2 = 0,$$

aus welcher die Differenzialgleichung 3ter Ordnung:

$$(2y^3 - a^2x)\frac{d^3y}{dx^3} + 18y^2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} - 3a^2\frac{d^2y}{dx^2} + 12y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 12x = 0$$

gewonnen wird; u. s. w.

**329.** Man wird dieses Verfahren ohne Schwierigkeit auch auf implicite Funktionen mit mehreren Veränderlichen anwenden können. Beispielsweise wollen wir das 2te Differenzial: $d^2z$ entwickeln, wenn $z$ als implicite Funktion der beiden unabhängig Veränderlichen $x$ und $y$ durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

gegeben ist. Bekanntlich hat man, wenn $z$ als Funktion von $x$ und $y$ angesehen wird:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy, \quad (2)$$

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2. \quad (3)$$

Differenzirt man nun die Gl. (1) partiell nach $x$ und $y$, so erhält man:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \ldots. (4), \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \ldots. (5)$$

welche Gleichungen die partiellen Differenzialquotienten 1ter Ordnung

$\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ darbieten, wie schon §. 320 gefunden wurde. Um jene der 2ten Ordnung zu erhalten, welche in (3) erscheinen, werden wir die Gl. (4) und (5) partiell sowohl nach $x$ als auch nach $y$ differenziren, wodurch wir folgende vier Gleichungen gewinnen:

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dz\,dx}\,\frac{dz}{dx}+\frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{df}{dz}\,\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

$$\frac{d^2f}{dy\,dx}+\frac{d^2f}{dz\,dx}\,\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dy\,dz}\,\frac{dz}{dx}+\frac{d^2f}{dz^2}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}+\frac{df}{dz}\,\frac{d^2z}{dy\,dx}=0,$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{d^2f}{dz\,dy}\,\frac{dz}{dx}+\frac{d^2f}{dx\,dz}\,\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz^2}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}+\frac{df}{dz}\,\frac{d^2z}{dx\,dy}=0,$$

$$\frac{d^2f}{dy^2}+2\frac{d^2f}{dz\,dy}\,\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\frac{df}{dz}\,\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Die 1te und 4te dieser Gleichungen liefern nun die partiellen Differenzialquotienten $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$; aus der 2ten oder 3ten erhält man $\frac{d^2z}{dx\,dy}$. Wie man sieht, sind die 2te und 3te Gl. von einander nicht verschieden, was im Voraus zu erwarten war, wenn man die Entstehung dieser Gleichungen ins Auge fasst.

**330.** Durch einmalige Differenziation der Gleichung

$$f(x,\ y)=0 \tag{1}$$

erhält man bekanntlich die Differenzialgleichung 1ter Ordnung: $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0$, welche, wenn wir uns der Lagrange'schen Bezeichnung der Differenzialquotienten bedienen und bedenken, dass $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ Funktionen von $x$ und $y$ sind, in der Form:

$$F(x, y, y')=0 \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Enthält nun die Gl. (1) ein constantes Glied, so wird dieses aus (2) verschwunden sein, und wenn man (1) als Gl. einer Curve betrachtet, so gehört die Gl. (2) zu allen Curven, welche aus (1) durch Variation dieses constanten Gliedes hervorgehen, und drückt eine allen diesen Curven gemeinschaftliche Eigenschaft aus. Es sei z. B.

$$f(x, y)=x^2+y^2-a^2=0,$$

welche Gleichung bekanntlich einem aus dem Ursprunge mit dem Halbmesser $a$ beschriebenen Kreise angehört, so erhalten wir durch Differenziation derselben:

$$xdx + ydy = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

als 1[te] Differenzialgleichung, welche abermals einen aus dem Ursprunge, aber mit willkürlichem Halbmesser beschriebenen Kreis bedeutet, indem sie eine, allen solchen Kreisen gemeinsame Eigenschaft ausspricht. In der That, denken wir uns zu einem beliebigen Punkte $x$, $y$ der durch die obige Differenzialgleichung ausgedrückten Curve die Tangente und den Radiusvector gezogen, und die Winkel, welche diese Geraden mit der Abscissenaxe einschliessen mit $\tau$ und $\alpha$ bezeichnet, so ist $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ [§. 306.], und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, somit $\operatorname{tg} \tau . \operatorname{tg} \alpha = -1$, d. h. die Tangente steht an jedem Punkte der Curve senkrecht auf dem Radiusvector des Berührungspunktes; eine Eigenschaft, welche bekanntlich nur einem der in Rede stehenden Kreise zukommt.

In den meisten Fällen kommen jedoch dergleichen constante Parameter in der Gl. (1) auf irgend eine Weise mit den Veränderlichen $x$ und $y$ verknüpft vor, und werden dann, wie leicht einzusehen, auch in den Differenzialgleichungen derselben erscheinen. Es sei z. B.

$$f(x, y) = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 - r^2 = 0$$

die vorgelegte Gleichung, bekanntlich einem Kreise vom Halbmesser $r$ angehörend, dessen Mittelpunktscoordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind. Differenzirt man diese Gleichung dreimal, so erhält man:

$$\begin{aligned} &(y - \beta) y' + x - \alpha = 0, \\ &y'^2 + (y - \beta) y'' + 1 = 0, \\ &3 y' y'' + (y - \beta) y''' = 0, \end{aligned}$$

als Differenzialgleichungen des Kreises der 1[ten], 2[ten] und 3[ten] Ordnung, in welchen, wie man sieht, die Parameter $\alpha$ und $\beta$ wenigstens theilweise noch erscheinen. Durch Elimination von $y - \beta$ aus den zwei letzten Gleichungen erhält man aber sogleich:

$$y''' (1 + y'^2) - 3 y' y''^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung sind nun alle Constanten verschwunden, und sie drückt einen Kreis aus im allgemeinsten Sinne, ohne über Lage und Grösse desselben etwas festzusetzen.

Man sieht hieraus, dass die Differenzialgleichungen, namentlich die höheren, eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als die endlichen Gleichungen, welchen sie ihren Ursprung verdanken.

Enthält die ursprüngliche Gleichung $n$ Constante, so hat man dieselbe $n$mal zu differenziren; die hiedurch gewonnenen Differenzialgleichungen, $n$ an der Zahl, reichen in Verbindung mit der ursprüng-

lichen Gleichung hin, um die $n$ Constanten zu eliminiren, und das Resultat wird eine Differenzialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung sein.

**331.** Zu noch allgemeineren Resultaten gelangt man auf dem in vor. §. betretenen Wege, wenn die vorgelegte Gleichung mehr als 2 Veränderliche enthält; mit Hülfe der partiellen Differenzialien können selbst willkürliche Funktionen, welche in der ursprünglichen Gleichung vorkommen, eliminirt werden. Einige Beispiele werden das Verfahren deutlich machen.

1) Es sei die Gl. $y - bz = f(x - az)$ ..... (1) gegeben, welche bekanntlich einen Cylinder ausdrückt; differenziren wir dieselbe partiell in Bezug auf die beiden unabhängig Veränderlichen $x$ und $y$, so ergibt sich

$$-b\frac{dz}{dx} = f'(x - az) \,.\left(1 - a\frac{dz}{dx}\right),$$

$$1 - b\,\frac{dz}{dy} = -f'(x - az)\,.\,a\frac{dz}{dy},$$

wo die Funktion $f'(x - az)$ zu $f(x - az)$ in der durch die Gleichung $f'(u) = \frac{df(u)}{du}$ ausgedrückten Relation steht. Durch Elimination von $f'(x - az)$ aus den zwei letzten Gleichungen gelangt man zur $1^{ten}$ Differenzialgleichung der Gleichung (1):

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1, \tag{2}$$

welche keine willkürliche Funktion mehr enthält, und die Natur einer cylindrischen Fläche, deren erzeugende Gerade zur Geraden $x = az$, $y = bz$ parallel ist, allgemein darstellt, indem sie nämlich, wie wir später sehen werden, ausdrückt, dass alle Berührungsebenen zu einer festen Geraden parallel sind; eine Eigenschaft, welche den cylindrischen Flächen ausschliesslich zukommt. Differenzirt man die Gl. (2) noch einmal partiell, so erhält man:

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + b\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0, \quad a\frac{d^2z}{dy\,dx} + b\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

und gewinnt aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von $\frac{a}{b}$ die Differenzialgleichung $2^{ter}$ Ordnung:

$$\left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}, \tag{3}$$

welche auch von den Constanten $a$ und $b$ frei ist, und eine noch allgemeinere Eigenschaft der cylindrischen Flächen ausdrückt.

2) Die Gl. einer Kegelfläche, deren Mittelpunkte die Coordinaten $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ entsprechen, ist bekanntlich:

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=f\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right); \tag{4}$$

wenn man dieselbe partiell in Bezug auf $x$ und $y$ differenzirt, ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$z-\gamma-(x-\alpha)\frac{dz}{dx}=-f'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)(y-\beta)\frac{dz}{dx},$$

$$(x-\alpha)\frac{dz}{dy}=-f'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\left[z-\gamma-(y-\beta)\frac{dz}{dy}\right],$$

aus welchen durch Elimination von $f'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)$ die partielle Differenzialgleichung der $1^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$z-\gamma=(x-\alpha)\frac{dz}{dx}+(y-\beta)\frac{dz}{dy} \tag{5}$$

folgt. Diese Gleichung drückt aus, dass jede Berührungsebene der krummen Fläche durch einen festen Punkt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gehe, eine Eigenschaft, welche den Kegelflächen ausschliessend zukommt.

Durch nochmalige partielle Differenziation der Gl. (5) erhält man:

$$(x-\alpha)\frac{d^2z}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2z}{dx\,dy}=0,$$

$$(x-\alpha)\frac{d^2z}{dy\,dx}+(y-\beta)\frac{d^2z}{dy^2}=0,$$

aus welchen durch Elimination von $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ die partielle Differenzialgleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung folgt:

$$\left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2=\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}. \tag{6}$$

Sie ist, wie man sieht, mit (3) identisch. In der That ist diese Gleichung, wie wir später sehen werden, die allgemeine Gleichung der developpablen oder abwickelbaren Flächen, d. h. solcher Flächen, welche sich ohne Risse und Falten in eine Ebene ausbreiten lassen, zu welchen, wie leicht einzusehen, sowohl die cylindrischen als conischen Flächen, als specielle Fälle gehören.

## V. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

**332.** Die Unterscheidung zwischen abhängig und unabhängig veränderlichen Grössen, welche bei den Operationen des Differenzirens sich von selbst aufdrängt, hat zur unmittelbaren Folge, dass das Differenzial der unabhängig veränderlichen Grösse als constant betrachtet werden muss. In der That ist in der aus $y = f(x)$ folgenden Gleichung $dy = f'(x)\,dx$, das Inkrement $dx$ der unabhängig Veränderlichen eine von $x$ unabhängige Grösse von willkürlichem Werthe, und erhält dadurch den Charakter einer constanten Grösse; nicht so verhält es sich mit dem Differenzial $dy$ der abhängigen Variablen, welches, da sein Ausdruck $f'(x)\,dx$ einen von $x$ abhängigen Faktor $f'(x)$ einschliesst, von $x$ abhängig wird und hiedurch das Gepräge einer veränderlichen Grösse annimmt. Bei der Entwickelung der höheren Differenzialien namentlich tritt dieser Unterschied an den Tag, indem hiebei, wie wir gesehen haben, die höheren Differenzialien der unabhängig Veränderlichen gleich Null gesetzt werden.

Nicht selten tritt aber im Laufe einer Rechnung das Bedürfniss ein, an die Stelle der bisher als unabhängig veränderlich betrachteten Grösse eine andere treten zu lassen, und es entsteht die Aufgabe, diese Umgestaltung an den bereits gewonnenen Ausdrücken auszuführen.

Nehmen wir an, eine Aufgabe habe auf die Gleichung:

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \frac{d^3y}{dx^3},\, \ldots\right) = 0 \tag{1}$$

geführt, indem $x$ als die unabhängig veränderliche Grösse, und $y$ als Funktion derselben betrachtet wurde. Es soll $x$ aufhören, die unabhängig Veränderliche zu sein, und dafür die Grösse $t$ als solche eingeführt werden, deren Zusammenhang mit einer der Grössen $x$, $y$, oder mit beiden natürlich gegeben sein muss.

Die Frage reducirt sich offenbar darauf, was in (1) an die Stelle der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots$$

gesetzt werden soll, wenn $x$ als Funktion von $t$ betrachtet wird? Beachtet man nun, dass der ursprüngliche Zusammenhang zwischen den Grössen $x$ und $y$ nicht aufgegeben wird, so haben wir jetzt $y$ als Funktion von $x$, und $x$ als Funktion von $t$ zu betrachten, und erhalten demnach, kraft der in §. 313 aufgestellten Regel:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

woraus
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{2}$$

folgt. Dieser Ausdruck ist in (1) an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$ zu setzen.

Differenziren wir die Gl. (2) neuerdings nach $t$, wobei wir $dt$ als constant betrachten, und erwägen, dass die linker Hand stehende Grösse: $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von $x$ wieder nach der Regel des §. 313 zu differenziren ist, so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

woraus
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \tag{3}$$

folgt, welcher Ausdruck statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) zu substituiren kommt. Hieraus ergibt sich durch neuerliche Differenziation nach $t$ ohne Schwierigkeit:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5} \tag{4}$$

u. s. w. Die in diesen Ausdrücken (2), (3), (4) erscheinenden Differenzialquotienten von $x$ und $y$ in Bezug auf die neue unabhängige Veränderliche $t$ sind aus jenen Gleichungen abzuleiten, welche den Zusammenhang ausdrücken, in welchem $t$ zu den ursprünglich vorhandenen Veränderlichen steht. Wir wollen in Kürze einige der am häufigsten vorkommenden speziellen Fälle betrachten.

**333.** I. Es soll $y$ als die neue unabhängig Veränderliche, und $x$ als die von $y$ abhängige Variable betrachtet werden. In diesem Falle ist $t = y$, folglich $\frac{dy}{dt} = 1$ und $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3y}{dt^3} = \ldots\ldots 0$, wodurch obige

Ausdrücke folgende Gestalt erhalten, wenn man zugleich allenthalben $y$ statt $t$ schreibt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}; \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}; \text{ etc. } (5)$$

Beisp. Aus $y=\sin x$ folgt $\frac{dy}{dx}=\cos x$, wobei $x$ die unabhängig Veränderliche ist. Soll nun diese Eigenschaft auf $y$ übertragen werden, so hat man $1:\frac{dx}{dy}$ statt $\frac{dy}{dx}$ in der letzten Gleichung zu setzen, wodurch dieselbe übergeht in:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

d. i. weil $x=\text{arc}\sin y$:

$$\frac{d.\text{arc}\sin y}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

wie bekannt. Durch dieses Verfahren könnte man die Differenzialien aller umgekehrten Funktionen entwickeln, und dasselbe auch auf die Darstellung der höheren Differenzialien anwenden.

II. Ist die neue unabhängig Veränderliche $t$ mit $x$ durch die Gleichung $\varphi(x,t)=0$ verbunden, so wird man aus dieser die Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$ u. s. w. ableiten und in den allgemeinen Ausdrücken (2), (3), (4), ... substituiren; werden sodann diese Ausdrücke für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. nebst dem Werthe von $x$ in Funktion von $t$ in (1) substituirt, so erhält man die gesuchte Gleichung $F=0$, in welcher nur noch $y$, $t$ und die Differenzialquotienten von $y$ nach $t$ erscheinen.

Wäre die Gleichung $\psi(y,t)=0$ gegeben, so würde man ganz in derselben Weise die Grösse $y$ aus (1) hinausschaffen können.

Wenn endlich eine Gleichung von der Form $\Phi(x,y,t)=0$ zwischen allen drei Veränderlichen gegeben wäre, so würde man aus derselben, $x$ und $y$ als Funktionen von $t$ betrachtend, die Werthe von $x$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, u. s. w. ziehen, ausgedrückt durch $y$, $t$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, u. s. w.,

(oder umgekehrt die Werthe von $y$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, u. s. w., ausgedrückt durch $x$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, u. s. w.) und in die allgemeinen Ausdrücke (2), (3), (4) u. s. w. substituiren, welche sodann statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. in (1) einzusetzen sind. Die Ausführung hat in diesen Fällen gar keine theoretischen Schwierigkeiten.

III. Nicht selten tritt der Fall ein, dass die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Veränderlichen und der neuen unabhängig Variablen ausdrückt, auch Differenzialquotienten von $x$ und $y$ nach $t$ enthält, oder mit anderen Worten, dass irgend eine Funktion der ursprünglichen Differenzialien als neues constantes Differenzial betrachtet werden soll. Das Verfahren bleibt im Wesentlichen dasselbe. Es sei z. B. der Ausdruck:

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{6}$$

gegeben (in welchem $dx$ das constante Differenzial), und eine neue unabhängig Veränderliche $s$ einzuführen, welche mit den früheren durch die Gleichung:

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \text{ oder } ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{$n$}$$

verbunden ist, so dass nun $ds$ das constante Differenzial werde. Substituirt man zunächst in (6) für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Ausdrücke (2) und (3), so erhält man, wenn man $s$ statt $t$ schreibt, und sogleich Zähler und Nenner mit $\left(\frac{dx}{ds}\right)^3$ multiplicirt:

$$\varrho = \pm \frac{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}},$$

welcher Ausdrück, mit Rücksicht auf die in ($n$) ausgesprochene Bedingung in:

$$\varrho = \pm \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}} = \pm \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \tag{7}$$

sich verwandelt, und in welchem noch kein Differenzial constant ist. Differenziren wir nun eine der Gl. $(n)$, etwa die zweite, unter der Voraussetzung, dass $s$ die unabhängig Veränderliche, also $ds$ constant sei, so erhalten wir $0 = dx\,d^2x + dy\,d^2y$, und mit Hülfe dieser Gleichung können wir aus (7) entweder $d^2x$ oder $d^2y$ eliminiren und erhalten mit Rücksicht auf $(n)$:

$$\varrho = \pm \frac{dx\,ds}{d^2y} = \mp \frac{dy\,ds}{d^2x}. \tag{8}$$

Die Ausdrücke (6) und (8) geben den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve in einem bestimmten Punkte; in (6) ist das Differenzial $dx$ der Abscisse, in (8) jenes $ds$ des Bogens als constant vorausgesetzt.

IV. Sehr häufig kommt endlich der Fall vor, dass man beide ursprüngliche Veränderliche $x$, $y$ durch zwei neue $r$, $t$ ersetzen will, von welchen $t$ die unabhängig Veränderliche sein soll, in welchem Falle zwei Gleichungen gegeben sein werden, welche den Zusammenhang zwischen $x$, $y$ und $r$, $t$ vermitteln, und aus welchen die Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$, gezogen werden können. Es seien z. B. in den Ausdruck (6), in welchem $dx$ constant ist, die neuen Veränderlichen $r$, $\theta$ einzuführen, welche mit $x$ und $y$ durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

verknüpft sind. Wählt man $\theta$ zur unabhängig Variablen, wodurch $r$ als Funktion von $\theta$ erklärt wird, so findet man:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta - r\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta,$$

und erhält durch Substitution dieser Ausdrücke in (2) und (3) nach leichter Reduktion:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^3}.$$

Mit diesen Werthen verwandelt sich nun (6) in:

$$\varrho = \pm \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}. \tag{9}$$

Dieser Ausdruck gibt den Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten.

**334.** Die bisher betrachtete Aufgabe wird im Wesentlichen auf dieselbe Weise aufgelöst, wenn mehr als eine unabhängig Veränderliche vorhanden sind. Es sei z. B. $z$ eine Funktion von $x$ und $y$, und die vorgelegte Gleichung:

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \ldots\right) = 0; \tag{10}$$

statt $x$, $y$ sollen die neuen Veränderlichen $\xi$, $\eta$ eingeführt werden, welche mit jenen durch die Gleichungen:

$$\varphi(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \psi(x, y, \xi, \eta) = 0 \tag{11}$$

verbunden sind. Die Gleichungen (11) machen nun $x$ und $y$ zu Funktionen von $\xi$, $\eta$, wodurch auch $z$ von diesen neuen Veränderlichen abhängig wird; man hat daher:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\xi}, \quad \frac{dz}{d\eta} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\eta} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\eta}; \tag{12}$$

aus diesen Gleichungen wird man die Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ziehen und in (10) substituiren; die in (12) noch erscheinenden Differenzialquotienten $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dx}{d\eta}$, $\frac{dy}{d\eta}$ bestimmen sich selbstverständlich aus (11).

Man differenzire nun abermals die Gleichungen (12) nach $\xi$ und $\eta$ mit der Rücksicht, dass $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ Funktionen von $x$ und $y$ sind und diese Grössen wieder von $\xi$ und $\eta$ abhängen, so erhält man:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\xi} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{d\xi^2},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2z}{d\xi\,d\eta} = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{d\xi}\frac{dx}{d\eta} + \frac{d^2z}{dx\,dy}\left(\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dx}{d\eta}\frac{dy}{d\xi}\right) + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{d\xi\,d\eta} \\ + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{d\xi\,d\eta},\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d^2z}{d\eta^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dx}{d\eta}\frac{dy}{d\eta} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{d\eta^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{d\eta^2},$$

welche Gleichungen die Werthe von $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ darbieten; sie enthalten noch die Differenzialquotienten 2ter Ordnung von $x$ und $y$ nach $\xi$ und $\eta$, welche sich wieder aus (11) ergeben.

Diesen Weg verfolgend gelangt man auch zu den Differenzialquotienten höherer Ordnung, wenn die Gl. (10) deren enthalten sollte. Auch bleibt das Verfahren dasselbe, wenn die Funktion $z$ von mehr als zwei Veränderlichen abhängt und eben so viele neue abhängige Variable eingeführt werden sollen.

Eine häufig vorkommende Transformation, durch welche man von den rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ auf Polarcoordinaten $r$, $\theta$ und $\omega$ übergeht, welche mit jenen durch die Gleichungen

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\omega, \quad z = r\sin\theta\sin\omega \qquad (m)$$

verbunden sind, möge zur Erläuterung des Vorstehenden noch angeführt werden. Wir betrachten hiebei $x$, $y$ in dem rechtwinkligen und $\theta$, $\omega$ in dem Polarcoordinatensystem als die unabhängigen Veränderlichen. Da $z$, als Funktion von $x$ und $y$, kraft der Gl. $(m)$ auch von $\omega$ und $\theta$ abhängt, so hat man:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{d\theta}, \quad \frac{dz}{d\omega} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega};$$

bestimmt man hieraus $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{dz}{d\theta}\frac{dy}{d\omega} - \frac{dz}{d\omega}\frac{dy}{d\theta} = P, \quad \frac{dz}{d\omega}\frac{dx}{d\theta} - \frac{dz}{d\theta}\frac{dx}{d\omega} = Q, \quad \frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\omega} - \frac{dx}{d\omega}\frac{dy}{d\theta} = R$$

so erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{Q}{R}.$$

Durch Differenziation der Gleichungen $(m)$ nach $\theta$ und $\omega$ findet man aber:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dx}{d\omega} = \frac{dr}{d\omega}\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\omega + r\cos\theta\cos\omega, \qquad \frac{dy}{d\omega} = \frac{dr}{d\omega}\sin\theta\cos\omega - r\sin\theta\sin\omega,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta\sin\omega + r\cos\theta\sin\omega, \qquad \frac{dz}{d\omega} = \frac{dr}{d\omega}\sin\theta\sin\omega + r\sin\theta\cos\omega.$$

Mit diesen Werthen ergibt sich nach leichter Reduktion:

$$P = - r \sin \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta\right),$$

$$Q = \quad r \sin \theta \cos \omega \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta\right) - r \frac{dr}{d\omega} \sin \omega,$$

$$R = - r \sin \theta \sin \omega \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta\right) - r \frac{dr}{d\omega} \cos \omega.$$

Hiemit sind die Differenzialquotienten 1ter Ordnung $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ durch die neuen Veränderlichen ausgedrückt.

Eine nochmalige Differenziation der obigen Gleichungen würde jene der 2ten Ordnung $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ darbieten; u. s. f.

Ist z. B. der Ausdruck $U = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ zu transformiren, so hat man: $U = \frac{1}{R} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$; man findet nach gehöriger Reduktion:

$$P^2 + Q^2 + R^2 = r^2 \left\{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin \theta^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right\},$$

somit:

$$U = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin \theta^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta\right) \sin \theta \sin \omega + \frac{dr}{d\omega} \cos \omega}.$$

## VI. Beziehungen, welche zwischen den Funktionen einer Veränderlichen und ihren Differenzialquotienten der verschiedenen Ordnungen stattfinden.

**335.** Lassen wir in der Funktion $y = f(x)$ die unabhängig Veränderliche $x$ um $\Delta x$ zunehmen, wobei $\Delta x$ immer positiv vorausgesetzt wird, so ändert sich die Funktion um $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, und es wird diese Aenderung eine Zunahme oder Abnahme sein, je nachdem die Differenz $\Delta y$ positiv oder negativ ist. Man kann daher auch sagen, dass bei zunehmendem $x$ die Funktion $y$ zunimmt oder abnimmt, je nachdem der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv oder negativ ist und es gilt diess offenbar, wie klein man auch $\Delta x$ annehmen mag. Da nun

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, so wird man $\Delta x$ immer so klein wählen können, dass das Zeichen von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit jenem von $f'(x)$ übereinstimmt; hieraus folgt, dass mit zunehmendem $x$ die Funktion $f(x)$ zunimmt oder abnimmt, je nachdem der 1[te] Differenzialquotient $f'(x)$ positiv oder negativ ist.

Hieraus ergibt sich unmittelbar noch der folgende Satz: Wenn die Funktion $f(x)$ von $x = x_0$ bis $x = x_1$ stetig ist, so kann dieselbe, während $x$ von $x_0$ bis $x_1$ zunimmt, nicht vom Zunehmen ins Abnehmen oder umgekehrt übergehen, wenn nicht der erste Differenzialquotient $f'(x)$ innerhalb dieses Intervalles sein Zeichen ändert. Im Falle die Funktion $f'(x)$ zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_1$ einen Zeichenwechsel erfährt, muss sie — wie leicht einzusehen — durch Null gehen, wenn sie zwischen diesen Grenzen stetig ist, und durch $\infty$, wenn sie eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

**336.** Wenn zwei Funktionen von $x$, $F(x)$ und $f(x)$, sammt ihren Differenzialquotienten stetig sind zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_0 + h$, und der Differenzialquotient $f'(x)$ der zweiten Funktion, innerhalb dieser Grenzen sein Zeichen nicht ändert, so ist, wenn $\theta$ einen positiven ächten Bruch bedeutet:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)}; \qquad (1)$$

d. h. es existirt immer ein zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_0 + h$ liegender Werth von $x$ (er kann mit $x_0 + \theta h$ bezeichnet werden, wenn $\theta$ ein positiver ächter Bruch), welcher das Verhältniss $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ dem Verhältnisse $\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$ gleich macht.

Es sei $A$ der kleinste, $B$ der grösste unter denjenigen Werthen, welche der Quotient $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ innerhalb der Grenzen $x_0$ und $x_0 + h$ annehmen vermag, so werden die zwei Differenzen

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} - A, \quad \frac{F'(x)}{f'(x)} - B$$

innerhalb der gedachten Grenzen $x_0$ und $x_0 + h$ nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben, und ihre Zeichen nicht wechseln; dasselbe wird daher auch von den Differenzen

$$F'(x) - Af'(x), \quad F'(x) - Bf'(x)$$

gelten, da der Voraussetzung nach $f'(x)$ von $x_0$ bis $x_0 + h$ sein Zeichen nicht ändert, und folglich weder Null noch unendlich werden kann. Diese beiden letzteren Differenzen sind aber die Differenzialquotienten der zwei Funktionen

$$F(x) - Af(x), \quad F(x) - Bf(x);$$

die eine dieser Funktionen wird daher von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$ beständig wachsen, die andere beständig abnehmen [§. 335]; somit müssen die beiden Differenzen:

$$[F(x_0 + h) - Af(x_0 + h)] - [F(x_0) - Af(x_0)] =$$
$$[F(x_0 + h) - F(x_0)] - A[f(x_0 + h) - f(x_0)]$$

und
$$[F(x_0 + h) - Bf(x_0 + h)] - [F(x_0) - Bf(x_0)] =$$
$$[F(x_0 + h) - F(x_0)] - B[f(x_0 + h) - f(x_0)]$$

entgegengesetzte Zeichen haben. Da nun kraft der Voraussetzung, dass $f'(x)$ von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$ sein Zeichen nicht ändert, die Differenz $f(x_0 + h) - f(x)$ stets positiv oder stets negativ ist, so werden die zwei Differenzen

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} - A \quad \text{und} \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} - B$$

ebenfalls entgegengesetzte Zeichen haben, und es wird daher da Verhältniss $\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$ grösser als $A$ und kleiner als $B$, folglich zwischen dem kleinsten und grössten Werthe von $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ enthalten sein. Nun ist der Voraussetzung nach sowohl $F'(x)$ als $f'(x)$ stetig von $x_0$ bis $x_0 + h$; der Quotient $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ wird daher, während $x$ von $x_0$ bis $x_0 + h$ geht, alle möglichen zwischen $A$ und $B$ liegenden Werthe durchlaufen, und folglich muss es einen zwischen $x_0$ und $x_0 + h$ liegenden Werth von $x$ geben, für welchen das Verhältniss $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ dem Verhältnisse $\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$ gleich wird. Bezeichnet man daher mit $\theta$ einen positiven ächten Bruch, so ist $x_0 + \theta h$ ein zwischen $x_0$ und $x_0 + h$ liegender Werth von $x$, und man darf setzen:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)},$$

d. h. das Verhältniss der Differenzen $F(x_0 + h) - F(x_0)$, und $f(x_0 - h) + f(x_0)$ ist einem der Werthe gleich, welche das Verhältniss

$\frac{F'(x)}{f'(x)}$ zwischen den Grenzen $x = x_0$ und $x = x_0 + h$ anzunehmen vermag.

Wenn die Funktionen $F(x)$, $f(x)$ für $x = x_0$ verschwinden, so folgt aus (1):

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}. \tag{2}$$

Die Voraussetzung, dass die Differenzialquotienten $F'(x)$ und $f'(x)$ für $x = x_0$ verschwinden, ändert offenbar nichts an dem Gange des Beweises, so dass die Gleichungen (1) und (2) auch für diesen Fall in Kraft bleiben.

**337.** Nehmen wir an, dass die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ sammt ihren successiven Differenzialquotienten stetig seien von $x_0$ bis $x_0 + h$; dass die Differenzialquotienten von der $1^{\text{ten}}$ bis $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$F'(x),\ F''(x), \ldots\ldots F^{(n-1)}(x),$$
$$f'(x),\ f''(x), \ldots\ldots f^{(n-1)}(x)$$

für $x = x_0$ verschwinden, und jene der Funktion $f(x)$ zwischen $x_0$ und $x_0 + h$ ihr Zeichen nicht verändern, so besteht zunächst die Gl. (1):

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}; \ldots\ldots \tag{n}$$

den Bedingungen, welche die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ erfüllen müssen, damit die Gl. (2) bestehe, genügen aber jetzt der Reihe nach die Funktionen: $F'(x)$, $f'(x)$; $F''(x)$, $f''(x)$; ..... $F^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$; daher ist:

$$\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)} = \frac{F''(x_0+\theta_1 h)}{f''(x_0+\theta_1 h)} = \frac{F'''(x_0+\theta_2 h)}{f'''(x_0+\theta_2 h)} = \ldots\ldots$$
$$= \frac{F^{(n-1)}(x_0+\theta_{n-2} h)}{f^{(n-1)}(x_0+\theta_{n-2} h)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta_{n-1} h)}{f^{(n)}(x_0+\theta_{n-1} h)},$$

wo $\theta_1$, $\theta_2$, ..... $\theta_{n-1}$ positive ächte Brüche bedeuten; man hat daher mit Rücksicht auf $(n)$, und wenn man $\theta$ statt $\theta_{n-1}$ schreibt:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}. \tag{3}$$

Verschwinden auch noch die Funktionen $F(x)$, $f(x)$ für $x = x_0$, so ist

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}. \tag{4}$$

Setzen wir endlich in dieser Gleichung $x_0 = 0$, und schreiben $x$ statt $h$, so wird:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(\theta x)} \tag{5}$$

Diese Gleichung setzt also voraus, dass die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ sammt ihren Differenzialquotienten stetig seien und für $x = 0$ verschwinden bis einschliesslich zu jenen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und die $n$ ersten Differenzialquotienten von $f(x)$ zwischen den Grenzen 0 und $x$ ihre Zeichen nicht ändern.

**338.** Die Bedingungen, welche die Gl. (3) an die Funktion $f(x)$ stellt, sind offenbar erfüllt, wenn wir $f(x) = (x - x_0)^n$ setzen, denn die Differenzialquotienten $f'(x) = n(x - x_0)^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)(x - x_0)^{n-2}$, u. s. w., bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$: $f^{(n-1)}(x) = n(n-1) \ldots\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, (x - x_0)$ verschwinden für $x = x_0$ und ändern von $x_0$ bis $x_0 + h$ ihr Zeichen nicht; ferner ist $f^{(n)}(x) = n(n-1) \ldots\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ von 0 verschieden, und (weil unabhängig von $x$) $= f^{(n)}(x_0 + \theta h)$. Ist daher noch die Funktion $F(x)$ so beschaffen, dass ihre Differenzialquotienten vom $1^{\text{ten}}$ bis incl. zum $(n-1)^{\text{ten}}$ für $x = x_0$ verschwinden, so folgt aus (3):

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} F^{(n)}(x_0 + \theta h). \tag{6}$$

Setzt man hier $n = 1$, d. h. nimmt man an, dass die Differenzialquotienten von $F(x)$ für $x = x_0$ nicht verschwinden, so folgt:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = hF'(x_0 + \theta h), \tag{7}$$

welche Gleichung auch aus (1) für $f(x) = x - x_0$ sich ergibt.

Verschwindet die Funktion $F(x)$ für $x = x_0$, so hat man aus (6):

$$F(x_0 + h) = \frac{h^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n} F^{(n)}(x_0 + \theta h). \tag{8}$$

Setzt man in (6) und (8) $x_0 = 0$, und schreibt $x$ statt $h$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$F(x) - F(0) = \frac{x^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n} F^{(n)}(\theta x), \tag{9}$$

und wenn $F(0) = 0$ ist:

$$F(x) = \frac{x^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n} F^{(n)}(\theta x). \tag{10}$$

# DRITTES KAPITEL.

## ENTWICKELUNG DER FUNKTIONEN IN REIHEN.

### I. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz für Funktionen einer veränderlichen Grösse.

**339.** Die Differenzialrechnung bietet sehr allgemeine Hülfsmittel dar zur Entwickelung der Funktionen in Reihen, welche nach Potenzen der Veränderlichen fortschreiten; mit diesen wollen wir uns nun beschäftigen.

Es sei $f(x)$ eine Funktion von $x$, welche sammt ihren Differenzialquotienten stetig ist zwischen den Grenzen $x$ und $x+h$, so hat man [Gl. (7). §. 338]:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h); \qquad (m)$$

ist ferner die Funktion $F(x)$ so beschaffen, dass sie und ihre Differenzialquotienten bis inclusive zu jenem der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung: $F'(x)$ $F''(x), \ldots\ldots F^{(n-1)}(x)$ für $x=0$ verschwinden und zwischen den Grenzen 0 und $x$ stetig bleiben, so hat man [Gl. (10). §. 338.]:

$$F(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}F^{(n)}(\theta x). \qquad (n)$$

Diess vorausgesetzt, schreiben wir den $2^{\text{ten}}$ Theil der Gl. $(m)$ in der Form: $hf'(x)+\varphi_1(h)$, was offenbar gestattet ist, wenn wir mit $\varphi_1(h)$ eine, übrigens unbekannte Funktion von $h$ bezeichnen, so beschaffen, dass $hf'(x)+\varphi_1(h)=hf'(x+\theta h)$ sei; die Gl. $(m)$ verwandelt sich dadurch in:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)=\varphi_1(h).$$

Diese Funktion $\varphi_1(h)$ und ihr $1^{\text{ter}}$ Differenzialquotient: $\varphi'_1(h)=f'(x+h)-f'(x)$ verschwinden für $h=0$ und sind so wie der $2^{\text{te}}$ Differenzialquotient: $\varphi''_1(h)=f''(x+h)$ stetig zwischen den Grenzen 0 und $h$; in Folge dieser Eigenschaften können wir auf diese Funktion die Gl. $(n)$ in Anwendung bringen, und erhalten: $\varphi_1(h)=\frac{h^2}{1.2}\varphi''_1(\theta h)$, d. i. weil $\varphi''_1(h)=f''(x+h)$ also $\varphi''_1(\theta h)=f''(x+\theta h)$ ist: $\varphi_1(h)=\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h)$. Hiemit wird:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x+\theta h).$$

Setzen wir nun: $\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x+\theta h)=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\varphi_2(h)$, so wird

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)=\varphi_2(h).$$

Die Funktion $\varphi_2(h)$, und ihre Differenzialquotienten der 1ten und 2ten Ordnung: $\varphi'_2(h)=f'(x+h)-f'(x)-hf''(x)$, $\varphi''_2(h)=f''(x+h)-f''(x)$ verschwinden für $h=0$, und bleiben sammt dem 3ten Differenzialquotienten $\varphi'''_2(h)=f'''(x+h)$ stetig zwischen 0 und $h$; daher ist zu Folge der Gl. $(n)$: $\varphi_2(h)=\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''_2(\theta h)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h)$; folglich:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)=\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x+\theta h),$$

und wenn wir wieder $\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x+\theta h)=\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x)+\varphi_3(h)$ setzen:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)-\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x)=\varphi_3(h).$$

Es ist nun wieder $\varphi_3(h)$ eine Funktion, welche sammt ihren Differenzialquotienten bis inclusive zum 3ten für $h=0$ verschwindet, und deren 4ter Differenzialquotient $\varphi''''_3(h)=f''''(x+h)$ ist; man hat daher nach $(n)$:

$$\varphi_3(h)=\frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\varphi''''_3(\theta h)=\frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f''''(x+\theta h),$$

somit:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)=\frac{h^4}{1.2.3.4}f''''(x+\theta h).$$

Offenbar kann man auf diesem Wege beliebig weit fortschreiten, und man hat daher:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots\ldots-\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$
$$=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\\ +\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Diese Gleichung, deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..... $f^{(n)}(x)$ innerhalb der Grenzen $x$ und $x+h$ stetig bleiben, heisst der Taylor'sche Lehrsatz oder die Taylor'sche Reihe. Das Glied $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$, in welchem $\theta$ einen übrigens nicht näher bestimmten positiven ächten Bruch bezeichnet, wird das Ergänzungs-Glied oder der Rest der Reihe genannt. Den Werth desselben kann man in Folge der Unbestimmtheit von $\theta$ im Allgemeinen nicht angeben, wohl aber zwei Grenzen, innerhalb welcher derselbe nothwendig liegen muss. Diese Grenzen sind offenbar $\frac{h^n}{n!}G$ und $\frac{h^n}{n!}G'$, wenn man mit $G$ und $G'$ den kleinsten und grössten Werth bezeichnet, welchen $f^{(n)}(x)$ zwischen den Grenzen $x$ und $x+h$ anzunehmen vermag. Hiedurch ist man in die Lage gesetzt, den Fehler schätzen zu können, welchen man begeht, wenn man die Reihe (1) bei irgend einem Gliede abbricht.

Wenn aber das Ergänzungsglied für ein unendlich wachsendes $n$ unendlich klein wird, so folgt aus (1), für $n=\infty$ die unendliche Reihe:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\dots\dots, \qquad (2)$$

welche Reihe in diesem Falle nothwendig von $x$ bis $x+h$ convergent sein wird, weil sonst ihre Summe nicht $=f(x+h)$ d. h. keine bestimmte endliche Grösse sein könnte.

**340.** Setzt man in der Gl. (1) des vor. §. $x=0$ und schreibt sodann $x$ statt $h$, so erhält man:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\dots\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x), \qquad (3)$$

welche Gleichung der Maclaurin'sche Lehrsatz genannt wird, und voraussetzt, dass die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, .... $f^{(n)}(x)$ von $x=0$ bis $x=x$ stetig sind. Das Glied $\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$ heisst auch hier das Ergänzungsglied oder der Rest der Reihe, und es gilt in Bezug auf ihn dasselbe, was im vorigen §. von dem Reste der Taylor'schen Reihe bemerkt wurde.

Wenn beim unendlichen Zunehmen von $n$ der Rest $\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$ unendlich klein wird, so folgt aus (3):

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots\ldots, \quad (4)$$

und die rechter Hand stehende unendliche Reihe ist in diesem Falle zugleich nothwendig convergent, da sie die endliche Grösse $f(x)$ zur Summe hat.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Reste der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe:

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots.n} f^{(n)}(x + \theta h), \quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x)$$

beim unendlichen Zunehmen von $x$ immer unendlich klein werden, wenn die Grössen $f^{(n)}(x + \theta h)$ und $f^{(n)}(\theta x)$ endliche Werthe behalten, wie gross man auch $n$ wählen mag, weil der andere Faktor von der Form $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \ldots \frac{h}{n-1} \cdot \frac{h}{n}$ beim unendlichen Zunehmen von $n$ unendlich klein wird.

Indessen ist die Untersuchung, ob und für welche Werthe von $x$ der Rest beim unendlichen Zunehmen von $n$ verschwinde, fast immer umständlich und weitläufig; die Frage, ob und innerhalb welcher Grenzen die Gleichungen (2) und (3) Geltung haben, erledigt sich in der Regel einfacher, indem man die Reihen

$$f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots\ldots$$

und $$f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots\ldots$$

in Bezug auf ihre Convergenz untersucht. Diese Reihen haben die Form: $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$ und convergiren somit [§. 35.] für alle Werthe von $h$ oder beziehungsweise $x$, welche innerhalb der Grenzen $\pm \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$ liegen.

Setzt man in (1) $h = a - x$, und vertauscht sodann die Buchstaben $a$ und $x$ unter einander, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots\ldots \\ + \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}[a + \theta(x - a)], \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

eine allgemeinere Form der Maclaurin'schen Reihe, welche wieder in die obige (3) übergeht, wenn man $a = 0$ setzt.

Es mag noch bemerkt werden, dass man auch umgekehrt die Taylor'sche Reihe aus der Maclaurin'schen ableiten kann. Kraft der letzteren hat man nämlich:

$$F(h) = F(0) + h\,F'(0) + \frac{h^2}{1.2}F''(0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta h);$$

setzt man nun $F(h) = f(x+h)$, so wird

$$F'(h) = f'(x+h),\ F''(h) = f''(x+h),\ \ldots\ F^{(n)}(h) = f^{(n)}(x+h);$$
$$F(0) = f(x),\ F'(0) = f'(x),\ F''(0) = f''(x),\ \ldots F^{(n)}(\theta h) = f^{(n)}(x+\theta h);$$

somit, wenn man substituirt:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f(x+\theta h).$$

**341.** Der Gebrauch des Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatzes zur Entwickelung der Funktionen in Reihen bietet keine weiteren Schwierigkeiten dar. Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1) Es sei $f(x) = x^m$, so wird $f'(x) = mx^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$, u. s. w. und allgemein $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\,x^{m-n}$; man erhält daher nach dem Taylor'schen Satze:

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 + \ldots$$

Die Entwickelung bricht ab, wenn $m$ eine ganze positive Zahl, in jedem anderen Falle ist die Reihe unendlich, und convergirt nur, wenn $\frac{h}{x} < 1$; an diese Bedingung ist also dann auch die obige Gleichung gebunden.

2) Es sei $f(x) = \sin x$; es ist $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, u. s. w. $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$; folglich nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{1.2}\sin x - \frac{h^3}{1.2.3}\cos x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\sin x + \ldots$$

Ebenso erhält man:

$$\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{1.2}\cos x + \frac{h^3}{1.2.3}\sin x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\cos x - \ldots$$

Beide Reihen convergiren, wie man sich sehr leicht überzeugt, für jeden Werth von $x$ und $h$.

Setzt man $x = 0$ und schreibt sodann $x$ statt $h$, so verwandeln sich diese Gleichungen in folgende:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

welche sich übrigens auch unmittelbar mittelst der Maclaurin'schen Formel ergeben.

3) Für $f(x) = lx$ liefert der Taylor'sche Lehrsatz:

$$l(x + h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots.$$

Die Reihe convergirt, wenn $\frac{h}{x}$ ein ächter Bruch ist.

Erwägt man, dass $l(x+h) = lx\left(1 + \frac{h}{x}\right) = lx + l\left(1 + \frac{h}{x}\right)$ ist, so folgt hieraus, wenn man $lx$ zu beiden Seiten aufhebt und sodann $x$ statt $\frac{h}{x}$ schreibt:

$$l(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.. \begin{cases} x > -1 \\ x < +1, \end{cases}$$

die bekannte logarithmische Fundamentalreihe, welche man auch unmittelbar mittelst der Maclaurin'schen Formel gewinnt, wenn man dieselbe auf die Funktion $f(x) = l(1 + x)$ anwendet. Auf die Funktion $f(x) = lx$ lässt sich hingegen die Maclaurin'sche Formel nicht anwenden, da die Funktion $lx$ und ihre sämmtlichen Differenzialquotienten für $x = 0$ unendlich werden. Diese Funktion kann daher in eine nach steigenden Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe nicht entwickelt werden.

4) Für $f(x) = a^x$ erhält man $f'(x) = a^x la$, $f''(x) = a^x(la)^2$, u. s. w. und allgemein $f^{(n)}(x) = a^x(la)^n$; somit $f(0) = 1$, $f'(0) = la$, $\ldots.. f^{(n)}(0) = (la)^n$; der Maclaurin'sche Lehrsatz liefert daher die Gleichung:

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \ldots..,$$

welche Reihe für jeden Werth von $x$ convergirt.

Anmerkung. Schreibt man die Taylor'sche Reihe in der Form:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots.$$

so gibt, wie man sieht, die rechte Seite dieser Gleichung die Aenderung, welche die Funktion $f(x)$ erfährt, wenn sich $x$ um die beliebige Grösse $h$ ändert, und zwar geordnet nach aufsteigenden Potenzen von $h$. In den Anwendungen der Mathematik wird hievon eine sehr häufige Anwendung gemacht.

**342.** Die Taylor'sche Formel setzt voraus, dass die Funktion $f(x)$ und ihre successiven Differenzialquotienten für jenen Werth von $x$, von welchem die Zunahme $h$ erfolgt, nicht unendlich werden. Hieraus folgt, dass man zwar jede Funktion nach der Taylor'schen Reihe entwickeln könne, dass jedoch bei gewissen Funktionen für besondere Werthe von $x$ dieser Lehrsatz zur Entwickelung unbrauchbar werden kann. Es habe z. B. die gegebene Funktion $f(x)$ die Form: $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^r}$, unter $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion verstanden, welche für $x=a$ weder Null noch unendlich ist, so wird $f(x+h)=\frac{\varphi(x+h)}{(x+h-a)^r}$ $=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$; die Differenzialquotienten: $f'(x)$, $f''(x)$, u. s. w. sind leicht zu entwickeln, und enthalten sämmtlich, so wie $f(x)$, im Nenner Potenzen von $(x-a)$. Für $x=a$ werden daher sämmtliche Glieder rechter Hand unendlich, während die linke Seite $f(a+h)=\frac{\varphi(a+h)}{h^r}$ einen vollkommen bestimmten Werth erhält.

Es ist aber:

$$f(a+h)=\frac{\varphi(a+h)}{h^r}=h^{-r}\varphi(a)+h^{-r+1}\varphi'(a)+\frac{h^{-r+2}}{1.2}\varphi''(a)+\ldots;$$

die Entwickelung erhält daher, wie man sieht, für $x=a$ in den Anfangsgliedern negative Potenzen von $h$; aus diesem Grunde kann die Taylor'sche Reihe, welche nach positiven ganzen Potenzen von $h$ fortschreitet, die Entwickelung des Ausdruckes $\frac{\varphi(x+h)}{(x+h-a)^r}$ für den speziellen Werth $x=a$ nicht geben.

Aehnlich verhält sich die Sache, wenn die zu entwickelnde Funktion eine Wurzelgrösse enthält, und die Grösse unter dem Wurzelzeichen für einen besonderen Werth von $x=a$ verschwindet; die Entwickelung enthält dann für $x=a$ nothwendig gebrochene Potenzen von $h$ und kann daher durch die Taylor'sche Reihe nicht erhalten werden. Es sei z. B. $f(x)=(x-b)^n\sqrt{x^2-a^2}$; die Differenzialquotienten dieser Funktion werden für $x=a$ unendlich; man hat aber $f(a+h)=(a-b+h)^n\sqrt{2ah+h^2}$, und die Entwickelung dieses Ausdruckes (mit Hülfe der Binomialformel) liefert offenbar Potenzen von $h$ mit gebrochenen Exponenten. In allen diesen übrigens selten vorkommenden Fällen wird man zu den gewöhnlichen Entwickelungsmethoden seine Zuflucht nehmen.

## II. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

**343.** Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe lassen sich leicht auf Funktionen mehrerer veränderlichen Grössen ausdehnen. Es sei

$$z = f(x, y)$$

eine Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$, und $f(x+h, y+k)$ in eine nach steigenden Potenzen von $h$ und $k$ fortschreitende Reihe zu entwickeln. Setzen wir zu diesem Behufe $h = t\xi$, $k = t\eta$, so wird:

$$f(x+h, y+k) = f(x+t\xi, y+t\eta) = F(t),$$

welchen Ausdruck wir nun als Funktion von $t$ betrachten, und als solche nach dem Maclaurin'schen Satze entwickeln können. Man hat diesem zufolge:

$$F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{1.2}F''(0) + \frac{t^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots\ldots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(\theta t).$$

Aus der Gleichung:

$$F(t) = f(x+t\xi, y+t\eta)$$

folgt aber, wenn man Kürze halber $x+t\xi = u$, $y+t\eta = v$ setzt:

$$F'(t) = \frac{df}{du}\xi + \frac{df}{dv}\eta,$$

$$F''(t) = \frac{d^2f}{du^2}\xi^2 + 2\frac{d^2f}{du\,dv}\xi\eta + \frac{d^2f}{dv^2}\eta^2,$$

$$F'''(t) = \frac{d^3f}{du^3}\xi^3 + 3\frac{d^3f}{du^2\,dv}\xi^2\eta + 3\frac{d^3f}{du\,dv^2}\xi\eta^2 + \frac{d^3f}{dv^3}\eta^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(t) = \left\{\frac{df}{du}\xi + \frac{df}{dv}\eta\right\}^n.$$

Setzt man in diesen Gleichungen, mit Ausnahme der letzten, $t = 0$, wodurch $u$ und $v$ in $x$ und $y$ übergehen, so kommt:

$$F(0) = f(x, y),$$

$$F'(0) = \frac{df}{dx}\xi + \frac{df}{dy}\eta,$$

$$F''(0) = \frac{d^2f}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\xi\eta + \frac{d^2f}{dy^2}\eta^2,$$

$$F'''(0) = \frac{d^3f}{dx^3}\xi^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2\,dy}\xi^2\eta + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\xi\eta^2 + \frac{d^3f}{dy^3}\eta^3,$$

u. s. w.

Werden nun diese Ausdrücke in die obige Reihe für $F(t)$ substituirt und statt $t\xi$ und $t\eta$ wieder die Werthe $h$ und $k$ eingeführt, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x+h,\, y+k) = f(x,\, y) &+ \frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2f}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}hk + \frac{d^2f}{dy^2}k^2\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3f}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}h^2k + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}hk^2 + \frac{d^3f}{dy^3}k^3\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{R}{n!}, \end{aligned}$$

wo $R$ das totale $n^{te}$ Differenzial der Funktion $f(x,\, y)$ ist, wenn in demselben die Grössen $h$ und $k$ statt der Differenzialfaktoren $dx$, $dy$ gesetzt werden, und $x + \theta h$ statt $x$, $y + \theta h$ statt $y$ geschrieben wird. Hiebei bezeichnet $\theta$ einen positiven ächten Bruch, und man erhält zwei Grenzen, innerhalb welcher der Werth der Reihe nothwendig liegt, wenn man für $\theta$ jene zwei Werthe wählt, welche dem Reste $\frac{R}{n!}$ beziehungsweise den möglichst grössten und kleinsten Werth ertheilen.

Das in der obigen Reihenentwickelung stattfindende Gesetz fällt leicht in die Augen, und man könnte nun nach demselben Gesetze die Taylor'sche Reihe leicht für Funktionen von einer beliebigen Anzahl von Variablen hinschreiben.

Setzt man in der obigen Taylor'schen Reihe $x = 0$, $y = 0$, und schreibt sodann $x$ statt $h$, $y$ statt $k$, so erhält man den auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnten Maclaurin'schen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} f(x,\, y) = f(0,\, 0) &+ \frac{df_0}{dx}x + \frac{df_0}{dy}y \\ &+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2f_0}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2f_0}{dx\,dy}xy + \frac{d^2f_0}{dy^2}y^2\right\} \\ &+ \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3f_0}{dx^3}x^3 + 3\frac{d^3f_0}{dx^2dy}x^2y + 3\frac{d^3f_0}{dx\,dy^2}xy^2 + \frac{d^3f_0}{dy^3}y^3\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{R}{n!}, \end{aligned}$$

welcher die Entwickelung der Funktion $f(x,\, y)$ nach Potenzen der Veränderlichen $x$ und $y$ liefert. Die Symbole $\frac{df_0}{dx}$, $\frac{df_0}{dy}$, $\frac{d^2f_0}{dx^2}$ u. s. w.

bedeuten jene Werthe, welche die Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ u. s. w. für $x = 0$ und $y = 0$ annehmen.

**344.** Beispiel. Man suche die Veränderung, welche die Seite $\alpha$ eines sphärischen Dreieckes $ABC$ erleidet, wenn der opponirte Winkel $A$ um $dA$ und die Seite $\beta$ um $d\beta$ sich ändern.

Es ist bekanntlich:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \qquad (m)$$

und folglich $\alpha = f(\beta, A)$; bezeichnet man daher den geänderten Werth von $\alpha$ mit $\alpha'$, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze für mehrere Veränderliche:

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\beta}d\beta + \frac{d\alpha}{dA}dA + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}d\beta^2 + 2\frac{d^2\alpha}{d\beta dA}d\beta\, dA + \frac{d^2\alpha}{dA^2}dA^2\right\} + \text{u. s. w.}$$

Differenzirt man nun die Gl. $(m)$ partiell nach $\beta$ und nach $A$, so erhält man:

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\beta} = -\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma\cos A, \qquad (n)$$

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{dA} = -\sin\beta\sin\gamma\sin A. \qquad (p)$$

Die 1te dieser Gleichungen nach $\beta$, die 2te nach $A$ differenzirt, gibt:

$$-\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 - \sin\alpha\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = -(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A), \quad (q)$$

$$-\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{dA}\right)^2 - \sin\alpha\frac{d^2\alpha}{dA^2} = -\sin\beta\sin\gamma\cos A; \qquad (r)$$

endlich, wenn man $(n)$ nach $A$, oder $(p)$ nach $\beta$ differenzirt, so kommt:

$$-\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\beta}\frac{d\alpha}{dA} - \sin\alpha\frac{d^2\alpha}{d\beta dA} = -\cos\beta\sin\gamma\sin A. \qquad (s)$$

Bleiben wir bei den Gliedern 2ter Ordnung stehen, so folgt nun aus $(n)$ und $(p)$:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos C, \quad \frac{d\alpha}{dA} = \sin\beta\sin C,$$

da nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie:
$\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma\cos A = \sin\alpha\cos C$ und $\sin\gamma\sin A = \sin\alpha\sin C$

ist. Aus ($q$) folgt ferner, wenn man für $\frac{d\alpha}{d\beta}$ den eben gefundenen Werth einsetzt, und beachtet, dass der 2[te] Theil $= - \cos\alpha$ ist:

$$\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = \operatorname{cotg}\alpha \sin C^2.$$

Aus ($r$) zieht man:

$$\sin\alpha \frac{d^2\alpha}{dA^2} = \sin\beta(\sin\gamma\cos A - \cos\alpha\sin\beta\sin C^2);$$

es ist aber $\sin\gamma\cos A = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\cos C$, womit

$$\frac{d^2\alpha}{dA^2} = \sin\beta^2\cos C(\operatorname{cotg}\alpha\cos C - \operatorname{cotg}\beta)$$

wird. Endlich folgt aus ($s$), wenn man $\sin\alpha\sin C$ statt $\sin\gamma\sin A$ schreibt:

$$\frac{d^2\alpha}{d\beta dA} = \sin\beta\sin C(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha\cos C).$$

Hiemit wird bis auf Glieder der 2[ten] Ordnung genau:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha = {} & \cos C\,d\beta + \sin\beta\sin C\,dA \\ & + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha\sin C^2\,d\beta^2 \\ & + \sin\beta\sin C(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha\cos C)\,d\beta dA \\ & + \frac{1}{2}\sin\beta^2\cos C(\operatorname{cotg}\alpha\cos C - \operatorname{cotg}\beta)\,dA^2.\end{aligned}$$

## III. Die Umkehrungsformel von Lagrange zur Entwickelung der impliciten Funktionen. — Anwendung der Differenzialrechnung auf verschiedene Reihenentwickelungen.

**345.** Es sei

$$y = z + xf(y), \qquad (a)$$

und $u = F(y)$, wo $f$, $F$ wie immer geformte Funktionen und $x$, $z$ zwei von einander unabhängige Veränderliche bezeichnen. Man soll die Funktion $u = F(y)$ in eine nach steigenden Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe entwickeln, so dass die Coefficienten dieser Potenzen nur allein Funktionen von $z$ sind.

Denken wir uns die Gl. ($a$) nach $y$ aufgelöst und den Werth von $y$ in $u = F(y)$ substituirt, so erscheint $u$ als Funktion von $x$ und $z$

und kann demnach nach Maclaurin's Lehrsatz in eine nach Potenzen von $x$ geordnete Reihe:

$$u = F(y) = u_0 + x\left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 + \ldots\ldots$$

verwandelt werden; hier bezeichnen $u_0$, $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0$, u. s. w. jene Werthe, welche die Grössen $u$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, u. s. w. annehmen, wenn man in denselben $x = 0$ setzt, und es kommt daher darauf an, diese Werthe, bloss durch $z$ ausgedrückt, darzustellen.

Da für $x = 0$, $y = z$ wird, so hat man sogleich

$$u_0 = F(z).$$

Differenzirt man die Gl. $(a)$ partiell nach $z$ und $x$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dz} = 1 + xf'(y)\frac{dy}{dz}, \quad \frac{dy}{dx} = f(y) + xf'(y)\frac{dy}{dx},$$

aus welchen Gleichungen durch Elimination von $f'(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\frac{dy}{dz} \qquad (b)$$

folgt. Durch Differenziation nach $z$ ergibt sich noch aus dieser Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dz\,dx} = f(y)\frac{d^2y}{dz^2} + f'(y)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2. \qquad (b')$$

Ist aber $\psi(y)$ eine beliebige Funktion von $y$, so hat man:

$$\frac{d\left\{\psi(y).\frac{dy}{dz}\right\}}{dx} = \psi(y)\frac{d^2y}{dx\,dz} + \psi'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz},$$

d. i. wenn man obige Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx\,dz}$ aus $(b)$ und $(b')$ substituirt:

$$\frac{d\left\{\psi(y).\frac{dy}{dz}\right\}}{dx} = \psi(y)f(y).\frac{d^2y}{dz^2} + [\psi(y)f'(y) + \psi'(y)\,f(y)]\left(\frac{dy}{dz}\right)^2;$$

der 2te Theil dieser Gleichung ist aber, wie man leicht sieht, der nach $z$ genommene Differenzialquotient des Produktes $\psi(y).f(y).\frac{dy}{dz}$; es ist daher:

$$\frac{d\left\{\psi(y)\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dx}=\frac{d\left\{\psi(y)\cdot f(y)\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dz}. \qquad (c)$$

Diese Gleichung besteht, $\psi(y)$ mag was immer für eine Funktion von $y$ sein, wenn nur $y = z + xf(y)$.

Diess vorausgesetzt, differenziren wir die Gl. $u = F(y)$ nach $x$, und erhalten: $\frac{du}{dx} = F'(y)\frac{dy}{dx}$, d. i. mit Rücksicht auf $(b)$:

$$\frac{du}{dx}=F'(y)\cdot f(y)\frac{dy}{dz}. \qquad (d)$$

Eine zweite Differenziation dieser Gleichung nach $x$ gibt uns:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d\left\{F'(y)\cdot f(y)\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dx},$$

d. i. wenn wir auf den 2ten Theil die Gl. $(c)$ in Anwendung bringen, $\psi(y) = F'(y) \cdot f(y)$ setzend:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d\left\{F'(y)\cdot[f(y)]^2\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dz}. \qquad (e)$$

Diese Gleichung abermals nach $x$ differenzirend, erhalten wir:

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{d\left\{F'(y)\cdot[f(y)]^2\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dz},$$

oder, im 2ten Theil die Ordnung des Differenzirens umkehrend:

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d}{dz}\cdot\frac{d\left\{F'(y)\cdot[f(y)]^2\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dx},$$

folglich, wenn wir für den im 2ten Theil erscheinenden nach $x$ genommenen Differenzialquotienten wieder die Gl. $(c)$ in Anspruch nehmen, jetzt $\psi(y) = F'(y) \cdot [f(y)]^2$ setzend:

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2\left\{F'(y)\cdot[f(y)]^3\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dz^2}. \qquad (f)$$

Es folgt aus dem unveränderlichen Gange dieser Rechnung, dass man allgemein hat:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left\{F'(y)\cdot[f(y)]^n\cdot\frac{dy}{dz}\right\}}{dz^{n-1}}. \qquad (g)$$

Setzt man nun in den Gleichungen $(d)$, $(e)$, $(f)$, $(g)$, $x = 0$ wodurch $y = z, \frac{dy}{dz} = 1$ wird, so erhält man:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = F'(z).f(z), \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{d}{dz}\left\{F'(z).[f(z)]^2\right\},$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = \frac{d^2}{dx^2}\left\{F'(z).[f(z)]^3\right\}, \ldots\ldots \left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{F'(z).[f(z)]^n\right\}.$$

Durch Substitution dieser Werthe, und jenes von $u_0 = F'(z)$, ergibt sich nun die folgende sehr allgemeine Entwickelung:

$$\begin{aligned} y &= z + xf(y), \\ F(y) &= F(z) + F'(z).f(z)\frac{x}{1} + \frac{d}{dz}\left\{F'(z).[f(z)]^2\right\}\frac{x^2}{1.2} + \\ &\quad + \frac{d^2}{dz^2}\left\{F'(z).[f(z)]^3\right\}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots, \end{aligned} \qquad (I)$$

welche nach ihrem grossen Erfinder die Reihe (Umkehrungsformel, das Reversionstheorem) von Lagrange genannt wird.

Will man aus der Gleichung $y = z + xf(y)$ den Werth von $y$ selbst ziehen, so setze man $u = F(y) = y$, wodurch $F(z) = z$, $F'(z) = 1$ wird; hiemit folgt aus (I):

$$\begin{aligned} y &= z + xf(y), \\ y &= z + f(z)\frac{x}{1} + \frac{d[f(z)]^2}{dz}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2[f(z)]^3}{dz^2}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \end{aligned} \qquad (II)$$

als spezieller Fall der allgemeineren Reihe (I).

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die mit Hülfe des Lagrange'schen Satzes gewonnenen Reihen zur numerischen Berechnung nur angewendet werden können, wenn sie convergiren.

**346.** Zur Erläuterung des Gebrauches der vorstehenden allgemeinen Formeln mögen folgende Beispiele dienen.

Beisp. 1. Es sei die Gleichung: $ay^n - y + b = 0$ gegeben; man sucht $y^m$. Bringt man diese Gleichung auf die Form: $y = b + ay^n$, und vergleicht sie mit der allgemeinen Gl: $y = z + xf(y)$, so hat man

$$z = b, \; x = a, \; f(y) = y^n \text{ und } F(y) = y^m;$$

gemäss der Formel (I) bilde man nun die Grössen:

$$F'(y) = my^{m-1}; \quad F'(y)[f(y)]^k = my^{m+kn-1};$$

$$\frac{d^{k-1}\{F'(y)[f(y)]^k\}}{dy^{k-1}} =$$

$$= m(m+kn-1)(m+kn-2)\ldots\ldots[m+kn-(k-1)]\,y^{m+k(n-1)};$$

setzt man hierin $y = z = b$, und der Reihe nach $k = 1, 2, 3$, u. s. w., so erhält man durch Substitution der gewonnenen Ausdrücke in die Gl. (I):

$$y^m = b^m + mb^{m+n-1}a + \frac{m(m+2n-1)}{1.2}b^{m+2(n-1)}a^2$$
$$+ \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)}{1.2.3}b^{m+3(n-1)}a^3$$
$$+ \ldots\ldots$$

Setzt man hier $m = 1$, so wird:

$$y = b + ab^n + na^2b^{2n-1} + \frac{n(3n-1)}{1.2}a^3b^{3n-2}$$
$$+ \frac{n(4n-1)(4n-2)}{1.2.3}a^4b^{4n-3} + \ldots\ldots$$

eine Wurzel der Gleichung $ay^n - y + b = 0$.

Für $n = 2$ gibt endlich die Reihe:

$$y = b\left\{1 + (ab) + 2(ab)^2 + 5(ab)^3 + \frac{7.6}{3}(ab)^4 + \frac{9.8.7}{3.4}(ab)^5 + \ldots\right\}$$

eine Wurzel der Gleichung $ay^2 - y + b = 0$.

Beisp. 2. Es sei $ay^n - y + b = 0$; man suche $ly$. Hier ist: $y = b + ay^n$, folglich:

$$z = b, \quad x = a, \quad f(y) = y^n, \quad F(y) = ly;$$

ferner: $F'(y) = \frac{1}{y}$, $F'(y)[f(y)]^k = y^{kn-1}$, und

$$\frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}}\left\{F'(y)[f(y)]^k\right\} = (kn-1)(kn-2)\ldots\ldots(kn-k+1)\,y^{k(n-1)};$$

hiemit erhält man nach (1):

$$ly = lb + ab^{n-1} + \frac{2n-1}{2}a^2b^{2(n-1)} + \frac{(3n-1)(3n-2)}{2.3}a^3b^{3(n-1)} + \ldots.$$

Beisp. 3. Es sei die Gleichung $y = xe^y$ gegeben; man suche $y$. Man hat: $z = 0$, $x = x$, $f(y) = e^y$; ferner;

$$[f(y)]^k = e^{ky}, \quad \frac{d^{k-1}[f(y)]^k}{dy^{k-1}} = k^{k-1}e^{ky};$$

folglich $y = z = 0$ setzend, nach (II):

$$y = x + \frac{2^1 . x^2}{1.2} + \frac{3^2 . x^2}{1.2.3} + \frac{4^3 . x^3}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Man findet für diese Reihe: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = x \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{n}}$,

somit $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = xe$; diese Reihe convergirt daher nur, wenn $xe < 1$, d. i. $x < \frac{1}{e}$ ist.

Beisp. 4. Aus der Gleichung: $m = u - \varepsilon \sin u$ soll $u$ gefunden werden. Mit der Gleichung $y = z + xf(y)$ verglichen, hat man: $u = m + \varepsilon \sin u$, also $y = u$, $z = m$, $x = \varepsilon$, $f(y) = \sin u$; folglich nach (II):

$$u = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2} . \frac{d . \sin m^2}{dm} + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} . \frac{d^2 . \sin m^3}{dm^2} + \ldots..,$$

und wenn man die Differenzialquotienten gehörig entwickelt:

$$u = m + \varepsilon \sin m + \varepsilon^2 \sin m \cos m + \varepsilon^3 \sin m \left(\cos m^2 - \frac{1}{2} \sin m^2\right) + \ldots..$$

Um in die Coefficienten ein leichter zu übersehendes Gesetz zu bringen, und sie zur Berechnung bequemer zu gestalten, kann man folgendermaassen verfahren.

Man hat bekanntlich, [I. Bd., §. 75, Gl. (34) und (35)]:

wenn $m$ ungerade:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} . 2^{m-1} . \sin x^m = \sin mx - \binom{m}{1} \sin (m-2) x$$

$$+ \binom{m}{2} \sin (m-4) x - \ldots. \pm \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \sin x, \ldots. \qquad (a)$$

wenn $m$ gerade:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} . 2^{m-1} . \sin x^m = \cos mx - \binom{m}{1} \cos (m-2) x$$

$$+ \binom{m}{2} \cos (m-4) x - \ldots.. \pm \binom{m}{\frac{m}{2}-1} \cos 2x \mp \frac{1}{2} \binom{m}{\frac{m}{2}}. \qquad (b)$$

Die Glieder im 2ten Theile dieser Gleichungen haben sämmtlich die Form $\sin rx$ und $\cos rx$, und es ist bekanntlich:

$$\frac{d^{m-1}\sin rx}{dx^{m-1}} = r^{m-1}\sin\left[rx + \frac{(m-1)\pi}{2}\right],$$

$$\frac{d^{m-1}\cos rx}{dx^{m-1}} = r^{m-1}\cos\left[rx + \frac{(m-1)\pi}{2}\right];$$

nimmt man daher von der Gl. ($a$) den $(m-1)^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten, so kommt, wenn man Kürze halber $\frac{(m-1)\pi}{2} = A$ setzt:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}.2^{m-1}.\frac{d^{m-1}\sin x^m}{dx^{m-1}} =$$

$$m^{m-1}\sin[mx+A] - \binom{m}{1}(m-2)^{m-1}\sin[(m-2)x+A] +$$

$$+\binom{m}{2}(m-4)^{m-1}\sin[(m-4)x+A] - \ldots \pm \binom{m}{\frac{m-1}{2}}\sin[x+A].$$

Es ist aber $\sin(\alpha+A) = \sin\left(\alpha + \frac{(m-1)\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{(m-1)\pi}{2}$ $+ \cos\alpha\sin\frac{(m-1)\pi}{2}$, und, und da $m$ ungerade, also $\frac{m-1}{2}$ eine ganze Zahl ist, $\sin\frac{(m-1)}{2}\pi = 0$, $\cos\frac{(m-1)}{2}\pi = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$, somit $\sin(\alpha+A)$ $= (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin\alpha$; wird auf diese Art jedes Glied im $2^{\text{ten}}$ Theile reducirt, so erhält man, nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$:

wenn $m$ ungerade:

$$2^{m-1}.\frac{d^{m-1}\sin x^m}{dx^{m-1}} = m^{m-1}\sin mx - (m-2)^{m-1}\binom{m}{1}\sin(m-2)x$$

$$+ (m-4)^{m-1}\binom{m}{2}\sin(m-4)x - \ldots \pm \binom{m}{\frac{m-1}{2}}\sin x.$$

Die Gleichung ($b$) auf dieselbe Weise behandelt, gibt:

wenn $m$ gerade:

$$2^{m-1}.\frac{d^{m-1}.\sin x^m}{dx^{m-1}} = m^{m-1}\sin mx - (m-2)^{m-1}\binom{m}{1}\sin(m-2)x$$

$$+ (m-4)^{m-1}\binom{m}{2}\sin(m-4)x - \ldots \pm 2^{m-1}\binom{m}{\frac{m}{2}-1}\sin 2x.$$

Mit Hülfe dieser Formeln, in welchen der Reihe nach $m = 2, 3, 4, \ldots$ zu setzen ist, erhält man nun:

$$u = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \sin 2m$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{3!2^2}(3^2 \sin 3m - 1^2.3 \sin m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{4!2^3}(4^3 \sin 4m - 2^3.4 \sin 2m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^5}{5!2^4}\left(5^4 \sin 5m - 3^4.5 \sin 3m + 1^4.\frac{5.4}{1.2} \sin m\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon^6}{6!2^5}\left(6^5 \sin 6m - 4^5.6 \sin 4m + 2^5.\frac{6.5}{1.2} \sin 2m\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Die hier behandelte Aufgabe (das Kepler'sche Problem), aus der Gl. $m = u - \varepsilon \sin u$, $u$ zu finden, ist in der Theorie der elliptischen Bewegung der Planeten von Wichtigkeit; es ist $m$ die mittlere, $u$ die excentrische Anomalie des Planeten, $\varepsilon$ die Excentricität der Bahn.

Beisp. 5. Man soll den Bruch $\frac{1}{\sqrt{1-2zx+x^2}}$ in eine nach steigenden Potenzen von $x$ geordnete Reihe entwickeln.

Man setze:

$$\sqrt{1-2zx+x^2} = 1 - xy,$$

so erhält man durch Differenziation dieser Gleichung nach $z$:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+x^2}};$$

aus derselben Gl. folgt aber, wenn man rational macht:

$$y = z + \frac{1}{2} x (y^2 - 1). \qquad (a)$$

Die Aufgabe kann nun folgendermaassen gestellt werden: Es ist die Gl. ($a$) gegeben; man sucht $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1-xy} = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+x^2}}$. Differenzirt man also die Gl. (II) im vor. §. nach $z$, wodurch man erhält:

$$\frac{dy}{dz} = 1 + x\frac{df(z)}{dz} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2[f(z)]^2}{dz^2} + \ldots\ldots$$

und beachtet, dass aus der Vergleichung von ($a$) mit der, der Formel (II) zu Grunde liegenden Gleichung: $y = z + xf(y)$ folgt: $f(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$, so erhält man für die gesuchte Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+x^2}} = 1 + \frac{x}{1.2}\frac{d(z^2-1)}{dz} + \frac{x^2}{2!2^2}\frac{d^2(z^2-1)^2}{dz^2} +$$
$$+ \frac{x^3}{3!2^3}\frac{d^3(z^2-1)^3}{dz^3} + \cdots\cdots$$

**347.** Das Lagrange'sche Theorem lässt sich auch mit Vortheil auf die Auflösung des Problems der Umkehrung oder Reversion der Reihen anwenden. Es sei die Reihe:

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \cdots\cdots \qquad (1)$$

gegeben; man soll $y$ durch eine nach Potenzen von $x$ fortlaufende Reihe ausdrücken. Man setze:

$$a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots\cdots = \varphi(y),$$

so wird

$$x = \varphi(y);$$

schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$y = x . \frac{y}{\varphi(y)},$$

und vergleicht sie mit der Gleichung: $y = z + xf(y)$, so hat man:

$$z = 0, \quad f(y) = \frac{y}{\varphi(y)}.$$

Man nehme

$$F(y) = \frac{y}{\varphi(y)} = f(y),$$

so wird

$$F(z) = \frac{z}{\varphi(z)} = \frac{1}{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots\cdot}\cdots\cdot, \qquad (m)$$

$$F'(z)\,[f(z)]^k = f'(z)\,[f(z)]^k = \frac{1}{k+1}\frac{d}{dz}[f(z)]^{k+1},$$

somit

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{F'(z)\,[f(z)]^k\right\} = \frac{1}{k+1}\frac{d^k}{dz^k}[f(z)]^{k+1}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{d^k}{dz^k}[f(z)]^{k+1} = \Phi^{(k)}(z)$, so ergibt sich durch Anwendung der Gl. (I), §. 345, indem $z = 0$ ist:

$$\frac{y}{\varphi(y)} = F(0) + \tfrac{1}{2}\Phi'(0)\,x + \tfrac{1}{3}\Phi''(0)\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\Phi'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdot$$

Es ist aber:

$$[f(z)]^{k+1} = \left\{\frac{1}{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots\cdot}\right\}^{k+1} = (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots)^{-(k+1)};$$

entwickelt man den 2ten Theil nach dem polynomischen Lehrsatze und bezeichnet, wie in §. 60, Bd. I, die Polynomialcoefficienten der $n^{\text{ten}}$ Potenz mit $\overset{n}{A}_0, \overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2$ u. s. w., so wird:

$$[f(z)]^{k+1} = \overset{-(k+1)}{A_0} + \overset{-(k+1)}{A_1} z + \overset{-(k+1)}{A_2} z^2 + \overset{-(k+1)}{A_3} z^3 + \ldots.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst für $k = 0$, $z = 0$:

$$f(0) = F(0) = \overset{-1}{A_0}.$$

Dieselbe Gleichung $k$mal differenzirt gibt:

$$\varphi^{(k)}(z) = 1.2.3\ldots.(k-1)\,k.\overset{-(k+1)}{A_k} + 2.3.4\ldots k(k+1).\overset{-(k+1)}{A_{k+1}} z + \ldots..,$$

woraus

$$\varphi^{(k)}(0) = 1.2.3\ldots.(k-1)k.\overset{-(k+1)}{A_k}$$

folgt. Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach $k = 1, 2, 3$, u. s. w. und substituirt die erhaltenen Werthe in die obige Reihe für $\frac{y}{\varphi(y)}$, so erhält man:

$$\frac{y}{\varphi(y)} = \overset{-1}{A_0} + \tfrac{1}{2}\overset{-2}{A_1} x + \tfrac{1}{3}\overset{-3}{A_2} x^2 + \tfrac{1}{4}\overset{-4}{A_3} x^3 + \ldots.$$

folglich da $\varphi(y) = x$:

$$y = \overset{-1}{A_0} x + \tfrac{1}{2}\overset{-2}{A_1} x^2 + \tfrac{1}{3}\overset{-3}{A_2} x^3 + \tfrac{1}{4}\overset{-4}{A_3} x^4 + \ldots, \tag{2}$$

und diess ist die gesuchte durch Umkehrung von (1) entstehende Reihe. Die in derselben erscheinenden Polynomialcoefficienten, und zwar der 1te der — 1ten, der 2te der — 2ten, ... der $n^{\text{te}}$ der — $n^{\text{ten}}$ Potenz der unendlichen Reihe:

$$a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \ldots..$$

können nach dem im §. 60 angegebenen Verfahren gebildet werden; auch kommen wir im folgenden §. noch einmal darauf zurück.

**348.** Zum Schlusse dieses Kapitels mögen über die Anwendung der Differenzialrechnung auf die Entwickelung und Umformung von Reihen noch einige Beispiele Platz finden, welche zugleich auf praktisch wichtige Ergebnisse führen.

I. Es sei die $n^{\text{te}}$ Potenz der endlichen oder unendlichen Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots..$$

zu entwickeln. Man setze:

$$(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots)^n=\overset{n}{A}_0+\overset{n}{A}_1 x+\overset{n}{A}_2 x^2+\overset{n}{A}_3 x^3+\ldots, \quad (m)$$

welche Form der Entwickelung offenbar zukommen wird. Differenziren wir die Gl. $(m)$ nach $x$, so kommt:

$$n(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots)^{n-1}(\alpha_1+2\alpha_2 x+3\alpha_3 x^2+\ldots)=$$
$$=\overset{n}{A}_1+2\overset{n}{A}_2 x+3\overset{n}{A}_3 x^2+\ldots,$$

folglich, wenn wir beiderseitig mit $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots$ multipliciren, mit Rücksicht auf $(m)$:

$$n(\overset{n}{A}_0+\overset{n}{A}_1 x+\overset{n}{A}_2 x^2+\overset{n}{A}_3 x^3+\ldots)(\alpha_1+2\alpha_2 x+3\alpha_3 x^2+\ldots)=$$
$$=(\overset{n}{A}_1+2\overset{n}{A}_2 x+3\overset{n}{A}_3 x^2+\ldots)(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots).$$

Ordnet man beide Theile nach steigenden Potenzen von $x$, und setzt, gemäss dem Satze der unbestimmten Coefficienten, die den gleichen Potenzen von $x$ entsprechenden Coefficienten einander gleich, so erhält man:

$$\alpha_0\overset{n}{A}_1=n\alpha_1\overset{n}{A}_0$$
$$2\alpha_0\overset{n}{A}_2+\alpha_1\overset{n}{A}_1=2n\alpha_2\overset{n}{A}_0+n\alpha_1\overset{n}{A}_1$$
$$3\alpha_0\overset{n}{A}_3+2\alpha_1\overset{n}{A}_2+\alpha_2\overset{n}{A}_1=3n\alpha_3\overset{n}{A}_0+2n\alpha_2\overset{n}{A}_1+n\alpha_1\overset{n}{A}_2$$

u. s. w.

somit:

$$\alpha_0\overset{n}{A}_1=n\alpha_1\overset{n}{A}_0$$
$$2\alpha_0\overset{n}{A}_2=2n\alpha_2\overset{n}{A}_0+(n-1)\alpha_1\overset{n}{A}_1$$
$$3\alpha_0\overset{n}{A}_3=3n\alpha_3\overset{n}{A}_0+(n-2)\alpha_1\overset{n}{A}_2+(2n-1)\alpha_2\overset{n}{A}_1$$

u. s. w.,

welche Gleichungen die Polynomialcoefficienten in rekurrirender Form geben. Für den ersten $\overset{n}{A}_0$ findet man, in (1) $x=0$ setzend: $\overset{n}{A}_0=\alpha_0{}^n$. Diese Formeln enthalten das Rekursionsgesetz, welches schon in Bd. I, S. 79. angeführt wurde.

II. Es sei

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots,$$

und $ly$ in eine nach Potenzen von $x$ geordnete Reihe zu entwickeln. Man setze:

$$l(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots, \quad (m)$$

so folgt durch Differenziation dieser Gleichung:

$$\frac{\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3 + \dots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \dots} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots$$

Ordnet man beiderseits nach Potenzen von $x$, so findet man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha B \\ 2\gamma &= \beta B + 2\alpha C \\ 3\delta &= \gamma B + 2\beta C + 3\alpha D \\ 4\varepsilon &= \delta B + 2\gamma C + 3\beta D + 4\alpha E \\ &\text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen die Coefficienten $B$, $C$, $D$, $E$,... sich ergeben. Was den 1ten Coefficienten $A$ betrifft, so findet man $A = l\alpha$, wenn man in $(m)$ $x = 0$ setzt.

III. Es ist bekanntlich [Bd. I., §. 153., Gl. (22)]:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2 . \pi^2}\right) \dots .$$

Differenzirt man diese Gleichung logarithmisch*), so erhält man:

$$\cotg x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\pi^2} - \frac{2x}{\left(1 - \frac{x^2}{2^2 . \pi^2}\right) 2^2 . \pi^2} - \frac{2x}{\left(1 - \frac{x^2}{3^2 . \pi^2}\right) 3^2 . \pi^2}$$

$$- \dots = \frac{1}{x} - 2x\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\pi^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{2^2 . \pi^2}\right) 2^2 . \pi^2} + \dots\right].$$

Lässt man nun $x^2 < \pi^2$ sein, so hat man nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right) r^2\pi^2} = \frac{1}{r^2\pi^2}\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)^{-1} = \frac{1}{r^2\pi^2} + \frac{x^2}{r^4\pi^4} + \frac{x^4}{r^6\pi^6} + \dots,$$

und hiemit wird:

$$\begin{aligned} \cotg x = \frac{1}{x} &- \frac{2x}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &- \frac{2x^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) \\ &- \frac{2x^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots\right) \\ &- \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

*) Indem man nämlich von beiden Theilen der Gleichung die Logarithmen nimmt, und sodann differenzirt.

Man setze nun

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\ldots\ldots 2n}, \quad \ldots \quad (1)$$

wo $B_{2n-1}$ eine endliche bestimmte Zahl ist, da die links stehende unendliche Reihe convergirt, wenn $2n > 1$ [I. Bd. §. 31.], so erhält man:

$$\cot g\, x=\frac{1}{x}-\frac{2^2}{2!}B_1x-\frac{2^4}{4!}B_3x^3-\frac{2^6}{6!}B_5x^5-\ldots \begin{cases} x>-\pi \\ x<+\pi \end{cases} \quad (2)$$

Substituirt man diesen Werth von cotg $x$, nebst dem daraus für cotg $2x$ resultirenden in die identische Gleichung: tg $x$ = cotg $x$ — 2 cotg $2x$, [Bd. I. S. 99.], so folgt:

$$\text{tg}\, x=\frac{2^2(2^2-1)}{2!}B_1x+\frac{2^4(2^4-1)}{4!}B_3x^3+$$

$$+\frac{2^6(2^6-1)}{6!}B_5x^5+\ldots \begin{cases} x>-\frac{\pi}{2} \\ x<+\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3)$$

wo die angedeuteten Grenzen der Convergenz daher rühren, dass die Reihe (2) für cotg $2x$ in Anspruch genommen wurde.

Die in diesen Reihen erscheinenden Zahlen: $B_1$, $B_3$, $B_5$, ..... heissen die Bernoulli'schen Zahlen. Zur Berechnung derselben lassen sich Rekursionsformeln auf mehrfache Weise entwickeln. Schreibt man z. B. die Gl. (2) in folgender Form:

$$\cos x=\frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{2^2}{2!}B_1x^2-\frac{2^4}{4!}B_3x^4-\frac{2^6}{6!}B_5x^6-\ldots\right)$$

und setzt für cos $x$ und sin $x$ die entsprechenden Reihen, so kommt:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)\left(1-\frac{2^2}{2!}B_1x^2-\frac{2^4}{4!}B_3x^4-\ldots\right),$$

und man erhält nach vollzogener Multiplikation durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichen Potenzen von $x$:

$$\frac{2^2}{2!}B_1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=0$$

$$\frac{2^4}{4!}B_3-\frac{1}{3!}\cdot\frac{2^2}{2!}B_1+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}=0$$

$$\frac{2^6}{6!}B_5-\frac{1}{3!}\cdot\frac{2^4}{4!}B_3+\frac{1}{5!}\cdot\frac{2^2}{2!}B_1-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n-1}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!}B_{2n-3}+\frac{1}{5!}\frac{2^{2n-4}}{(2n-4)!}B_{2n-5}-\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{1}{(2n-1)!}\frac{2^2}{2!}B_1\mp\frac{1}{(2n)!}\pm\frac{1}{(2n+1)!};$$

oder wenn man die zwei letzten Glieder jeder Gleichung reducirt, und jedes Glied durch 2 dividirt:

$$\frac{2}{2!}B_1-\frac{1}{3!}=0$$

$$\frac{2^3}{4!}B_3-\frac{1}{3!}\frac{2}{2!}B_1+\frac{2}{5!}=0$$

$$\frac{2^5}{6!}B_5-\frac{1}{3!}\cdot\frac{2^3}{4!}B_3+\frac{1}{5!}\cdot\frac{2}{2!}B_1-\frac{3}{7!}=0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}B_{2n-1}-\frac{1}{3!}\frac{2^{2n-3}}{(2n-2)!}B_{2n-3}+\frac{1}{5!}\frac{2^{2n-5}}{(2n-4)!}B_{2n-5}-\ldots.$$
$$\pm\frac{1}{(2n-3)!}\frac{2^3}{4!}B_3\mp\frac{1}{(2n-1)!}\frac{2}{2!}B_1\pm\frac{n}{(2n+1)!}=0.$$

Man findet hieraus:

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_3=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{1}{42},\quad B_7=\frac{1}{30},\quad B_9=\frac{5}{66},\quad B_{11}=\frac{691}{2730},$$
$$B_{13}=\frac{7}{6},\quad B_{15}=\frac{3617}{510},\quad B_{17}=\frac{43867}{798},\ \text{u. s. w.}$$

Da sofort die Bernoullischen Zahlen als bekannt angenommen werden können, so ist durch die Gl. (1) die Summe der reciproken geraden Potenzen aller auf einander folgenden Zahlen gegeben. Dividirt man (1) durch $2^{2n}$, so kommt:

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\ldots.=\frac{B_{2n-1}\pi^{2n}}{2.(2n)!},\tag{4}$$

und wenn man diese Gleichung von (1) abzieht:

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots.=\frac{(2^{2n}-1)B_{2n-1}\pi^{2n}}{2.(2n)!},\tag{5}$$

durch welche Gleichungen auch die Summen der reciproken geraden Potenzen aller aufeinanderfolgenden geraden und ungeraden Zahlen gegeben sind.

# VIERTES KAPITEL.

## UEBER DIE AUSMITTELUNG DES WAHREN WERTHES VON GROESSEN, WELCHE SICH UNTER UNBESTIMMTEN FORMEN: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, U. S. W. DARBIETEN.

**349.** Wenn $f(x)$, $F(x)$ zwei Funktionen von $x$ bezeichnen, welche für den besonderen Werth $x = a$ beide verschwinden, so nimmt der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ für den besagten Werth von $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, hat aber nichts desto weniger einen bestimmten Werth, welcher mit Hülfe der Differenzialrechnung leicht ermittelt werden kann.

In der That, man kann $\frac{f(a)}{F(a)}$ als den Grenzwerth betrachten, welchem sich der Ausdruck $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ bei unendlich abnehmendem $h$ unendlich nähert. Nun ist unter der Voraussetzung, dass die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ in der Nähe des besonderen Werthes $x = a$ stetig sind, nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a+\theta h)}{F(a) + hF'(a+\theta h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)},$$

da der Voraussetzung nach $f(a) = F(a) = 0$. Zur Grenze übergehend, erhält man hieraus:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} \tag{1}$$

Durch diese Gleichung ist der Werth des Bruches $\frac{f(a)}{F(a)}$ unzweideutig bestimmt, wenn nicht die beiden Grössen $f'(a)$ und $F'(a)$ ebenfalls gleichzeitig Null werden. Man hat aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta h)}{F(a) + hF'(a) + \frac{1}{2}h^2 F''(a+\theta h)},$$

somit, wenn nebst den Funktionen $f(x)$, $F(x)$ auch ihre 1ten Differenzialquotienten für $x = a$ verschwinden:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f''(a+\theta h)}{F''(a+\theta h)},$$

woraus für $h = 0$:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)} \tag{2}$$

folgt. Wie man auf diesem Wege fortschreiten könne, ist klar, und es kann allgemein folgender Satz ausgesprochen werden: Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis einschliesslich zu jenen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für $x = a$ verschwinden, so ist:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}. \tag{3}$$

Beispiele. 1) Der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a^m - x^m}{a^n - x^n}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = a$; es ist aber $f'(x) = -mx^{m-1}$, $F'(x) = -nx^{n-1}$, somit

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

2) $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1 - x + lx}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = 1$; $f'(x) = \frac{1 - x}{x}$, $F'(x) = -\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$, somit $\frac{f'(x)}{F'(x)} = -\frac{\sqrt{2x - x^2}}{x}$, und dieser Ausdruck wird $= -1$ für $x = 1$.

3) $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \cos x}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = 0$; es ist nun $f'(x) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$, $F'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$; welche Funktionen für $x = 0$ ebenfalls verschwinden; ferner $f''(x) = 4(e^{2x} + e^{-2x})$, $F''(x) = 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x$; $f''(0) = 8$, $F''(0) = 2$; der gesuchte Werth ist daher $= 4$.

**350.** I. Wenn die beiden Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ unendlich werden, so nimmt der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an; die Ausmittelung des wahren Werthes lässt sich leicht auf den im vorigen §. behandelten Fall zurückführen. Man setze

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

so hat man es mit einem Bruche zu thun, dessen Zähler und Nenner für $x = a$ verschwinden; der Differenzialquotient des Zählers ist

$= -\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}$, jener des Nenners $-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$; folglich der wahre Werth:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{F'(a)}{[F(a)]^2} : \frac{f'(a)}{[f(a)]^2} = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot \left[\frac{f(a)}{F(a)}\right]^2,$$

woraus durch Auflösung nach $\frac{f(a)}{F(a)}$:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

folgt. Es gilt daher hier dieselbe Regel, wie für die oben behandelte Form $\frac{0}{0}$.

Z. B. Die Funktion: $\frac{lx}{x}$ wird $\frac{\infty}{\infty}$ für $x = \infty$; nun ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, $F'(x) = 1$, und $\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1}{x}$; somit der wahre Werth der Funktion $= 0$ für $x = \infty$.

II. Ist $y = \frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$, so kann diese Funktion für $x = a$ die Form $\infty - \infty$ erhalten; man wird in diesem Falle beide Brüche auf eine gleiche Benennung bringen, und einen der obigen Fälle erhalten.

So ist $y = \frac{1}{\sin x^2} - \frac{1}{x^2} = \infty - \infty$ für $x = 0$; es ist aber, wenn man auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringt, $y = \frac{x^2 - \sin x^2}{x^2 \sin x^2}$, welcher Bruch $\frac{0}{0}$ wird für $x = 0$, und für dessen Werth man nach viermaliger Differenziation des Zählers und Nenners $\frac{1}{3}$ findet.

III. Ist $y = f(x) . F(x)$ und $f(x) = 0$, $F(x) = \infty$ für $x = a$, so erscheint die unbestimmte Form $0 . \infty$; man wird in diesem Falle setzen:

$$y = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} \text{ oder } y = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

wodurch man wieder auf die Formen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ kommt.

IV. Ist endlich $y = [f(x)]^{F(x)}$, so kann dieser Ausdruck für einen besonderen Werth von $x = a$ eine der folgenden unbestimmten Formen

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^{\pm\infty}$$

annehmen; es ist aber $ly = F(x).lf(x)$, und somit für $x = a$ in diesen vier Fällen:

$$ly = 0.l0 = -0.\infty, \qquad ly = 0.l\infty = 0.\infty,$$
$$ly = \pm\infty.l1 = \pm 0.\infty, \qquad ly = \pm\infty.l0 = \mp\infty.$$

Formen, deren Werthe nach dem obigen ausgemittelt werden können. Ist $A$ der gefundene Werth, also $ly = A$ für $x = a$, so ist $y = e^A$. Im 4ten Falle hat man übrigens unmittelbar $y = e^{\pm\infty}$; d. h. die unbestimmte Form $0^{\pm\infty}$ hat den Werth 0 oder $\infty$, je nachdem das obere oder untere Zeichen stattfindet.

Z. B. $y = x^x$; für $x = 0$ wird $y = 0^0 = 1$.

$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; für $x = 0$ wird $y = \infty^0 = 1$.

$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$; für $x = 0$ wird $y = 1^\infty = e$.

**351.** Es kann der Fall eintreten, dass der Taylor'sche Lehrsatz zur Entwickelung der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für den besonderen Werth $x = a$ unbrauchbar wird [§. 342]; in diesem Falle werden nebst diesen Funktionen ihre sämmtlichen Differenzialquotienten Null oder unendlich, und das in den vorstehenden Paragraphen dargestellte Verfahren, welches sich auf die Taylor'sche Reihe stützt, kann offenbar nicht zum Ziele führen. Man wird dann in dem gegebenen Ausdrucke, welcher für $x = a$ eine der unbestimmten Formen annimmt, $a + h$ statt $x$ setzen und, wenn nöthig, nach Potenzen von $h$ entwickeln; der gesuchte Werth ergibt sich sodann, wenn man in dieser Entwickelung $h = 0$ setzt.

Ist z. B. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, welcher Ausdruck für $x = 1$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so erhält man, $x = 1 + h$ setzend:

$$y = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{2h+h^2}} = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2+h}} = 0 \quad \text{für } h = 0.$$

Es ist also $y = 0$ für $x = 1$.

Man sieht leicht ein, dass dieses Verfahren ganz allgemein ist, und selbst dann oft mit Vortheil angewendet werden kann, wo auch die Differenzialrechnung den gewünschten Aufschluss gewährt. So hatten wir oben den Bruch $y = \frac{x^2 - \sin x^2}{x^2 \sin x^2}$, welcher für $= 0$, $\frac{0}{0}$

wird; setzen wir $x = a + h = 0 + h = h$, so kommt: $y = \frac{h^2 - \sin h^2}{h^2 \sin h^2}$;

nun ist $\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \ldots$; $\sin h^2 = h^2 - \frac{h^4}{3} + \frac{2h^6}{45} - \ldots$

folglich $y = \frac{\frac{1}{3}h^4 - \frac{2}{45}h^6 + \ldots}{h^4 - \frac{1}{3}h^6 + \ldots} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{45}h^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{3}h^2 + \ldots} = \frac{1}{3}$ für $h = 0$,

übereinstimmend mit dem oben erhaltenen Resultate.

---

## FÜNFTES KAPITEL.

### UEBER DIE GROESSTEN UND KLEINSTEN WERTHE DER FUNKTIONEN.

---

### I. Maxima und Minima der Funktionen von einer veränderlichen Grösse.

**352.** Wenn der Werth $f(a)$, welchen die Funktion $y = f(x)$ für den besonderen Werth $x = a$ der unabhängig Veränderlichen annimmt, grösser ist, als die ihm unmittelbar vorausgehenden und ihm nachfolgenden Werthe: $f(a-h)$ und $f(a+h)$, wobei $h$ beliebig klein angenommen werden mag, so sagt man, der Werth $f(a)$ sei ein grösster Werth oder ein Maximum der Funktion $f(x)$. Ist der Werth $f(a)$ kleiner als die beiden Nachbarwerthe $f(a-h)$ und $f(a+h)$, so heisst derselbe ein kleinster Werth oder ein Minimum der Funktion $y = f(x)$.

Es folgt hieraus, dass im Verlaufe einer Funktion jedesmal ein Maximum eintritt, so oft sie aus dem Zustande des Wachsens in jenen des Abnehmens übergeht; und ein Minimum, wenn der Uebergang aus dem Abnehmen ins Zunehmen erfolgt. Eine Funktion kann daher mehrere Maxima und Minima haben, kann aber auch deren gänzlich ermangeln, wie z. B. die lineare Funktion: $y = ax + b$. Auch erklärt sich hieraus ganz einfach, dass im Falle die Funktion mehrerer Maxima und Minima fähig ist, nicht zwei Maxima oder zwei Minima unmittelbar aufeinanderfolgen können, sondern dass die Maxima und Minima regelmässig miteinander abwechseln müssen. Man kann sich diess alles sehr leicht versinnlichen, wenn man die Curve construirt denkt, deren Gleichung $y = f(x)$ ist.

Es bietet sich nun die Aufgabe dar, diejenigen Werthe von $x$ zu erforschen, für welche die Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird. Zu diesem Behufe erinnern wir uns des in §. 335. aufgestellten Satzes, dass die Funktion $y = f(x)$ mit wachsendem $x$ zunimmt oder abnimmt, je nachdem ihr 1ter Differenzialquotient: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt, dass beim Durchgange der Funktion durch ein Maximum oder Minimum der 1te Differenzialquotient $f'(x)$ sein Zeichen wechseln, und somit für jenen Werth $x = a$, welcher die Funktion zum Maximum oder Minimum macht, entweder Null oder unendlich gross werden muss, je nachdem derselbe bei diesem Uebergange stetig bleibt, oder eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Die Auflösung der Gleichungen

$$f'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(x) = \infty$$

bietet daher diejenigen Werthe von $x$ dar, welche ein Maximum oder Minimum der Funktion $f(x)$ erzeugen.

Es ist dann noch zu entscheiden, ob ein auf diesem Wege gewonnener Werth $x = a$ die Funktion $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum mache. Hiebei wollen wir annehmen, dass dieser Werth aus der Gl. $f'(x) = 0$ hervorgegangen sei und den ohnehin seltener eintretenden Fall der Gleichung $f'(x) = \infty$, später betrachten.

Da der Voraussetzug zufolge $f'(a) = 0$ ist, so hat man gemäss dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a+\theta h)$$

$$\text{und} \quad f(a-h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a-\theta' h);$$

im Falle des Maximums müssen nun beide Differenzen: $f(a+h) - f(a)$ und $f(a-h) - f(a)$ negativ sein, im Falle des Minimums aber positiv; das Zeichen dieser Differenzen hängt aber wie man sieht, von jenem der Grössen $f''(a+\theta h)$ und $f''(a-\theta' h)$ ab, d. i. von dem Zeichen der Grösse $f''(a)$, da man $h$ immer so klein wählen kann, dass $f''(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$, und $x = a \pm \theta h$ sein Zeichen nicht ändert, und folglich $f''(a)$ mit den Grössen $f''(a+\theta h)$ und $f''(a-\theta h)$ gleiches Zeichen hat. Hieraus folgt also, dass der aus der Gl. $f'(x) = 0$ folgende Werth $x = a$ die Funktion zu einem Maximum oder Minimum macht, je nachdem der zweite Differenzialquotient für diesen Werth von $x$ negativ oder positiv sich ergibt.

Es kann der Fall eintreten, dass auch $f''(a) = 0$ ist; dann hat man:

$$f(a+h)-f(a) = +\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\frac{h^4}{1.2.3.4}f''''(a+\theta h),$$

$$f(a-h)-f(a) = -\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\frac{h^4}{1.2.3.4}f''''(a-\theta' h).$$

Ist nun $f'''(a)$ von Null verschieden, so haben die beiden Differenzen $f(a+h)-f(a)$ und $f(a-h)-f(a)$ entgegengesetzte Zeichen, da man $h$ immer so klein wählen kann, dass das Zeichen dieser Differenzen durch das Zeichen des 1ten Gliedes im 2ten Theile obiger Gleichungen bestimmt wird [§. 16, $k$)]; in diesem Falle ist also $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Ist aber auch $f'''(a)=0$, so wird

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^4}{4!}f''''(a+\theta h),\quad f(a-h)-f(a)=\frac{h^4}{4!}f''''(a-\theta' h);$$

beide Differenzen haben wieder gleiche Zeichen, nämlich jenes, welches der Grösse $f''''(a)$ zukommt, da das Zeichen dieser Grösse für sehr kleine $h$ von jenem der Grössen $f''''(a+\theta h)$ und $f''''(a-\theta' h)$ nicht verschieden ist. Es tritt also wieder ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem sich $f''''(a)$ negativ oder positiv ergibt.

Sollte auch $f''''(a)=0$ werden, so schliesst man ganz auf dieselbe Weise aus den Gleichungen

$$f(a+h)-f(a)=+\frac{h^5}{5!}f'''''(a)+\frac{h^6}{6!}f''''''(a+\theta h)$$

$$f(a-h)-f(a)=-\frac{h^5}{5!}f'''''(a)+\frac{h^6}{6!}f''''''(a-\theta' h)$$

dass die Existenz eines Maximums oder Minimums an die Bedingung $f'''''(a) = 0$ gebunden ist, und, wenn diese erfüllt ist, das erstere oder das letztere statt finde, je nachdem $f''''''(a)$ negativ oder positiv ist. Auf diese Weise gelangt man zu dem Satze, dass ein der Gleichung $f'(x) = 0$ Genüge leistender Werth die Funktion $f(x)$ nur dann zu einem Maximum oder Minimum mache, wenn der erste für $x = a$ nicht verschwindende Differenzialquotient von gerader Ordnung ist; und zwar tritt ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem dieser Differenzialquotient für $x = a$ negativ oder positiv ist.

Es kann vorkommen, dass der aus der Gleichung $f'(x)=0$ gezogene Werth $x = a$ den zweiten Differenzialquotienten, so wie die folgenden unendlich gross macht; die eben entwickelte Regel, um zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum stattfinde, versagt dann

ihre Dienste, eben weil die Sätze, auf welchen sie beruht, der Taylor'sche Lehrsatz nämlich oder das in Gl. 6, §. 338 ausgesprochene Theorem auf die Funktion $f(x)$ für $x = a$ nicht anwendbar sind, da ihre Differenzialquotienten, vom $2^{ten}$ angefangen für diesen besonderen Werth von $x$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. In diesem Falle bleibt nichts übrig, als den Lauf der Funktion in der Nähe des Werthes $x = a$ besonders zu untersuchen, indem man die Werthe $f(a+h)$ und $f(a-h)$ entwickelt, und mit $f(a)$ vergleicht. Findet man für ein beliebig kleines $h$, $f(x+h)$ und $f(x-h)$ kleiner als $f(a)$, so ist $f(a)$ ein Maximum, im Gegentheile ein Minimum.

Dasselbe Verfahren ist aus gleichen Gründen bei jenen Werthen von $x$ einzuhalten, welche etwa aus der Gl. $f'(x) = \infty$ gezogen werden.

**353.** Zur Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen:

1. Man sucht die Werthe von $x$, welche die Funktion

$$f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x - 30$$

zu einem Maximum oder Minimum machen. Man findet als $1^{ten}$ Differenzialquotienten $f'(x) = 12x^2 - 42x + 18$, welcher gleich Null gesetzt, zur Bestimmung der gesuchten Werthe die Gleichung $2x^2 - 7x + 3 = 0$ darbietet, deren Wurzeln $\frac{1}{2}$ und 3 sind. Der $2^{te}$ Differenzialquotient $f''(x) = 6(4x - 7)$ wird negativ für $x = \frac{1}{2}$, positiv für $x = 3$; die gegebene Funktion hat daher für $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum $= -25\frac{3}{4}$, für $x = 3$ ein Minimum $= -57$.

2. Eine Zahl $a$ in zwei Theile $x$ und $a - x$ zu zerlegen, so dass das Produkt $f(x) = x^n (a-x)^m$ ein Maximum oder Minimum werde, unter $m$ und $n$ positive ganze Zahlen verstanden.

Man hat

$$f'(x) = x^{n-1}(a-x)^{m-1}\,[na - x(m+n)],$$

$$f''(x) = x^{n-2}(a-x)^{m-2}\,[(n-1)(a-x) - (m-1)x]\,[na - x(m+n)]$$
$$- (m+n)\,x^{n-1}(a-x)^{m-1}.$$

Die Wurzeln der Gl. $f'(x) = 0$ sind: $x = 0$, $x = a$ und $x = \frac{na}{m+n}$; von diesen macht die letzte: $x = \frac{na}{m+n}$ den $2^{ten}$ Differenzialquotienten $f''(x) = -(m+n)\,x^{n-1}(a-x)^{m-1}$, also negativ, und erzeugt somit ein Maximum. In Bezug auf die Werthe $x = 0$ und $x = a$ ist es bequemer, den Lauf der Funktion $f(x)$ in ihrer Nähe unmittelbar zu untersuchen.

Man setze also $x = 0 \pm h = \pm h$, so wird

$$f(0+h) - f(0) = (+h)^n (a-h)^m, \quad f(0-h) - f(0) = (-h)^n (a+h)^m;$$

beide Differenzen sind positiv, wenn $n$ gerade, haben aber verschiedene Zeichen, wenn $n$ ungerade ist; der Werth $x = 0$ erzeugt daher ein Minimum, wenn $n$ gerade ist, aber weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn $n$ ungerade.

Für den Werth $x = a$ erhält man:

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^n(-h)^m;\quad f(a-h)-f(a)=(a-h)^n(+h)^m,$$

somit ebenfalls ein Minimum, wenn $m$ gerade; bei ungeradem $m$ findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Setzt man $m = n = 1$, so ergibt sich für $x = \frac{1}{2}a$ das Maximum der Funktion $y = x(a - x)$; hiedurch ist die Aufgabe gelöst, unter allen Rechtecken von gleichem Umfange dasjenige anzugeben, welches den grössten Inhalt hat; es ist das Quadrat.

3. Für $y = \frac{lx}{x}$ erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{x^2} = 0$, und hieraus $1 - lx = 0$, somit $x = e$. Ferner wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3 + 2\,lx}{x^3}$ negativ für $x = e$; dieser Werth macht daher die Funktion $\frac{lx}{x}$ zu einem Maximum $= \frac{1}{e}$.

4. Die Zahl $x$ zu suchen, deren $x^{\text{te}}$ Wurzel ein Maximum ist. Aus der Gleichung

$$y = x^{\frac{1}{x}} \text{ folgt } \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - lx) = 0,$$

welche Gl. den Werth $x = e$ liefert. Der $2^{\text{te}}$ Differenzialquotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{\frac{1}{x}-4}(1 - lx)^2 - x^{\frac{1}{x}-3}(3 - 2lx)$$

wird für diesen Werth negativ $\left(= -e^{\frac{1}{e}-3}\right)$; somit ist $e^{\frac{1}{e}}$ ein Maximum der Funktion $x^{\frac{1}{x}}$.

5. Für $y = f(x) = a + bx\,(c - 3x)^{\frac{2}{3}}$ erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\,(c - 5x)}{(c - 3x)^{\frac{1}{3}}};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = b\,.\,\frac{-5\,(c-3x)^{\frac{1}{3}} + (c - 5x)\,(c - 3x)^{-\frac{2}{3}}}{(c - 3x)^{\frac{2}{3}}};$$

setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt $c - 5x = 0$ oder $x = \frac{1}{5}c$, welcher Werth von $x$ den $2^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-5b}{(\frac{2}{5}c)^{\frac{1}{3}}}$, also negativ

macht, und somit ein Maximum der Funktion, $= a + \frac{1}{3} bc \sqrt[3]{\frac{4}{27} c^2}$ erzeugt.

Auch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \infty$ bietet hier eine endliche Auflösung dar, indem man $c - 3x = 0$ setzt und hieraus $x = \frac{1}{3}c$ zieht. Um zu erfahren, ob dieser Werth von $x$, welcher auch die höheren Differenzialquotienten unendlich gross macht, ein Maximum oder ein Minimum erzeuge, substituiren wir $x = \frac{1}{3}c$ und $x = \frac{1}{3}c \pm h$ in $f(x)$ und erhalten:

$$f(\tfrac{1}{3}c + h) - f(\tfrac{1}{3}c) = b(\tfrac{1}{3}c + h)(-3h)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(\tfrac{1}{3}c - h) - f(\tfrac{1}{3}c) = b(\tfrac{1}{3}c - h)(+3h)^{\frac{2}{3}}.$$

Beide Differenzen sind positiv, da man immer $h < \frac{1}{3}c$ nehmen kann; somit entspricht dem Werthe $x = \frac{1}{3}c$ ein Minimum $= a$.

6. Aus einem senkrechten Kegel denjenigen Cylinder zu schneiden, welcher *a*) den grössten Inhalt, *b*) die grösste Mantelfläche, *c*) die grösste Gesammtoberfläche hat.

Es sei $r$ der Halbmesser der Grundfläche des Kegels, $h$ dessen Höhe; bezeichnet man mit $x$ den Halbmesser der Basis des Cylinders, so wird dessen Höhe, wie man leicht findet, ausgedrückt durch $h' = \frac{h}{r}(r - x)$. Dies vorausgesetzt hat man:

*a*) Für den Inhalt: $J = \pi x^2 h' = \frac{\pi h}{r} x^2 (r - x)$; da $\frac{\pi h}{r}$ eine constante Grösse ist, so genügt es, den veränderlichen Faktor $x^2 (r - x)$ zu einem Maximum zu machen, dessen Differenzialquotient

$$2x(r - x) - x^2 = 0$$

gesetzt, für den Halbmesser des Cylinders vom grössten Inhalte den Werth $x = \frac{2}{3}r$ gibt; die Höhe wird hiemit $h' = \frac{1}{3}h$.

*b*) Für die Mantelfläche: $M = 2\pi x . h' = \frac{2\pi h}{r} x (r - x)$; hieraus folgt für das Maximum: $r - 2x = 0$, somit $x = \frac{1}{2}r$; $h' = \frac{1}{2}h$.

*c*) Für die gesammte Oberfläche: $O = 2\pi x^2 + 2\pi x . h'$, d. i.

$$O = \frac{2\pi}{r} \left\{ r x^2 + h x (r - x) \right\},$$

folglich: $2rx + h(r - x) - hx = 0$, woraus $x = \frac{hr}{2(h - r)}$ und $h' = \frac{h(h - 2r)}{2(h - r)}$.

Die Untersuchung mit Hülfe des 2ten Differenzialquotienten, ob die gefundenen Werthe ein Maximum oder Minimum erzeugen, kann hier — so wie in vielen praktischen Fällen — entbehrt werden, da die Natur der Aufgabe nur ein Maximum zulässt.

**354.** Ist $y$ als Funktion von $x$ implicite durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so wird man in Uebereinstimmung mit den § 352 entwickelten Principien den 1ten Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx} = f'(x, y)$ entwickeln [§. 320] und $= 0$ setzen. Durch Elimination von $y$ aus den beiden Gleichungen $f(x, y) = 0, f'(x, y) = 0$, erhält man sofort jene Werthe von $x$, welche die Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen, welche Werthe in eine dieser Gleichungen substituirt, die zugehörigen Maximums- oder Minimums-Werthe der Funktion liefern. Dass die Ordnung der Elimination auch umgekehrt werden könne, ist für sich klar. Das Zeichen des 2ten Differenzialquotienten entscheidet wieder wie früher, ob ein auf diesem Wege gewonnenes System von Werthen von $x$ und $y$ zu einem Maximum oder Minimum gehöre.

Da aus $f(x, y) = 0$ bekanntlich [§. 328, Gl. 2) und 3)]:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{df}{dy}}$$

folgt, so sieht man leicht, dass zur Ausmittelung der gesuchten Werthe von $x$ und $y$ statt der Gl. $\frac{dy}{dx} = 0$ auch die einfachere $\frac{df}{dx} = 0$ benutzt werden kann, und dass der 2te Differenzialquotient für die so erhaltenen Werthe man $x$ und $y$ durch den Ausdruck:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\frac{df}{dy}}.$$

gegeben wird.

Beispiel. Es sei die Gl.: $y^4 - 4a^2yx + x^4 = 0$ gegeben. Man findet hieraus: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 - a^2y}{y^3 - a^2x}$, und hat somit $x^3 - a^2y = 0$ zu setzen. Durch Verbindung dieser Gl. mit der ursprünglich gegebenen erhält man:

$$x = \pm a\sqrt[8]{3}, \quad y = \pm a\sqrt[8]{27},$$

wo die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Mit Rücksicht auf die Gl. $\frac{dy}{dx} = 0$ wird ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2}{a^2x - y^3}$, welcher Ausdruck durch Einführung obiger Werthe von $x$ und $y$ den Werth

$$\mp \frac{3\sqrt[8]{3}}{a(\sqrt[4]{3} - 1)}$$

annimmt. Die oberen Zeichen entsprechen somit einem Maximum, die unteren einem Minimum.

## II. Maxima und Minima der Funktionen mit mehreren veränderlichen Grössen.

**355.** Es sei $z = f(x, y, u, \ldots)$ eine Funktion mehrerer von einander unabhängigen Veränderlichen $x, y, u, \ldots$ und $x = a$, $y = b$, $u = c, \ldots$. ein System besonderer Werthe dieser Veränderlichen von der Beschaffenheit, dass der zugehörige Funktionswerth $f(a, b, c, \ldots)$ grösser sei, als alle benachbarten Werthe, welche man erhalten würde, wenn man für $x, y, u, \ldots$ andere von $a, b, c, \ldots$ beliebig wenig verschiedene grössere oder kleinere Werthe substituirte, so nennt man diesen besonderen Werth $f(a, b, c, \ldots)$ ein **Maximum** der Funktion $z$. Ist aber dieser Werth kleiner als alle seine Nachbarwerthe, so heisst derselbe ein **Minimum**. Es handelt sich nun darum, das System der besonderen Werthe $x = a$, $y = b$, $u = c, \ldots$ aufzufinden, welches der Funktion einen grössten oder kleinsten Werth ertheilt.

Zu diesem Behufe betrachten wir $x, y, u, \ldots$ als Funktionen einer neuen Veränderlichen $\alpha$, indem wir setzen:

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha), \quad u = \chi(\alpha), \ldots;$$

die scheinbare Abhängigkeit, in welche dadurch die Grössen $x, y, u, \ldots$ unter einander gerathen, wird dadurch beseitiget, dass wir die Form der Funktionen gänzlich unbestimmt lassen; durch gehörige Wahl dieser Form wird es offenbar immer möglich sein, jeder der Grössen $x, y, u, \ldots$ jeden beliebigen Werth zu ertheilen. Hiedurch wird

$$z = f(x, y, u, \ldots) = f[\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha), \ldots]$$

und erscheint nun $z$ als Funktion der **einzigen** Veränderlichen $\alpha$, wodurch die Aufgabe auf die bereits bekannte, für Funktionen **einer** veränderlichen Grösse die Maxima und Minima aufzusuchen, zurückgeführt ist.

Gemäss den in §. 352 entwickelten Principien muss daher für den Fall des Maximums oder Minimums zunächst die Gl.:

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0$$

erfüllt werden, eine Gleichung, welche mit Rücksicht auf den Umstand, dass $z$ eine Funktion von $x$, $y$, $u$, ... ist und diese Grössen von $\alpha$ abhängig gemacht wurden, die Form:

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{d\alpha} + \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{d\alpha} + \ldots = 0 \qquad (1)$$

annimmt. In Folge der Unbestimmtheit der Funktionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$, ... sind aber die Grössen $x$, $y$, $u$, ... und somit auch die Differenzialquotienten

$$\frac{dx}{d\alpha} = \varphi'(\alpha), \quad \frac{dy}{d\alpha} = \psi'(\alpha), \quad \frac{du}{d\alpha} = \chi'(\alpha), \ldots$$

jedes beliebigen, willkürlichen Werthes fähig; und die letzte Gleichung kann demnach nur bestehen, wenn die Coefficienten dieser Differenzialquotienten jeder für sich verschwinden. Hiedurch ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad \frac{dz}{du} = 0, \quad \ldots \qquad (2)$$

welchen dasjenige System von Werthen der unabhängig Veränderlichen Genüge leisten muss, welches ein Maximum oder Minimum der Funktion erzeugen soll. Diese Werthe ergeben sich sofort durch Auflösung der Gleichungen (2), welche man erhält, indem man die partiellen Differenzialquotienten der Funktion $z$ gleich Null setzt, deren Anzahl mit jener der unabhängig Veränderlichen übereinstimmt.

Ein auf diesem Wege gewonnenes Werthesystem, $x = a$, $y = b$, $u = c$, ... macht nun bekanntlich die Funktion $z$ zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem der 2te Differenzialquotient $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ für diese besonderen Werthe negativ oder positiv wird. Die Aufstellung bestimmter Kriterien, nach welchen sich entscheiden lässt, ob das eine oder das andere eintritt, erheischt die besondere Betrachtung der Funktionen von 2, 3, u. s. w. veränderlichen Grössen; die hierauf bezügliche Untersuchung wollen wir in folgendem für Funktionen zweier Veränderlichen durchführen.

**356.** Es sei demnach

$$z = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei unabhängig Veränderlichen, und $x = a$, $y = b$, ein System von Werthen, welches aus der Auflösung der Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0 \tag{1}$$

erhalten wurde. Entwickelt man den 2ten Differenzialquotienten $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ nach §. 325, indem man $x$ und $y$ als Funktionen von $\alpha$ betrachtet, so findet man mit Rücksicht auf die Gl. (1):

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{dz^2}{dy^2}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2,$$

d. i. wenn man Kürze wegen den Quotienten $\frac{dx}{d\alpha} : \frac{dy}{d\alpha} = m$, und $\frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{d^2z}{dx\,dy} = s$, $\frac{d^2z}{dy^2} = t$ setzt:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = (rm^2 + 2sm + t)\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2;$$

hiebei haben wir $m$ als eine ganz willkürliche Grösse zu betrachten, wodurch die Unabhängigkeit der Variablen $x$ und $y$ von einander wieder hergestellt wird. Das Vorzeichen von $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ hängt nun, wie man sieht, einzig und allein von jenem des Ausdruckes:

$$rm^2 + 2sm + t \tag{2}$$

ab; dieser Ausdruck muss demnach, wenn man darin $x = a$, $y = b$ substituirt, negativ sein im Falle des Maximums, positiv im Falle des Minimums, und zwar für jeden beliebigen Werth von $m$. Es dürfen demnach zunächst die drei partiellen Differenzialquotienten $r$, $s$, $t$, für $x = a$, $y = b$ nicht gleichzeitig verschwinden. Der Ausdruck (2) wird ferner, während $m$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, sein Zeichen nur dann nicht ändern, wenn die nach $m$ quadratische Gleichung $rm^2 + 2sm + t = 0$ keine reelle Wurzel besitzt, wozu erfordert wird, dass

$$s^2 - rt < 0 \tag{3}$$

sei; diese Bedingung schliesst einerseits die oben ausgesprochene, dass $r$, $s$, $t$ nicht gleichzeitig Null sein dürfen, schon in sich; überdies zeigt dieselbe noch, dass die Grössen $r$ und $t$ für $x = a$, $y = b$ gleiche Zeichen erhalten müssen, weil sonst die Differenz linker Hand in (3)

in eine nothwendig positive Summe sich verwandeln würde. Was endlich das Vorzeichen des Ausdruckes (2) selbst betrifft, so stimmt dieses mit jenem überein, welches die Grössen $r$ und $t$ erhalten; diess erhellt sogleich, wenn man beachtet, dass dieser Ausdruck in Folge der Bedingung (3) überhaupt sein Zeichen nicht ändert, und für $m=0$ sich auf die Grösse $t$ reducirt.

Hiedurch gelangt man demnach zu folgendem Schlusse: damit ein aus den Gl. (1) gezogenes System von Werthen $x=a$, $y=b$ die Funktion $z$ zu einem Maximum oder Minimum mache, müssen sie zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}<0$$

Genüge leisten, und erzeugen ein Maximum oder Minimum der Funktion $z$, je nachdem sie die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dy^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen.

Ergibt sich für $x=a$, $y=b$, $s^2-rt>0$, so findet weder ein Maximum noch Minimum statt, denn die oben erwähnte quadratische Gl. würde in diesem Falle zwei reelle Wurzeln haben und folglich der Ausdruck $rm^2+2sm+t$, also auch $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ einen Zeichenwechsel erfahren, wenn man für $m$ Werthe setzt, welche zu beiden Seiten einer dieser Wurzeln liegen.

Die obigen Kriterien lassen endlich die Existenz eines Maximums oder Minimums unentschieden, wenn für $x=a$, $y=b$, die Grössen $r$, $s$, $t$ gleichzeitig verschwinden, oder wenn $s^2-rt=0$ sich ergibt; weil der 2[te] Differenzialquotient $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ im ersteren Falle für jeden Werth von $m$, im letzteren für $m=-\frac{s}{r}$ verschwindet*). In beiden Fällen müsste man die höheren Differenzialquotienten zu Rathe ziehen, was jedoch umständliche Rechnungen erfordert; man thut in solchen Fällen besser, auf anderen Wegen sich die Ueberzeugung zu verschaffen, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden sei, oder nicht. Häufig kann

*) Ist nämlich $s^2-rt=0$, so folgt, wenn man den hieraus sich ergebenden Werth von $t$ substituirt:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2}=\left(rm^2+2sm+\frac{s^2}{r}\right)\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2=r\left(m+\frac{s}{r}\right)^2\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2.$$

dies aus der Natur der Aufgabe unmittelbar entschieden werden; wo nicht, so führt wieder die unmittelbare Betrachtung der Nachbarwerthe zum Ziele.

Auf ähnliche Weise könnte man Kriterien des Maximums und Minimums für Funktionen von drei und mehreren Veränderlichen entwickeln; sie werden jedoch immer complicirter, daher wir nicht weiter auf dieselben eingehen; man wird immer schneller zum Ziele gelangen, wenn man jedesmal durch eine besondere Diskussion der Aufgabe untersucht, ob für ein aus den Gl. (2) §. 355 gezogenes Werthsystem ein Maximum oder ein Minimum eintrete, oder keines von beiden.

Beispiele. 1. Eine Zahl $a$ in drei Theile so zu theilen, dass das Produkt derselben ein Maximum werde.

Es seien $x$, $y$ und $a - x - y$ die drei Theile, so hat man $z = xy\,(a - x - y)$ zu einem Maximum zu machen, somit

$$\frac{dz}{dx} = y\,(a - x - y) - xy = 0, \quad \frac{dz}{dy} = x\,(a - x - y) - xy = 0$$

zu setzen, aus welchen Gleichungen $x = y = \frac{1}{3}\,a$ folgt. Substituirt man ferner diese Werthe in die Ausdrücke:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -2y, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -2x, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = a - 2x - 2y,$$

so kommt

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\tfrac{2}{3}\,a, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\tfrac{2}{3}\,a, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = -\tfrac{1}{3}\,a,$$

und

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} = -\tfrac{1}{3}\,a^2,$$

das Produkt wird demnach ein Maximum, wenn die drei Theile gleich sind.

2. Unter allen Dreiecken vom Umfange $= 2s$ dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat. Bezeichnet man zwei der Dreiecksseiten mit $x$, $y$, so ist die dritte: $2s - x - y$ und somit der Flächeninhalt:

$$F = \sqrt{s\,(s-x)\,(s-y)\,(x+y-s)}.$$

Es genügt offenbar, die veränderliche Grösse unter dem Wurzelzeichen zu einem Maximum zu machen; bezeichnet man diese mit $z$, so sind die Bedingungsgleichungen des Maximums und Minimums:

$$\frac{dz}{dx} = (s-y)\,[-(x+y-s) + s - x] = 0,$$

$$\frac{dz}{dy} = (s-x)\,[-(x+y-s) + s - y] = 0;$$

aus beiden Gleichungen folgt $x = y = \frac{2s}{3}$; das Dreieck muss daher gleichseitig sein. Für diese Werthe folgt ferner:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} = -\tfrac{2}{3}s^2, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = -\frac{s^2}{3}$$

und

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} = -\tfrac{1}{3}s^4,$$

woraus man erkennt, dass der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks ein Maximum ist, was übrigens ohne die 2ten Differenzialquotienten zu Hülfe zu nehmen, schon aus der Natur der Sache leicht erhellt.

## III. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

**357.** Häufig tritt der Fall ein, dass die veränderlichen Grössen $x, y, u, \ldots$, von welchen die Funktion

$$z = f(x, y, u, \ldots), \tag{1}$$

welche ein Maximum oder Minimum werden soll, abhängt, an gewisse Bedingungen gebunden sind, welche durch Gleichungen:

$$L = F(x, y, u, \ldots) = 0, \quad L_1 = F_1(x, y, u, \ldots) = 0, \text{ u. s. w.} \tag{2}$$

ausgedrückt sind. In diesem Falle besteht die Aufgabe darin, solche Werthe der Veränderlichen $x$, $y$, $u$, u. s. w. auszumitteln, welche die Funktion $z$ zu einem Maximum oder Minimum machen, und gleichzeitig den Bedingungsgleichungen (2) Genüge leisten.

Zur Auflösung dieser Aufgabe bietet sich zunächst folgender Weg dar. Ist $n$ die Anzahl der Veränderlichen, und $m$ jene der Bedingungsgleichungen, wo $m$ nothwendig kleiner sein muss als $n$, so kann man mit Hülfe der letzteren $m$ Variable durch die übrigen $(n-m)$ ausdrücken und in $z = f(x, y, u, \ldots)$ substituiren; diese Funktion wird dann nur mehr $(n-m)$ von einander unabhängige Veränderliche enthalten, und kann sofort nach den in den vorhergehenden §§. gegebenen Vorschriften behandelt werden.

Dieses Verfahren ist aber nur selten das kürzeste, und häufig unausführbar, wegen der Unmöglichkeit, die erforderlichen Eliminationen zu bewerkstelligen. Wir wollen daher noch einen anderen Weg einschlagen.

Damit die Funktion $z = f(x, y, u, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum werde, muss zunächst [Gl. (1), §. 355] die Gleichung

$$dz = \frac{dz}{dx}dz + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du + \ldots = 0 \tag{3}$$

erfüllt werden. Aus dieser Gleichung würde sogleich $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$, u. s. w. folgen, wenn die Grössen $x$, $y$, $u$, ... und somit auch deren Differenzialien von einander unabhängig wären. Da aber dies nicht der Fall ist, so differenzire man nun auch die Bedingungsgleichungen (2); man erhält dadurch:

$$\left.\begin{aligned} dL &= \frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{du}\,du + \ldots = 0, \\ dL_1 &= \frac{dF_1}{dx}\,dx + \frac{dF_1}{dy}\,dy + \frac{dF_1}{du}\,du + \ldots = 0, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und kann nun mit Hülfe dieser Gleichungen, $m$ an der Zahl, eben so viele Differenzialien aus der Gl. (3) eliminiren; die übrig bleibenden $(n - m)$ Differenzialien sind nunmehr von einander unabhängig, und indem man die Coefficienten derselben $= 0$ setzt, erhält man $n - m$ Gleichungen, welche in Verbindung mit den $m$ gegebenen Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der $n$ Unbekannten hinreichen. Dieses Verfahren erfordert, wie man sieht, nur Eliminationen aus linearen Gleichungen, und ist demnach immer ausführbar.

Die Elimination wird oft mit Vortheil mittelst unbestimmter Multiplicatoren bewerkstelliget. Man multiplicirt zu diesem Behufe jede der Gleichungen (4) mit einem unbestimmten Faktor $\lambda$, $\lambda_1$, u. s. w. und addirt dieselben sodann zur Gleichung (3), so erhält man:

$$dz + \lambda\, dL + \lambda_1\, dL_1 + \ldots = 0, \qquad (5)$$

oder entwickelt, und sogleich nach den Differenzialien geordnet:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dz}{dx} + \lambda\frac{dF}{dx} + \lambda_1\frac{dF_1}{dx} + \ldots\right) dx \\ + &\left(\frac{dz}{dy} + \lambda\frac{dF}{dy} + \lambda_1\frac{dF_1}{dy} + \ldots\right) dy \\ + &\left(\frac{dz}{du} + \lambda\frac{dF}{du} + \lambda_1\frac{dF_1}{du} + \ldots\right) du \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0 \qquad (6)$$

In dieser Gleichung hat man nun zunächst die Coefficienten derjenigen Differenzialien gleich Null zu setzen, welche man eliminiren will; die übrig bleibenden Differenzialien sind sodann willkürlich und aus diesem Grunde ihre Coefficienten ebenfalls $= 0$ zu setzen; auf diese Weise erhält man $n$ Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dx}+\lambda\frac{dF}{dx}+\lambda_1\frac{dF_1}{dx}+\ldots=0\\ \frac{dz}{dy}+\lambda\frac{dF}{dy}+\lambda_1\frac{dF_1}{dy}+\ldots=0\\ \frac{dz}{du}+\lambda\frac{dF}{du}+\lambda_1\frac{dF_1}{du}+\ldots=0,\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

u. s. w.

aus welchen sich durch Elimination der Faktoren $\lambda, \lambda_1, \ldots, m$ an der Zahl, die $(n - m)$ Endgleichungen ergeben, welche in Verbindung mit den Gl. (2) die gesuchten Werthe der Variablen bestimmen.

Man bemerkt von selbst, dass die ersten Theile der Gl. (7), auf deren Bildung es nur ankommt, nichts anderes sind, als die partiellen Differenzialquotienten der Grösse

$$V = z + \lambda L + \lambda_1 L_1 + \ldots,$$

welche man erhält, wenn man zur Funktion, welche ein Maximum werden soll, die 1ten Theile der auf Null reducirten Bedingungsgleichungen addirt, nachdem zuvor jeder derselben mit einem unbestimmten Faktor multiplicirt worden ist.

Beispiele. 1. Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= \alpha$, und denselben Flächeninhalt $= f$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Bezeichnet man mit $x$, $y$, $z$ die Seiten des Dreieckes, von welchen $z$ dem gegebenen Winkel $\alpha$ gegenüber liegen mag, mit $s$ den Umfang, so hat man

$$s = x + y + z = \text{Minimum},$$

und als Bedingungsgleichungen:

$$2f = xy \sin\alpha; \quad z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha.$$

Durch Differenziation dieser Gleichungen erhält man nun:

$$ds = dx + dy + dz = 0;$$
$$0 = xdy + ydx; \quad zdz = xdx + ydy.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt: $dy = -\frac{y}{x}dx$, $dz = \frac{x^2 - y^2}{xz}dx$; substituirt man diese Werthe in die 1te Gleichung und setzt den Coefficienten von $x$ der Nulle gleich, so kommt:

$$1 - \frac{y}{x} + \frac{x^2 - y^2}{xz} = 0, \text{ oder } (x - y)\left(\frac{x + y + z}{xz}\right) = 0,$$

woraus $x = y$ folgt. Das Dreieck wird daher gleichschenklig, so

dass die gleichen Schenkel den gegebenen Winkel einschliessen. Mit Hülfe der beiden Bedingungsgleichungen findet man jetzt leicht:

$$x = y = \sqrt{2f \operatorname{cosec} \alpha}, \quad z = 2\sqrt{f \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha}.$$

2. Die kürzeste Entfernung zweier Geraden im Raume zu finden. Es seien

$$\begin{array}{ll} x = az + \alpha, & x = a'z + \alpha' \\ y = bz + \beta & y = b'z + \beta' \end{array}$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, und $x_1, y_1, z_1$ ein Punkt auf der ersten, $x_2, y_2, z_2$ ein Punkt der zweiten Geraden; die Entfernung $D$ dieser Punkte ist durch den Ausdruck:

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \qquad (\alpha)$$

gegeben, welcher sofort ein Minimum werden soll. Die sechs Variablen, von welchen derselbe abhängt, sind an folgende 4 Bedingungsgleichungen gebunden:

$$\begin{array}{ll} x_1 - az_1 - \alpha = 0, & x_2 - a'z_2 - \alpha' = 0, \\ y_1 - bz_1 - \beta = 0 & y_2 - b'z_2 - \beta' = 0, \end{array} \qquad (\beta)$$

und man hat demnach, wenn wir von der Methode der unbestimmten Multiplicatoren Gebrauch machen, für die Grösse, deren partielle Differenzialquotienten $= 0$ zu setzen sind:

$$V = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + \lambda(x_1 - az_1 - \alpha) + \lambda_1(y_1 - bz_1 - \beta) \\ + \lambda_2(x_2 - a'z_2 - \alpha') + \lambda_3(y_2 - b'z_2 - \beta').$$

Differenzirt man diesen Ausdruck partiell in Bezug auf sämmtliche sechs Veränderliche, so kommt:

$$\begin{array}{l|l|l} 2(x_1 - x_2) + \lambda = 0 & 2(y_1 - y_2) + \lambda_1 = 0 & 2(z_1 - z_2) - a\lambda - b\lambda_1 = 0 \\ 2(x_1 - x_2) - \lambda_2 = 0 & 2(y_1 - y_2) - \lambda_3 = 0 & 2(z_1 - z_2) - a'\lambda_2 + b'\lambda_3 = 0. \end{array}$$

Aus diesen 6 Gleichungen erhält man nun durch Elimination der 4 unbestimmten Faktoren folgende zwei:

$$\begin{array}{l} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + z_1 - z_2 = 0 \\ a'(x_1 - x_2) + b'(y_1 - y_2) + z_1 + z_2 = 0, \end{array} \qquad (8)$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen $(\beta)$ die 6 Unbekannten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ finden lassen. Durch Substitution ihrer Werthe in $(\alpha)$ ergibt sich sodann die kürzeste Distanz selbst. Man kann übrigens zu diesem Behufe aus den Gl. $(\beta)$ die folgende ableiten:

$$(b - b')(x_1 - x_2) - (a - a')(y_1 - y_2) + (ab' - a'b)(z_1 - z_2) = P,$$

wo der Kürze halber $(a - a')(\beta' - \beta) - (b - b')(\alpha' - \alpha) = P$ gesetzt ist. Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (8) zieht man nun:

$$x_1 - x_2 = \frac{(b - b')P}{N},\quad y_1 - y_2 = \frac{(a' - a)P}{N},\quad z_1 - z_2 = \frac{(ab' - a'b)P}{N},$$

wo $N = (b - b')^2 + (a - a')^2 + (ab' - a'b)^2$. Hiemit wird die kürzeste Distanz:

$$D = \frac{(a - a')(\beta' - \beta) - (b - b')(\alpha' - \alpha)}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}.$$

Sind $x = Az + m$, $y = Bz + n$ die Gleichungen der kürzesten Geraden, so hat man, da diese durch die so eben bestimmten Punkte hindurchgeht:

$$x_1 = Az_1 + m,\quad y_1 = Bz_1 + n,$$
$$\text{und}\quad x_2 = Az_2 + m,\quad y_2 = Bz_2 + n,$$

folglich: $x_1 - x_2 = A(z - z_2)$, $y_1 - y_2 = B(z_1 - z_2)$;

durch Substitution dieser Werthe in die Gl. (8) erhält man:

$$Aa + Bb + 1 = 0,\quad Aa' + Bb' + 1 = 0$$

und diese Gleichungen zeigen, dass die kürzeste Verbindungslinie zweier Geraden auf beiden zugleich senkrecht steht.

# SECHSTES KAPITEL.

## ANWENDUNGEN DER DIFFERENZIALRECHNUNG AUF DIE THEORIE DER EBENEN CURVEN.

### I. Von den Tangenten, Normalen und Asymtoten ebener Curven. — Differenzial des Bogens und der Fläche. — Ausdrücke in Polarcoordinaten.

**358.** Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer beliebigen Curve $AB$ (Fig. 22), bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem; durch irgend zwei Punkte $M$, $M'$ derselben, deren Coordinaten

$$OP = x,\quad MP = y,\quad OP' = x + \Delta x,\quad M'P' = y + \Delta y$$

sein mögen, legen wir eine Sekante, deren Gleichung demnach, wenn die laufenden Coordinaten mit $\xi$, $\eta$ bezeichnet werden,

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x)$$

sein wird. In dieser Gleichung ist bekanntlich der Coefficient von $\xi$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \sigma$, wenn $\sigma$ den Winkel bedeutet, welchen die Sekante mit der Axe der $x$ einschliesst.

Nehmen wir nun an, dass der Punkt $M'$ dem Punkte $M$ sich unendlich nähere, wobei $\Delta x$ und $\Delta y$ unendlich abnehmen, so wird die diese beiden Punkte verbindende Sekante immer mehr und mehr sich einer gewissen Geraden nähern, welche die Tangente an der Curve im Punkte $M$ heisst. Bezeichnet man daher den Neigungswinkel derselben gegen die Abscissenaxe mit $\tau$, so ist dieser Winkel die Grenze, welcher sich der Winkel $\sigma$ bei unendlich abnehmendem $\Delta x$ unendlich nähert; es ist demzufolge:

$$\operatorname{tg} \tau = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{d. i.} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{1}$$

und man erhält als Gleichung der Tangente am Punkte $x, y$:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x), \tag{2}$$

wo $\xi$, $\eta$ der laufenden Coordinaten der Tangente vorstellen.

Der Winkel $\tau$ bestimmt die Neigung der Tangente oder die Neigung der Curve im Punkte $x$, $y$ gegen die Abscissenaxe; diese Neigung wird demnach immer durch den 1ten Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, welchen man aus der Gleichung der Curve mit Leichtigkeit findet, angegeben.

Aus (1) erhält man noch:

$$\sin \tau = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}. \tag{3}$$

Zieht man durch den Punkt $M$ (Fig. 23) eine auf die Tangente senkrechte Gerade $NN'$, so heisst diese die Normale der Curve im Punkte $M$. Der Winkel $\nu = MNX$, welchen diese mit der $x$-Axe einschliesst, ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \nu = - \frac{1}{\operatorname{tg} \tau} = - \frac{1}{f'(x)} = - \frac{dx}{dy} \tag{4}$$

bestimmt, und man hat daher als Gleichung der Normale:

$$\eta - y = - \frac{dx}{dy} (\xi - x). \tag{5}$$

Ist die Gleichung der Curve in der Form: $F(x, y) = 0$ gegeben, so ergibt sich durch Differenziation dieser Gleichung

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0;$$

durch Substitution des hieraus folgenden Werthes von $\frac{dy}{dx}$ in (2) und (5) erhält man sofort als Gleichung der Tangente:

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} = 0, \tag{6}$$

und als Gleichung der Normale:

$$(\xi - x)\frac{dF}{dy} - (\eta - y)\frac{dF}{dx} = 0. \tag{7}$$

**359.** Die Stücke $MT$ und $MN$ (Fig. 23) der Tangente und Normale, welche von dem Berührungspunkte $M$ und den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Axe der $x$ begrenzt sind, werden im engeren Sinne Tangente und Normale genannt; die Stücke $PT$ und $PN$ der Abscissenaxe, welche zwischen den erwähnten Durchschnittspunkten und dem Fusspunkte der Ordinate des Berührungspunktes liegen, heissen Subtangente und Subnormale.

Die Ausdrücke für diese Linien ergeben sich sehr leicht aus den rechtwinkligen Dreiecken $MTP$ und $MPN$, wenn man beachtet, dass Winkel $MTP = PMN = \tau$ und $\operatorname{tg}\tau = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ist, und auf die Gleichungen (1) und (3) Rücksicht nimmt. Man findet:

Tangente $$MT = \frac{y}{\sin\tau} = \frac{y\sqrt{1+f'(x)^2}}{f'(x)} = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}},$$

Normale $$MN = \frac{y}{\cos\tau} = y\sqrt{1+f'(x)^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

Subtangente $$PT = \frac{y}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{y}{f'(x)} = y\frac{dx}{dy},$$

Subnormale $$PN = y\operatorname{tg}\tau = yf'(x) = y\frac{dy}{dx}.$$

Aus den zwei letzten Ausdrücken erhellt, dass die Ordinate des Berührungspunktes die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen der Subtangente und Subnormale.

**360.** Wir wollen nun die vorstehenden Formeln auf einige Beispiele anwenden.

1. Die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel, auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen, hat die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

durch Differenziation erhält man

$$\frac{x}{a^2}\, dx \pm \frac{y}{b^2}\, dy = 0,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

folgt. Die Gleichung der Tangente ist demnach:

$$\eta - y = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y} (\xi - x),$$

und die Gleichung der Normale:

$$\eta - y = \pm \frac{a^2 y}{b^2 x} (\xi - x).$$

Ferner findet man, indem man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den oben entwickelten Ausdrücken substituirt:

$$\text{Tangente} = \frac{y}{b^2 x} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}; \quad \text{Normale} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2};$$

$$\text{Subtang.} = \mp \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{x^2 - a^2}{x}; \quad \text{Subnorm.} = \mp \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit jenen überein, welche wir bereits in §. 203, 204 und 217 entwickelt haben, daher wir bei den daraus zu ziehenden Folgerungen nicht weiter verweilen.

2. Die Gleichung der logarithmischen Linie (§. 237) ist:

$$y = a e^{\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad x = a l \frac{y}{a}.$$

Man erhält hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a}.$$

Die Gleichungen der Tangente und Normale werden demnach:

$$a(\eta - y) = y(\xi - x),$$

und $\quad y(\eta - y) + a(\xi - x) = 0.$

Die Subtangente $y \frac{dx}{dy}$ wird $= a$, hat demnach in dieser Curve einen

constanten Werth, wodurch ein leichtes Mittel zur Construction der Tangente geboten ist.

3. Die Gleichungen der Cycloide sind (§. 238):

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a\,(1 - \cos\varphi),$$

oder

$$x = a \text{ arc cos} \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

wenn man die Grundlinie $OX$ (Fig. 24), auf welcher der erzeugende Kreis rollt, als Abscissenaxe, und einen Punkt $O$ derselben, mit welchem der beschreibende Punkt $M$ bei einer früheren Lage des Kreises zusammenfiel, als Ursprung annimmt; endlich mit $a$ den Halbmesser des Erzeugungskreises, mit $\varphi$ den Wälzungswinkel $MCB$ bezeichnet.

Differenzirt man die obigen Gleichungen, so erhält man:

$$dx = a\,(1 - \cos\varphi)\, d\varphi, \quad dy = a \sin\varphi\, d\varphi,$$

somit $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}.$$

Hiemit ergibt sich nun:

$$\text{Tangente } MT = y\sqrt{\frac{2a}{2a - y}}, \qquad \text{Normale } MB = \sqrt{2ay},$$

$$\text{Subtang. } PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}; \qquad \text{Subnorm. } PB = \sqrt{2ay - y^2}.$$

Verbindet man den Berührungspunkt $M$ mit den Endpunkten des zur Ordinatenaxe parallelen Durchmessers $EB$, und zieht $MF$ senkrecht auf $EB$, so ist $MB = \sqrt{EB.BF} = \sqrt{2ay}$ = der Normale, und $PB = MF = \sqrt{BF.EF} = \sqrt{y(2a - y)}$ = der Subnormale des Punktes $M$. Die Normale geht daher immer durch jenen Punkt $B$ der Grundlinie, in welchem dieselbe von dem Erzeugungskreise berührt wird, die Tangente aber demzufolge durch den gegenüberliegenden Endpunkt des Durchmessers $EB$.

Hieraus folgt ein einfaches Verfahren, um zu einem gegebenen Punkte $M$ der Cycloide die Tangente und Normale zu construiren. Man beschreibe über $AD$ als Durchmesser den Kreis $AGD$, ziehe $MG$ parallel zur Grundlinie, verbinde den Durchschnittspunkt $G$ mit $A$ und $D$ und ziehe endlich zu $AG$ und $DG$ die Parallelen $MT$ und $MB$.

**361.** Eine Gerade, welcher sich ein unendlicher Curvenast immer mehr und mehr nähert, ohne jedoch mit ihr je zusammenzutreffen, wird eine Asymtote der Curve genannt.

Man kann offenbar eine Asymtote immer als eine Tangente betrachten, deren Berührungspunkt mit der Curve in unendliche Entfernung fällt, eine Auffassung, welche zu einem einfachen Verfahren führt, die Asymtoten einer gegebenen Curve zu finden. Es sei $y=f(x)$ die Gleichung der Curve, so hat man als Gleichung der Tangente: $\eta - y = f'(x)(\xi - x)$ oder, wenn man $y = f(x)$ setzt:

$$\eta = \xi f'(x) + [f(x) - xf'(x)],$$

wo bekanntlich $\xi$, $\eta$ die laufenden Coordinaten der Tangente und $x$ die Abscisse des Berührungspunktes ist. Lässt man nun in dieser Gleichung $x$ unendlich gross werden und nähern sich dabei die Grössen $f'(x)$ und $f(x) - xf'(x)$ bestimmten Grenzen $\alpha$, $\beta$, so ist

$$\eta = \alpha\xi + \beta$$

die Gleichung der gesuchten Asymtote. Nur solche Asymtoten, welche zur Ordinatenaxe parallel sind, können sich, wie leicht einzusehen, durch dieses Verfahren nicht ergeben; diese findet man aber auf ähnliche Weise, indem man die Gleichung der Tangente nach $\xi$ auflöst.

Beispiele. 1. Für die Hyperbel haben wir oben als Gleichung der Tangente gefunden

$$\eta - y = \frac{b^2x}{a^2y}(\xi - x),$$

welche, wenn man mit Hülfe der Gleichung der Curve $y$ eliminirt, leicht auf folgende Form gebracht wird:

$$\eta = \pm \frac{b\xi}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \mp \frac{ab}{x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}};$$

hieraus folgt für $x = \infty$:

$$\eta = \pm \frac{b}{a}\xi$$

als Gleichung der Asymtoten der Hyperbel.

2. Die Gleichung der logarithmischen Linie ist $y = ae^{\frac{x}{a}}$ und für die Gleichung der Tangente fanden wir [§. 360]: $a(\eta - y) = y(\xi - x)$, oder, wenn man für $y$ seinen Werth schreibt:

$$\eta = e^{\frac{x}{a}}\xi + e^{\frac{x}{a}}(a - x).$$

Ertheilt man hier der Abscisse $x$ immer grösser werdende negative Werthe, so wird für $x = -\infty$, $\lim e^{\frac{x}{a}} = 0$, $\lim e^{\frac{x}{a}}(a - x) = 0$ und die Gleichung geht über in $\eta = 0$. Die Abscissenaxe auf der Seite der negativen $x$ ist demnach Asymtote dieser Curve.

Dieses Verfahren bedarf einer Modifikation in dem Falle, wenn die Gleichung der Curve nach $y$ und $x$ nicht aufgelöst werden kann. Man gelangt dann auf folgendem allgemeineren Wege zum Ziele.

Die Gleichung einer zur Axe der $y$ nicht parallelen Asymtote hat jedenfalls die Form:

$$y = \alpha x + \beta,$$

und es kommt daher nur auf die Bestimmung der Constanten $\alpha$ und $\beta$ an. Die der Abscisse $x$ entsprechende Ordinate der Curve muss sich für sehr grosse Werthe von $x$ nahe auf die Ordinate der Asymtote reduciren, und kann daher in der Form:

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon,$$

dargestellt werden, wo $\varepsilon$ eine Grösse bedeutet, welche beim unendlichen Wachsen von $x$ gegen Null convergirt. Es ist daher:

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\beta + \varepsilon}{x}, \text{ und } y - \alpha x = \beta + \varepsilon,$$

aus welchen Gleichungen, wenn man $x$ unendlich zunehmen lässt:

$$\alpha = \lim \frac{y}{x}, \quad \beta = \lim (y - \alpha x)$$

folgt. Man setze daher in der Gleichung der Curve $\frac{y}{x} = \alpha$ oder $y = \alpha x$, und bestimme die Grenze, welcher sich $\alpha$ für $x = \pm \infty$ nähert; diese ist der gesuchte Werth von $\alpha$. — Setzt man ferner in der Gleichung der Curve $y = \alpha x + \beta$, so muss diese für $x = \pm \infty$ identisch werden; aus der resultirenden Gleichung bestimmt sich daher $\beta$. Jedem Systeme endlicher Werthe von $\alpha$ und $\beta$ entspricht sodann eine Asymtote der gegebenen Curve.

Beispiel. Betrachten wir die durch die Gleichung

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

dargestellte Curve (Fig. 25), welche den Namen Folium des Descartes führt. Für $y = \alpha x$ verwandelt sich diese Gleichung in: $1 - \frac{3a\alpha}{x} + \alpha^3 = 0$, aus welcher für $x = \infty : \alpha = -1$ folgt. Setzt man ferner $y = \alpha x + \beta = \beta - x$, so geht die Gleichung über in:

$$\beta + a - \frac{\beta(a + \beta)}{x} + \frac{\beta^3}{3x^2} = 0,$$

welche für $x = \infty$ den Werth $\beta = -a$ darbietet. Diese Curve besitzt daher eine Asymtote, deren Gleichung: $y + x + a = 0$ ist.

**362.** Sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve $AB$ (Fig. 26) und $A$ irgend ein fester Punkt in derselben; die Länge des zwischen diesem festen und einem beliebigen Punkte $M$ enthaltenen Bogenstückes $AM = s$ der Curve ist offenbar eine Funktion der Abscisse $OP = x$ des Endpunktes $M$; wir wollen nun einen Ausdruck für das Differenzial des Bogens aufsuchen, d. h. für die unendlich kleine Aenderung der Länge des Bogens, welche einer unendlich kleinen Zunahme der Abscisse entpricht.

Lassen wir $x$ um $\Delta x = PP'$ zunehmen, so wird der Bogen $AM = s$ in $AM' = s + \Delta s$ übergehen und man kann offenbar $\Delta x$ immer so klein annehmen, dass das Bogenstück $MM'$ gegen die Sehne $MM'$ stets concav oder stets convex bleibe. Ziehen wir zu $M$ und $M'$ Tangenten, von welchen die erstere der zweiten in $T$, und der zu $M'$ gehörigen Ordinate in $N$ begegnet, so ist bekanntlich: Sehne $MM' <$ Bogen $MM' < MT + TM'$; ist nun die Curve in der Nähe von $M$ im Steigen begriffen, so ist der $\angle\, TM'N$ nothwendig stumpf, also $TM' < TN$, daher auch $MT + M'T < MN$; um so mehr wird daher

$$\text{Sehne } MM' < \Delta s < MN$$

sein. Nun ist die Sehne $MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$; ferner $MN = MR$ sec $N'MR = \Delta x \sec \tau = \Delta x \sqrt{1 + \operatorname{tg} \tau^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; es besteht daher die Relation

$$\Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} < \Delta s < \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

lässt man nun $\Delta x$ unendlich abnehmen, so nähert sich der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ohne Ende dem Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$; die Grenzwerthe der zwei Ausdrücke, zwischen denen $\Delta s$ enthalten ist, sind also gleich, daher besteht, wenn man auf die Differenzialien übergeht, die Gleichung:

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \text{ oder } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{1}$$

Das Wurzelzeichen ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem bei wachsender Abscisse der Bogen $s$ zu- oder abnimmt.

Ist die Curve in der Nähe von $M$ steigend und gegen die Abscissenaxe convex (Fig. 27), so verlängere man die Tangente in $M'$ rückwärts bis zum Durchschnitte $N$ mit der Ordinate des Punktes $M$, so ist wieder Sehne $MM' < \Delta s < MT + M'T$, oder weil $MT < NT$ ist, auch Sehne $MM' < \Delta s < M'N$; ferner die Sehne $MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

und wenn man $\angle M'NR = \tau'$ setzt, $M'N = \Delta x \sec\tau' = \Delta x \sqrt{1 + \operatorname{tg}\tau'^2}$. Bezeichnet man nun der Kürze wegen $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ mit $\varphi(x)$, so ist $\sqrt{1 + \operatorname{tg}\tau'^2} = \varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta x\, \varphi'(x + \theta \Delta x)$, wenn man die Taylor'sche Reihe in Anspruch nimmt und beim zweiten Gliede abbricht. Es besteht also die Relation:

$$\Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} < \Delta s < \Delta x \left[\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \Delta x\, \varphi'(x + \theta \Delta x)\right],$$

oder

$$\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \Delta x\, \varphi'(x + \theta \Delta x),$$

welche, wenn wir $\Delta x$ unendlich klein werden lassen, offenbar wieder zur Gl. (1) führt. Die Beweise bleiben (nur in umgekehrter Ordnung) dieselben, wenn die Curve in der Nähe des Punktes $M$ in der Richtung der positiven $x$ fallend ist.

Einfacher gelangt man zu diesem Resultate durch unmittelbare Betrachtung des Dreieckes $MM'R$, wenn man in demselben $MR = dx$ und $M'R = dy$ unendlich klein annimmt; unter dieser Voraussetzung wird nämlich der Bogen $MM' = ds$ mit der Sehne $MM'$ zusammenfallen und es folgt daraus sogleich $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Mit Hülfe des Ausdruckes für das Bogendifferenzial lassen sich einige der bisher gewonnenen Formeln einfacher darstellen. Für den Winkel $\tau$, welchen die Tangente im Punkte $M$ der Curve mit der Abscissenaxe einschliesst, erhält man sofort, gemäss der Gl. (3) in §. 358:

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\tau = \frac{dx}{ds},$$

welche Formeln sich auch aus dem Differenzialdreiecke $MM'R$, in welchem $\angle M'MR = \tau$ ist, unmittelbar ergeben. Ferner wird nach §. 359:

$$\text{Tangente} = \frac{y\,ds}{dy}, \quad \text{Normale} = \frac{y\,ds}{dx}.$$

**363.** Unter Fläche einer ebenen Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, versteht man im allgemeinen den Flächeninhalt $NQPM$ (Fig. 28), welcher von zwei Ordinaten $NQ$ und $MP$, dem zwischen diesen liegenden Bogen $NM$ der Curve und der Abscissenaxe begrenzt wird. Betrachtet man die eine Ordinate $NQ$ als fest, so erscheint die Fläche als Funktion der zur andern Ordinate $PM = y$ gehörigen Abscisse

$OP = x$, und wenn letztere um $PP' = \Delta x$ zunimmt, so wird auch die Fläche $F$ einen Zuwachs $\Delta F = MM'PP'$ erhalten, dessen Ausdruck wir nun suchen wollen, unter der Voraussetzung, dass $\Delta x$ unendlich klein wird.

Zieht man durch $M$ und $M'$ die zur $x$-Axe Parallelen $MR$ und $M'S$, so entstehen die beiden Rechtecke $PMRP' = y\Delta x$ und $PSM'P' = (y + \Delta y)\Delta x$ und man kann offenbar $\Delta x$ immer so klein annehmen, dass die Ordinate $y = f(x)$ innerhalb des Intervalls $x$ und $x + \Delta x$ beständig zu- oder abnimmt, also auch das Trapez $PMM'P'$ zwischen den obgenannten beiden Rechtecken enthalten ist. Man hat daher

$$y\Delta x < \Delta F < (y + \Delta y)\, \Delta x$$

oder

$$y < \frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y;$$

lässt man nun $\Delta x$ unendlich abnehmen, so folgt hieraus durch den Uebergang zur Grenze:

$$\frac{dF}{dx} = y \text{ und } dF = ydx.$$

Man bemerkt leicht, dass die Fläche einer Curve durch jene Funktion von $x$ ausgedrückt wird, deren Differenzialquotient durch die Ordinate der Curve dargestellt ist.

**364.** In manchen Fällen gewährt der Gebrauch von Polarcoordinaten Vortheile im Vergleiche zum rechtwinkligen Coordinatensysteme, daher wir in folgendem die bisher gewonnenen Ergebnisse auf diese Gattung von Coordinaten übertragen wollen.

Ist im rechtwinkligen Coordinatensysteme $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, und nimmt man den Pol im Ursprunge und die Abscissenaxe als Polaraxe an, so hat man bekanntlich:

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta,$$

wenn mit $r$, $\theta$ die Polarcoordinaten des Punktes $x$, $y$ bezeichnet werden. Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung $y = f(x)$ ergibt sich die Polargleichung $r = \varphi(\theta)$ der Curve. Aus obigen Ausdrücken folgt:

$$dx = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta dr + r \cos\theta d\theta. \qquad (1)$$

Lässt man nun wieder $\tau$ den Winkel sein, welchen die Tangente am Punkte $x$, $y$ oder $r$, $\theta$ mit der Polaraxe einschliesst, so ist

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta}{\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta} = \frac{\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\operatorname{tg}\theta + 1}{\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} - \operatorname{tg}\theta},$$

aus welcher Gleichung man

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\theta} = \operatorname{cotg}(\tau - \theta)$$

findet. Es ist also:

$$\operatorname{cotg}(\tau - \theta) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}. \tag{2}$$

Den Differenzialquotienten $\frac{dr}{d\theta}$ zieht man aus der Polargleichung der Curve und diese Gleichung bestimmt demnach den Winkel $\tau$ durch die Coordinaten $r$, $\theta$ des Berührungspunktes.

Die Gl. (2) ergibt sich auch durch eine einfache geometrische Betrachtung. Sei (Fig. 29) $M$ der Berührungspunkt, somit $OM = r$, $\angle MOX = \theta$; lassen wir den Winkel $\theta$ um den unendlich kleinen Winkel $MOM' = d\theta$ zunehmen, wodurch $r$ in $OM' = r + dr$ übergeht, und beschreiben aus $O$ mit dem Halbmesser $OM$ den Kreisbogen $MR$, so können wir $MRM'$ als ein bei $R$ rechtwinkliges Dreieck betrachten; es ist nun $RM' = dr$, $MR = rd\theta$ und $\angle RMM' = 90^0 - OMT' = 90^0 - (\tau - \theta)$; somit $\operatorname{tg} RMM' = \operatorname{cotg}(\tau - \theta) = \frac{RM'}{RM} = \frac{dr}{rd\theta}$.

Man sieht leicht, dass $\tau - \theta$ der Winkel ist, welchen die Tangente mit dem Radiusvektor einschliesst.

Es hat keine Schwierigkeit, aus den in §. 358 entwickelten Gleichungen der Tangente und Normale die Polargleichungen dieser Geraden abzuleiten. Einfacher gelangt man jedoch hiezu auf folgende Weise. Es ist, wenn $r'$, $\theta'$ die laufenden Coordinaten bezeichnen,

$$r'\sin(\theta' - \tau) = r\sin(\theta - \tau) \tag{m}$$

die Polargleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $(r, \theta)$ geht und gegen die Polaraxe unter dem Winkel $\tau$ geneigt ist. Man überzeugt sich hievon sehr leicht durch Betrachtung des von dem Pole, dem Punkte $(r, \theta)$ und irgend einem Punkte $(r', \theta')$ der Geraden gebildeten Dreieckes, in welchem die Seiten $r$, $r'$ beziehungsweise den Winkeln $180 - (\theta' - \tau)$ und $\theta - \tau$ gegenüberliegen. Ertheilt man nun dem Winkel $\tau$ den durch die Gl. (2) bestimmten Werth, so wird die Gerade $(m)$ eine Tangente an der Curve. Zu diesem Ende setze

man in $(m)$: $(\theta' - \theta) + (\theta - \tau)$ statt $\theta' - \tau$, so erhält diese Gleichung, wenn man noch durch $\sin(\theta - \tau)$ dividirt, die Form:

$$r = r' \sin(\theta' - \theta) \operatorname{cotg}(\theta - \tau) + r' \cos(\theta' - \theta), \qquad (n)$$

und diese Gleichung verwandelt sich nach Substitution des Werthes von $\operatorname{cotg}(\theta - \tau)$ aus (2) in die Polargleichung der Tangente:

$$\frac{r' \cos(\theta' - \theta) - r}{r' \sin(\theta' - \theta)} = \frac{dr}{rd\theta}. \qquad (3)$$

Bezeichnet $\nu$ den Winkel, welchen die Normale $NN'$ (Fig. 29) mit der positiven Richtung der Polaraxe einschliesst, so ist $\nu = \tau \pm 90^0$, somit $\operatorname{cotg}(\tau - \theta) = -\operatorname{tg}(\nu - \theta)$ und

$$\operatorname{tg}(\nu - \theta) = -\frac{dr}{rd\theta}. \qquad (4)$$

Setzt man endlich in Gl. $(n)$ an die Stelle von $\tau$ diesen Winkel $\nu$, so folgt die Polargleichung der Normale:

$$\frac{r' \cos(\theta' - \theta) - r}{r' \sin(\theta' - \theta)} = -r\frac{d\theta}{dr}. \qquad (5)$$

**365.** Durch den Pol werde eine Gerade senkrecht auf den Radiusvektor gezogen, welche der Tangente und Normale beziehungsweise in den Punkten $T$ und $N$ (Fig. 30) begegnen möge. Die Stücke $OT$ und $ON$ dieser Senkrechten zwischen dem Pole und den erwähnten Durchschnittspunkten, werden Polarsubtangente und Polarsubnormale genannt. Die von den Punkten $T$ und $N$, und dem Berührungspunkte $M$ begrenzten Stücke $MT$ und $MN$ der Tangente und Normale pflegt man auch Polartangente und Polarnormale zu nennen.

Beachtet man, dass in den rechtwinkligen Dreiecken $OMT$ und $OMN$ der Winkel $OMT = ONM = \tau - \theta$ und $\operatorname{cotg}(\tau - \theta) = \frac{dr}{rd\theta}$ ist, so erhält man sogleich:

Polarsubtangente $OT = r^2 \frac{d\theta}{dr}$,

Polarsubnormale $ON = \frac{dr}{d\theta}$,

Tangente $MT = r\sqrt{1 + \left(\frac{rd\theta}{dr}\right)^2} = r\sqrt{\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dr^2}}$,

Normale $MN = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{d\theta^2}}$.

Um zu untersuchen, ob eine durch eine Polargleichung gegebene Curve Asymtoten besitze, erwäge man, dass wenn der Berührungspunkt einer Tangente in unendliche Entfernung rückt und dabei die Tangente in eine Asymtote übergeht, der Radiusvektor des Berührungspunktes offenbar zu dieser Tangente immer mehr und mehr parallel werden, und somit die Polarsubtangente für $r = \infty$ einer bestimmten, endlichen Grenze sich nähern muss, welche den Abstand der Asymtote vom Pole ausdrückt. Existirt kein solcher Grenzwerth, d. h. wird die Polarsubtangente für $r = \infty$ selbst unendlich oder imaginär, so besitzt die Curve keine Asymtote.

**366.** Wenden wir nun diese Formeln auf einige Beispiele an.

1. Für die Archimedische Spirale [§. 243] hat man $r = a\theta$; hieraus folgt $\frac{dr}{d\theta} = a$, und $\cot (\tau - \theta) = \frac{a}{r}$. Man schliesst hieraus, dass der Winkel, welchen die Tangente mit dem Radiusvektor bildet, immer mehr und mehr einem Rechten sich nähert, je weiter sich der Berührungspunkt vom Pole entfernt. Für $r = 0$ wird auch $\theta = 0$ und $\tau = 0$, d. h. die Spirale berührt im Ursprunge die Polaraxe. — Die Polarsubnormale $= \frac{dr}{d\theta} = a$ hat in dieser Curve einen constanten Werth.

2. Die hyperbolische Spirale wird durch die Gleichung $r\theta = a$ dargestellt; man zieht hieraus $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$ und $\cot (\tau - \theta) = -\frac{1}{\theta} = -\frac{r}{a}$. Die Polarsubtangente $= r^2 \frac{d\theta}{dr}$ wird $= a$, also constant. Hieraus folgt, dass diese Spirale eine Asymtote besitzt, welche in der Entfernung $= a$ vom Pole liegt und zwar parallel zur Polaraxe, weil der Winkel $\tau - \theta$ zwischen Radiusvektor und Tangente für $\theta = 0$ verschwindet.

3. Die logarithmische Spirale. Ihre Gleichung ist $r = e^{m\theta}$ oder $\theta = \frac{1}{m} lr$, wo $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Hieraus folgt: $\frac{dr}{d\theta} = me^{m\theta} = mr$, und $\cot (\tau - \theta) = m$; der von der Tangente und dem Radiusvektor gebildete Winkel ist daher constant.

4. Die Polargleichung der Lemniscate [§. 235] ist: $r = e\sqrt{2\cos 2\theta}$.

Folglich $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2e \sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} = -\frac{2e^2 \sin 2\theta}{r}$. Es wird hiemit $\operatorname{tg}(\nu - \theta) = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{tg} 2\theta$; d. h. der Winkel zwischen Radiusvektor und Normale ist gleich dem doppelten Neigungswinkel des Radiusvektors gegen die Polaraxe; mit Hülfe dieser Eigenschaft ist es leicht, zu irgend einem Punkte dieser Curve die Tangente oder Normale zu verzeichnen.

**367.** Um auch für Polarcoordinaten einen Ausdruck für das Differenzial des Bogens zu erhalten, betrachten wir Fig. (29) das Dreieck $MRM'$, in welchem man, wenn der Winkel $MOM' = d\theta$ unendlich klein angenommen wird, die Sehne $MM'$ dem Elemente $MM' = ds$ der Curve gleich setzen, und somit letzteres als Hypotenuse ansehen kann; da nun $MR = rd\theta$, $RM' = dr$ ist, so hat man als Ausdruck für das Differenzial des Bogens:

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Die Wurzelgrösse wird man positiv oder negativ nehmen, je nachdem der Bogen $s$ mit dem Polarwinkel $\theta$ gleichzeitig zu- oder abnimmt.

Unter Fläche einer ebenen Curve versteht man im Polarcoordinatensysteme den dreiseitigen Raum $AOM$ Fig. (29), welcher von zwei Radienvektoren $OA$ und $OM$ und dem zwischenliegenden Curvenbogen $AM$ begrenzt ist. Bezeichnet man diese Fläche mit $F$, und lässt $\theta$ um $d\theta$ zunehmen, so wächst $F$ um das Dreieck $MOM' = dF$, in welchem man $MM'$ als geradlinig und $MR$ senkrecht auf $OM'$ betrachten kann. Die Fläche dieses Dreieckes ist daher: $dF = \frac{1}{2}(r + dr)\, rd\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta + \frac{1}{2} r dr d\theta$; vernachlässiget man nun die unendlich kleinen Grössen 2ter Ordnung, wie diess bei dem Uebergange zur Grenze geschehen muss, so hat man für das Differenzial der Fläche den Ausdruck:

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta.$$

## II. Von den Berührungen der verschiedenen Ordnungen zwischen ebenen Curven.

**368.** Es seien $y = f(x)$, $y = F(x)$ die Gleichungen zweier, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Curven $AB$, $CD$ (Fig. 31), welche den Punkt $M$ gemeinschaftlich haben und sich folglich in diesem Punkte schneiden oder berühren. Man sagt, die Cur-

ven berühren sich im Punkte $M$, wenn sie in diesem Punkte gleiche Neigung gegen die Abscissenaxe, also eine gemeinschaftliche Tangente besitzen; im entgegengesetzten Falle findet ein Durchschnitt statt. Ob solche gemeinschaftliche Punkte existiren, findet man, wenn man $f(x) = F(x)$ setzt. So viele reelle Wurzeln diese Gleichung besitzt, eben so viele Punkte haben beide Curven gemeinschaftlich und die besagten Wurzeln sind die Abscissen derselben.

Lassen wir die dem gemeinschaftlichen Punkte $M$ angehörige Abscisse $OP = x$ in $OQ = x + h$ übergehen; die zugehörige Ordinate $Qm$ schneidet die beiden Curven in den Punkten $m$ und $n$, und offenbar werden sich die Curven im Punkte $M$ um so inniger an einander anschmiegen, je kleiner der Abstand $mn$ ist für beliebig kleine Werthe von $h$. Gemäss dem Taylor'schen Lehrsatze hat man

$$Qm = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$Qn = F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \frac{h^3}{3!} F'''(x) + \dots,$$

in welchen Gleichungen $f(x) = F(x)$ die Ordinate des gemeinschaftlichen Punktes $M$ ist. Durch Subtraction ergibt sich hieraus, wenn man $Qm - Qn = mn = \varDelta$ setzt:

$$\varDelta = h[f'(x) - F'(x)] + \frac{h^2}{1.2}[f''(x) - F''(x)] + \frac{h^3}{3!}[f'''(x) - F'''(x)] + \dots$$

So lange nun $f'(x)$ von $F'(x)$ verschieden ist, findet im Punkte $M$ ein Durchschnitt beider Curven statt; denn bei dieser Voraussetzung haben die beiden Curven im Punkte $M$ verschiedene Neigung gegen die Abscissenaxe. $\varDelta$ ist in diesem Falle, weil von der 1$^{\text{ten}}$ Potenz von $h$ abhängig, ebenfalls eine kleine Grösse der 1$^{\text{ten}}$ Ordnung.

Sind aber für den Punkt $M$ die beiden Gleichungen

$$f(x) = F(x) \text{ und } f'(x) = F'(x)$$

erfüllt, so haben die beiden Curven im Punkte $M$ eine gemeinschaftliche Tangente oder sie berühren sich in diesem Punkte und man sagt in diesem Falle, es finde eine Berührung der ersten Ordnung statt. Für die Differenz $\varDelta$ hat man:

$$\varDelta = \frac{h^2}{1.2}[f''(x) - F''(x)] + \frac{h^3}{3!}[f'''(x) - F'''(x)] + \dots;$$

es ist daher $\varDelta$ in diesem Falle eine kleine Grösse der 2$^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn man $h$ als eine kleine Grösse der 1$^{\text{ten}}$ Ordnung betrachtet.

Bestehen für den Punkt $M$ die 3 Gleichungen

$$f(x) = F(x),\quad f'(x) = F'(x),\quad f''(x) = F''(x),$$

d. h. erhalten für den dem Punkte $M$ entsprechenden Werth von $x$ nicht nur die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ (die Ordinaten), sondern auch ihre Differenzialquotienten der 1ten und 2ten Ordnung einerlei Werth, so sagt man, die beiden Curven gehen eine Berührung der zweiten Ordnung ein. Die Differenz $\Delta$ wird in diesem Falle:

$$\Delta = \frac{h^3}{3!}\,[f'''(x) - F'''(x)] + \frac{h^4}{4!}\,[f''''(x) - F''''(x)] + \dots$$

also eine Grösse der 3ten Ordnung.

In diesem Sinne unterscheidet man die verschiedenen Ordnungen der Berührung.

Zwei Curven, deren Gleichungen $y = f(x)$ und $y = F(x)$ sind, gehen in einem Punkte, dessen Abscisse $= x$ ist, eine Berührung der $n^{ten}$ Ordnung ein, wenn für diesen Werth von $x$ nebst den beiden Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ auch noch ihre Differenzialquotienten von der 1ten bis einschliesslich zur $n^{ten}$ Ordnung einerlei Werth erhalten.

Aus dem Gesagten erhellt, dass der Abstand $\Delta$ immer kleiner wird, und demnach die Curven in der Nähe des Punktes $M$ sich immer mehr nähern oder inniger berühren, zu einer je höheren Ordnung sich die Berührung erhebt. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass wenn zwei Curven $y = f(x)$, $y = F(x)$, sich in einem Punkte nach der $n^{ten}$ Ordnung berühren, keine dritte Curve, $y = \varphi(x)$, verzeichnet werden kann, welche, während sie mit einer der beiden Curven, etwa $y = f(x)$ in einer Berührung von niedrigerer als der $n^{ten}$ Ordnung steht, doch ihr sich näher anschlösse, als die Curve $y = F(x)$. In der That, bezeichnet man wie oben mit $\Delta$ den Unterschied der zur Abscisse $x + h$ gehörigen Ordinaten der 1ten und 2ten Curve, so ist

$$\Delta = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,[f^{(n+1)}(x) - F^{(n+1)}(x)] + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!}\,[f^{(n+2)}(x) - F^{(n+2)}(x)] + \dots$$

Bedeutet ferner $\Delta'$ den analogen Unterschied für die 1te und 3te Curve, so wird der Ausdruck dieser Grösse, da der Voraussetzung zufolge die Berührung dieser beiden Curven nicht bis zur $n^{ten}$ Ordnung ansteigt, niedrigere Potenzen von $h$ enthalten, also von der Form sein:

$$\Delta' = \frac{h^r}{r!}\,[f^{(r)}(x) - \varphi^{(r)}(x)] + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\,[f^{(r+1)}(x) - \varphi^{(r+1)}(x)] + \dots$$

coo $r < n + 1$.

Man kann nun offenbar $h$ immer so klein wählen, dass $\varDelta' > \varDelta$ werde, so dass also die 3te Curve niemals zwischen den beiden anderen hindurchgehen kann.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass jede Berührung von gerader Ordnung mit einem Durchschnitte der Curven verbunden ist. Man erkennt dies aus dem obigen Ausdrucke von $\varDelta$, welche Grösse mit $h$ das Zeichen wechselt oder nicht, je nachdem $n$ (der Ordnungsexponent der Berührung) gerade oder ungerade ist.

**369.** In Bezug auf die soeben betrachteten Berührungen sind zweierlei Aufgaben möglich.

1. Es sind zwei Curven durch ihre Gleichungen $[y = f(x), y = F(x)]$ vollständig gegeben, man verlangt zu wissen, ob dieselben einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen und welche Ordnung der Berührung daselbst vorhanden sei. Zu diesem Behufe wird man untersuchen, wie viele Differenzialquotienten der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$, vom ersten angefangen, für einen aus der Gleichung $f(x) = F(x)$ gezogenen reellen Werth von $x$ (wenn überhaupt ein solcher, also ein gemeinschaftlicher Punkt existirt) einerlei Werth annehmen; die Anzahl derselben bestimmt die Ordnung der Berührung.

2. Es ist nur die eine Curve durch ihre Gleichung $y = f(x)$ vollständig gegeben; die andere aber nur ihrer Gattung nach, so dass die Abmessungen derselben und ihre Lage gegen die Coordinatenaxen noch unbestimmt sind, und ihre Gleichung $y = F(x)$ demnach noch eine Anzahl willkürlicher Parameter enthält; man soll nun die letztere Curve so bestimmen, dass sie mit der ersteren in einem gegebenen Punkte eine Berührung von bestimmter Ordnung eingehe. — Damit eine Berührung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung stattfinde, müssen für den Berührungspunkt die Bedingungsgleichungen, $(n + 1)$ an der Zahl:

$$f(x) = F(x);\; f'(x) = F'(x);\; f''(x) = F''(x);\; \ldots\; f^{(n)}(x) = F^{(n)}(x)$$

stattfinden, welche sofort zur Bestimmung der in der Gleichung $y = F(x)$ vorkommenden willkürlichen Constanten dienen. Hieraus folgt, dass — wenn $r$ die Anzahl dieser Constanten bedeutet — die Aufgabe unbestimmt ist, wenn $r > n + 1$; bestimmt, wenn $r = n + 1$; unmöglich (besondere Fälle ausgenommen), wenn $r < n + 1$. Eine Gerade kann daher im Allgemeinen mit einer Curve nur eine Berührung 1ter, ein Kreis nur eine solche 2ter Ordnung eingehen.

Beispiele. 1. Die gegebene Curve sei $y = f(x)$; die Gerade $\eta = a\xi + b$ soll diese Curve im Punkte $x$, $y$ nach der 1ten Ordnung berühren, also eine Tangente werden. In diesem Falle ist $F(x) = ax + b$,

$F'(x) = a$; man hat daher die beiden Bedingungsgleichungen: $f(x) = ax + b$, $f'(x) = a$; substituirt man die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe von $a$ und $b$ in die Gleichung $y = ax + b$, so folgt: $\eta - f(x) = f'(x)(\xi - x)$, oder

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

als Gl. der Tangente am Punkte $x$, $y$ der Curve.

2. Die allgemeine Gleichung des Kreises enthält drei willkürliche Constanten, daher kann man einen Kreis mit der gegebenen Curve in eine Berührung der $1^{ten}$ und $2^{ten}$ Ordnung bringen. Es seien:

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \varrho^2 \tag{1}$$

die Gl. des Kreises, $y = f(x)$ jene der gegebenen Curve; $x$, $y$ die Coordinaten des Berührungspunktes. Eine zweimalige Differenziation der Gl. (1) ergibt:

$$(\xi - \alpha) + (\eta - \beta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \tag{2}$$

$$1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + (\eta - \beta)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0. \tag{3}$$

Soll nun eine Berührung der $1^{ten}$ Ordnung eintreten, so muss für $\xi = x$, auch $\eta = y$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ werden, womit durch Substitution in (1) und (2) sich folgende zwei Bedingungsgleichungen ergeben:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2, \tag{4}$$

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{5}$$

Aus diesen bestimmen sich nun zwei von den drei Constanten, etwa $\alpha$ und $\beta$; die dritte, der Halbmesser, bleibt dann willkürlich. Es gibt daher unzählige Kreise, welche die Curve im Punkte $x$, $y$ nach der $1^{ten}$ Ordnung berühren; ihre Mittelpunkte liegen sämmtlich auf der zum Punkte $x$, $y$ gehörigen Normale der Curve; denn Gl. (5) ist, wenn man $\alpha$ und $\beta$ der Unbestimmtheit von $\varrho$ wegen, als veränderliche Coordinaten ansieht, offenbar die Gleichung des geometrischen Ortes dieser Mittelpunkte und mit der Gl. der Normale der Curve im Punkte $x$, $y$ identisch. [Gl. (5), §. 358].

Soll aber der Kreis mit der Curve eine Berührung der $2^{ten}$ Ordnung eingehen, so tritt in Folge der Bedingung: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ zu den Gleichungen (4) und (5) noch folgende hinzu:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{6}$$

und durch die Gleichungen (4), (5) und (6) sind sofort die 3 Grössen $\alpha, \beta, \varrho$, also Mittelpunkt und Halbmesser des Berührungskreises der $2^{\text{ten}}$ Ordnung oder des sogenannten osculatorischen Kreises*), vollkommen bestimmt. Man erhält ohne Mühe:

$$\beta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \alpha - x = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{7}$$

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{8}$$

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass auch der Mittelpunkt dieses Kreises auf der dem Berührungspunkte entsprechenden Normale der Curve liegt, und der Halbmesser demnach mit dieser Normale zusammenfällt. Man sieht nun leicht ein, dass es im Allgemeinen unmöglich ist, einen Kreis anzugeben, dessen Berührung mit der Curve von höherer Ordnung wäre, als der zweiten; denn hiezu würde erfordert, dass die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\varrho$ auch noch den folgenden Gleichungen $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\eta}{d\xi^3}$, u. s. w. Genüge leisteten, was nur in einzelnen Fällen, nämlich für besondere Punkte gewisser Curven stattfinden kann.

## III. Krümmung der ebenen Curven. — Krümmungskreis und Krümmungshalbmesser. — Evoluten.

**370.** Unter allen Curven ist bekanntlich der Kreis die einzige, welche in allen Punkten gleiche Krümmung besitzt, während bei allen übrigen Curven die Krümmung von einem Punkte zum nächsten sich ändert.

Die Krümmung des Kreises ist offenbar um so grösser, je kleiner sein Halbmesser $r$ ist; man betrachtet daher das Verhältniss $\frac{1}{r}$ als das Maass der Krümmung des Kreises. Man kann diesem Verhältnisse

*) Oskulatorische Curve heisst überhaupt jede Curve, die sich mit einer anderen Curve in Berührung der höchsten Ordnung befindet, welche sie mit letzterer Curve in einem gegebenen Punkte einzugehen vermag.

auch noch einen anderen Ausdruck geben. Sei (Fig. 32) $A$ irgend ein fester, $M$ ein beliebiger Punkt des Kreises, $MT$ die Tangente an diesem Punkte, welche mit der $x$-Axe den Winkel $\tau$ einschliesst, der Bogen $AM = s$; geht man von diesem Punkte zu einem benachbarten $M'$ über, und setzt den Winkel, welchen die Tangente $M'T'$ mit der $x$-Axe bildet, $= \tau'$, ferner $MM' = \Delta s$, $\tau' - \tau = \Delta\tau$, so ist $TNT' = MCM' = \Delta\tau$, und $\Delta s = r.\Delta\tau$; hiemit ergibt sich für die Krümmung des Kreises der Ausdruck:

$$\frac{1}{r} = \pm\frac{\Delta\tau}{\Delta s}, \tag{1}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem einer Zunahme des Bogens $s$ eine Zu- oder Abnahme des Neigungswinkels der Tangente gegen die $x$-Axe entspricht, da die Krümmung oder die Grösse $\frac{1}{r}$ nothwendig positiv ist.

Diese Betrachtung lässt sich nun leicht auf eine beliebige Curve ausdehnen. In der That, fassen wir irgend ein bestimmtes Bogenstück derselben $MM' = \Delta s$ ins Auge, so ist die Krümmung desselben offenbar um so grösser, je grösser der von den an den Endpunkten des Bogenstückes gezogenen Tangenten oder Normalen eingeschlossene Winkel $\Delta\tau$ ist, je grösser also das Verhältniss $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ ist. Nun ist aber der Werth dieses Verhältnisses veränderlich, weil die Curve an verschiedenen Stellen verschiedene Krümmung hat, und hängt überdiess von der Länge des Bogenstückes $\Delta s$ ab. Lassen wir aber $\Delta s$ unendlich abnehmen, so wird sich das Verhältniss $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ einer bestimmten und endlichen Grenze $\frac{d\tau}{ds}$ unendlich nähern, und diese Grenze $\frac{d\tau}{ds}$ wird demnach als das Maass der Krümmung des Bogenelementes $ds$, d. h. der Curve selbst im Endpunkte des Bogens $s$ anzusehen sein.

Es seien nun (Fig. 33) $M$, $M'$ zwei benachbarte Punkte der Curve $y = f(x)$; $x$, $y$ und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ ihre Coordinaten, und $MC$, $M'C$ die Normalen, welche sich im Punkte $C$ schneiden. Der Winkel $MM'C$ hat, sobald wir $MM'$ unendlich klein werden lassen, den rechten Winkel zur Grenze; setzen wir also $MM'C = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine mit $\Delta x$ verschwindende Grösse, $MC = r$, $MCM' = \Delta\tau$, so folgt aus dem Dreiecke $MM'C$, da $MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ist, $MC : MM' = \sin MM'C : \sin MCM'$, d. i.:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \Delta\tau}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}.$$

Lassen wir nun $\Delta x$ unendlich klein werden, wodurch $M$ und $M'$, somit auch die beiden Normalen $MC$ und $M'C$ sich unendlich nähern und bezeichnen mit $\varrho$ die Grenze, gegen welche der Abstand $r$ des Durchschnittspunktes der beiden Normalen vom Punkte $M$ convergirt, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d\tau}{ds}. \tag{2}$$

Hieraus erhellt offenbar, dass $\varrho$ der Halbmesser eines Kreises ist, dessen Krümmung jener der Curve im Punkte $M$ gleich ist. Dieser Kreis wird der Krümmungskreis der Curve genannt, weil er die Krümmung der Curve im Punkte $M$ misst; sein Halbmesser $\varrho$ heisst der Krümmungshalbmesser der Curve im Punkte $M$, und wird auf der Normale der Curve auf der concaven Seite derselben vom Punkte $M$ aus aufgetragen; der Endpunkt des so aufgetragenen Halbmessers heisst der Krümmungsmittelpunkt der Curve im Punkte $M$ und kann nach Obigem als der Durchschnitt zweier unendlich naher Normalen der Curve betrachtet werden.

Der Krümmungskreis berührt die Curve im Punkte $M$, weil sein Mittelpunkt auf der diesem Punkte entsprechenden Normale liegt; und zwar ist diese Berührung von der 2ten Ordnung. Man wird diess schon aus dem Umstande schliessen, dass bekanntlich der Berührungskreis der 2ten Ordnung unter allen Kreisen sich der Curve am innigsten anschliesst, daher dessen Krümmung der Krümmung der Curve im Berührungspunkte am nächsten kommen wird. Diess ergibt sich übrigens auch aus Gl. (2). Diese Gleichung bietet für den Halbmesser des Krümmungskreises den Ausdruck:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{d\tau} \tag{3}$$

dar, wo bekanntlich $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, und $d\tau$ der unendlich kleine Winkel ist, welchen die zwei zu den Endpunkten des Bogenelementes $ds$ gehörigen Normalen oder Tangenten einschliessen, welcher Winkel Contingenzwinkel genannt wird. Nun ist bekanntlich [Gl. (1), §. 358], wenn wir der Kürze halber die Differenzialquotienten von $y$ nach $x$ genommen mit $y'$, $y''$, u. s. w. bezeichnen:

$$\operatorname{tg} \tau = y', \quad \text{somit } \tau = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y';$$

hieraus folgt: $d\tau = \frac{dy'}{1+y'^2}$, d. i. wenn wir $x$ als unabhängig Veränderliche betrachten:

$$d\tau = \frac{y''dx}{1+y'^2}.$$

Durch Einführung dieses Werthes und jenes von $ds = dx\sqrt{1+y'^2}$ in die Gl. (3) erhält man für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck:

$$\varrho = \pm \frac{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}, \tag{4}$$

welcher mit jenem des Halbmessers des Berührungskreises der zweiten Ordnung [§. 369, Gl. (8)] übereinstimmt.

Für die Coordinaten ($\alpha$, $\beta$) des Krümmungsmittelpunktes haben wir daher auch die a. a. O. gefundenen Ausdrücke:

$$\alpha = x - \frac{[1+y'^2]y'}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{5}$$

Dabei ist zu bemerken, dass in den Gl. (4) und (5) die Coordinaten $x$, $y$ auf den Berührungspunkt sich beziehen, somit unter $y'$ und $y''$ diejenigen Werthe zu verstehen sind, welche die aus der Gleichung der Curve gezogenen Differenzialquotienten für die Coordinaten dieses Punktes annehmen.

Die Länge $N$ der zu dem Punkte $x$, $y$ der Curve gehörigen Normale wird bekanntlich durch die Formel $N = y\sqrt{1+y'^2}$ ausgedrückt [§. 359]; man findet hieraus $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{N^3}{y^3}$ und erhält durch Einführung dieses Werthes in die Gl. (4) noch folgenden einfachen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \pm \frac{N^3}{y^3 y''}. \tag{6}$$

**371.** Bestimmen wir die Grösse des Krümmungshalbmessers für einige der vorzüglichsten Curven.

1. Die Scheitelgleichung der Kegelschnittslinien ist bekanntlich:

$$y^2 = px + qx^2,$$

und zwar bedeutet dieselbe eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $q$ Null, negativ oder positiv ist. Hieraus folgt durch zweimalige Differenziation:

$$2yy' = p + 2qx, \quad yy'' + y'^2 = q,$$

d. i. $yy'' = q - \frac{(p + 2qx)}{4y^2}$, und hieraus $y^3y'' = -(\frac{1}{2}p)^2$;

dieser Werth in (6) substituirt gibt:

$$\varrho = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser in irgend einem Punkte eines Kegelschnittes ist also gleich dem Cubus der Normale in diesem Punkte dividirt durch das Quadrat des halben Parameters. Setzt man für $N$ den Werth:

$$N = y\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{y^2(1 + q) + (\frac{1}{2}p)^2},$$

so hat man:

$$\varrho = \frac{[y^2(1 + q) + (\frac{1}{2}p)^2]^{\frac{3}{2}}}{(\frac{1}{2}p)^2} = \frac{[(px + qx^2)(1 + q) + (\frac{1}{2}p)^2]^{\frac{3}{2}}}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

Für $x = 0$ folgt hieraus $\varrho = \frac{1}{2}p$; der Krümmungshalbmesser am Scheitel der Curve ist also bei allen drei Kegelschnittslinien dem halben Parameter gleich.

Setzt man in der letzten Gleichung $q = 0$, so hat man insbesondere für die Parabel:

$$\varrho = \frac{[px + (\frac{1}{2}p)^2]^{\frac{3}{2}}}{(\frac{1}{2}p)^2} = \frac{p}{2}\left\{1 + \frac{4x}{p}\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

2. Für die Ellipse oder Hyperbel besteht die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

hieraus folgt:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad y^2y'^2 = \frac{b^4x^2}{a^4},$$

$$yy'' = \mp\frac{b^2}{a^2} - y'^2, \quad y^3y'' = -\frac{b^4}{a^2};$$

hiemit wird:

$$\varrho = \frac{a^2N^3}{b^4},$$

welcher Ausdruck mit dem oben gefundenen übereinstimmt, wenn man den Werth des Parameters $p = \frac{2b^2}{a}$ einführt; setzt man aber für die Normale $N$ den Werth: $N = \sqrt{y^2 + y^2y'^2} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$, so kommt:

$$\varrho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Hieraus folgt für die Ellipse der Krümmungshalbmesser in den Endpunkten der grossen Axe $\varrho = \frac{b^2}{a}$, und in den Endpunkten der kleinen Axe $\varrho = \frac{a^2}{b}$.

3. Die Gleichungen der Cycloide sind:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi);$$

hieraus folgt $y' = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad y'' = -\frac{a}{y^2}$,
$y''y^3 = -ay = -\frac{1}{2}N^2$ [§. 360]; hiemit erhält man:

$$\varrho = 2N = 2\sqrt{2ay}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist daher in der Cycloide gleich der doppelten Länge der Normale. Für den Scheitel der Curve, wo $y = 2a$, wird $\varrho = 4a$, gleich dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises.

**372.** Die in §. 370 gegebenen Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes setzen die Abscisse $x$ als unabhängig Veränderliche voraus. Man kann leicht Ausdrücke herstellen, welche von dieser Voraussetzung frei sind, entweder durch Anwendung der in §. 332 vorgetragenen Sätze auf die bereits entwickelten Ausdrücke, oder einfacher durch unmittelbare Ableitung auf dem in §. 369 betretenen Wege, indem wir jetzt $x$ und $y$ als von irgend einer dritten Veränderlichen abhängig betrachten. Unter dieser Voraussetzung erhält man durch zweimalige Differenziation der Gleichung:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho:$$
$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + (x - \alpha)\,d^2x + (y - \beta)\,d^2y = 0,$$

und zieht aus diesen drei Gleichungen folgende Ausdrücke des Halbmessers und Mittelpunktes des Krümmungskreises:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = x - \frac{ds^2\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\ \beta &= y + \frac{(dx^2 + dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = y + \frac{ds^2\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\ \varrho &= \pm\frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese Ausdrücke gelten zugleich unmittelbar für den Fall, wenn man den Bogen $s$ als unabhängig Veränderliche wählt; unter dieser Voraussetzung können dieselben jedoch noch folgendermaassen transformirt werden. Differenzirt man nämlich die Gl. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, indem man $ds$ als constant betrachtet, so erhält man $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, oder $\frac{d^2y}{dx} = -\frac{d^2x}{dy}$, welche Gleichung man auf folgende Formen bringen kann:

$$\frac{dx\,d^2y}{dx^2} = -\frac{dy\,d^2x}{dy^2} \text{ und } \frac{(d^2y)^2}{dx^2} = \frac{(d^2x)^2}{dy^2}.$$

Wendet man auf diese Gleichungen den bekannten Satz:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

an, so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx} = -\frac{d^2x}{dy} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^2},$$

und
$$\frac{(d^2y)^2}{dx^2} = \frac{(d^2x)^2}{dy^2} = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}{ds^2},$$

folglich:

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^2} = \pm \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}}{ds},$$

und durch Einführung dieses Werthes in die Formeln (1), erhält man namentlich für den Krümmungshalbmesser folgenden Ausdruck:

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}}. \tag{2}$$

Ist die Gleichung der Curve in unentwickelter Form: $F(x, y) = 0$ gegeben, so hat man durch zweimalige Differenziation derselben, $x$ als unabhängig Veränderliche betrachtend [§. 328]:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

zieht man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\frac{dy}{dx} = y'$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ und substituirt dieselben in Gl. (4), §. 370, so kommt:

$$\varrho = \pm \frac{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 - 2\,\frac{d^2F}{dy\,dx}\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2}. \quad (3)$$

**373.** Der Ausdruck des Krümmungshalbmessers in Polarcoordinaten ergibt sich am einfachsten, wenn man von der Gleichung $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$ ausgeht, in welcher bekanntlich $ds$ das Differenzial des Bogens und $\tau$ den Winkel bedeutet, welchen die Tangente an der Curve mit der Abscissenaxe einschliesst, welche Axe nunmehr als Polaraxe angenommen wird. Bezeichnet man mit $r$, $\theta$ die Coordinaten des Berührungspunktes, so hat man [Gl. (2), §. 364]:

$$\operatorname{cotg}(\tau - \theta) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}.$$

Differenzirt man diese Gleichung und betrachtet hiebei $\theta$ als unabhängig Variable, so kommt:

$$-\frac{\frac{d\tau}{d\theta} - 1}{\sin(\tau - \theta)^2} = -\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

Hieraus findet man, weil bekanntlich $\sin(\tau - \theta)^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}(\tau - \theta)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ ist:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2};$$

da nun [§. 367] $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = r\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$, so erhält man durch Division dieser beiden Gleichungen:

$$\varrho = \frac{r\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Betrachten wir beispielsweise die logarithmische Spirale, deren

Gleichung die Form $r = e^{m\theta}$ hat. Man zieht hieraus $\frac{dr}{d\theta} = me^{m\theta} = mr$ $\frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2e^{m\theta} = m^2r$; hiemit wird:

$$\varrho = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser steht daher zum Radiusvektor in einem constanten Verhältniss. Zieht man (Fig. 34) die Normale $MN$, und $OC$ senkrecht auf $MO$, so ist bekanntlich $MC$ die Polarnormale $= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ [§. 365] $= r\sqrt{1 + m^2} = \varrho$; der Krümmungshalbmesser ist daher der Polarnormale gleich, deren Endpunkt $C$ somit den Krümmungsmittelpunkt der Curve im Punkte $M$ bildet. Die Polarcoordinaten dieses Punktes sind:

$$OC = \sqrt{\varrho^2 - r^2} = mr \text{ und } \angle\, COT = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

**374.** Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Curve; der Krümmungshalbmesser $\varrho$, so wie die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes $\alpha$, $\beta$, welche einem bestimmten Punkte $(x, y)$ der Curve entsprechen, bestimmen sich bekanntlich aus den Gleichungen:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2 \tag{1}$$

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = 0 \tag{2}$$

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\,d^2y = 0, \tag{3}$$

welche für $\alpha$ und $\beta$ die Werthe:

$$\alpha = x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \tag{4}$$

darbieten; man erhält diese Ausdrücke als Funktion von $x$, wenn man für $y$, $y'$ und $y''$ die aus der Gleichung der Curve folgenden Werthe einführt. Aendert sich die Lage des Punktes $(x, y)$ auf der gegebenen Curve, so ändert sich auch der Ort des Krümmungsmittelpunktes, und die sämmtlichen Krümmungsmittelpunkte der Curve werden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine neue Curve bilden, deren Gleichung sich offenbar ergibt, wenn man aus den Gleichungen (4) $x$ eliminirt, d. h. jene Grösse, durch welche ein bestimmter Punkt der gegebenen Curve partikularisirt wird. Denn das Resultat dieser Elimination wird eine Gleichung sein zwischen $\alpha$ und $\beta$, etwa $F(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$, welche durch die Coordinaten eines jeden Krümmungsmittelpunktes der gegebenen Curve erfüllt wird und deren geometrischer Ort daher eben die in Rede stehende Mittelpunktscurve sein wird. Man nennt

diese Curve nach Huygens die Evolute der gegebenen Curve, welche letztere in Bezug auf jene Evolvente heisst.

Da die Gleichung der Evolute durch Elimination von $x$ aus den Gleichungen (4) oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus den Gleichungen (1), (2) und (3) hervorgeht, so können letztere selbst als die Gleichungen der Evolute betrachtet werden, wenn man nur $\alpha$, $\beta$ und $\varrho$ als Veränderliche und als Funktionen von $x$ behandelt. Aus diesem Grunde müssen daher auch die Differenzialien dieser Gleichungen der Evolute angehören. Differenzirt man nun die Gl. (1) in Bezug auf alle darin vorkommenden Grössen, und lässt jene Glieder weg, welche vermöge der Gl. (2) verschwinden, so kommt:

$$(x - \alpha)\, d\alpha + (y - \beta)\, d\beta = - \varrho d\varrho; \tag{5}$$

die Gl. (2) differenzirt, gibt mit Auslassung jener Glieder, welche in Folge der Gl. (3) gleich Null werden:

$$d\alpha\, dx + d\beta\, dy = 0. \tag{6}$$

Diese letzte Gleichung, welche man auch auf die Form

$$\frac{dy}{dx} : \frac{d\beta}{d\alpha} + 1 = 0 \tag{7}$$

bringen kann, drückt aus, dass die an den Punkt $(x, y)$ der gegebenen Curve und an den correspondirenden Punkt $(\alpha, \beta)$ der Evolute gezogenen Tangenten auf einander senkrecht stehen. Die Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve, welche mit den Normalen zusammenfallen, berühren daher die Evolute. In der That ist die Gl. (2):

$$y - \beta = - \frac{dx}{dy}(x - \alpha)$$

die Gleichung der Normale im Punkte $(x, y)$ der gegebenen Curve und verwandelt sich mit Hülfe der Gl. (7) in

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha)$$

d. i. die Gl. der Tangente im Punkte $(\alpha, \beta)$ der Evolute.

Substituirt man diesen letzten Werth von $y - \beta$ in die Gleichungen (1) und (5) und eliminirt dann $(x - \alpha)$, so folgt

$$d\varrho^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Bezeichnet man aber die Länge des von einem beliebigen festen Punkte bis zum Punkte $(\alpha, \beta)$ gezählten Bogens der Evolute mit $\sigma$, so ist $d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$, somit $d\sigma = d\varrho$. Zwei Grössen, deren Differenzialien gleich sind, können aber nur um eine constante Grösse von einander verschieden sein; bezeichnet man diese mit $c$, so folgt aus

der letzten Gleichung $\sigma = \varrho + c$. Für einen andern Punkt $(\alpha', \beta')$ der Evolute wird man aus gleichem Grunde haben: $\sigma' = \varrho' + c$; folglich ist $\sigma' - \sigma = \varrho' - \varrho$. Diese Gleichung lehrt, dass die Länge eines beliebigen Bogenstückes der Evolute gleich ist dem Unterschiede der beiden Krümmungshalbmesser der Evolvente, welche die Evolute in den Endpunkten des besagten Bogenstückes berühren.

Diess vorausgesetzt, sei $AB$ (Fig. 35) die gegebene Curve, $CD$ deren Evolute; $Mm$ der Krümmungshalbmesser der Curve $AB$ im Punkte $M$, welcher die Evolute in $m$ berührt. Denkt man sich nun im Punkte $m$ einen Faden von der Länge des Krümmungshalbmessers befestigt, dessen Endpunkt daher mit dem Punkte $M$ der Curve zusammenfällt, und diesen Faden — während er beständig gespannt erhalten wird — auf das Stück $mm'$ der Evolute aufgewickelt, so kommt der Endpunkt des Fadens nach $M'$; der freie Theil $m'M'$ derselben berührt die Evolute im Punkte $m'$; die Länge $m'M'$ ist offenbar gleich dem Krümmungshalbmesser der Curve im Punkte $M'$, weil in Folge der Aufwickelung des Fadens die Differenz $Mm - M'm'$ dem Bogenstücke $mm'$ der Evolute gleich ist; daher ist $M'$ wieder ein Punkt der gegebenen Curve. Hieraus erhellt dass, während der Faden sich auf der Evolute auf- oder abwickelt, der Endpunkt desselben die Curve $AB$, d. i. die Evolvente beschreibt.

Jede ebene Curve hat eine in ihrer Ebene liegende Evolute und kann nur eine einzige haben; jeder Evolute hingegen entsprechen unendlich viele ihrer Natur nach verschiedene Evolventen, welche von den verschiedenen Punkten des geradlinigen Theiles des Fadens, den man sich beliebig verlängert denken kann, beschrieben werden.

Man wird ohne Mühe die Analogie bemerken, welche zwischen der Beschreibung eines Kreises und jener der ebenen Curven durch ihre Evolute stattfindet; jeder Punkt der Evolute vertritt nach und nach die Stelle eines Mittelpunktes und der Halbmesser ändert sich von einem Punkte der Curve zum andern.

**375.** Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung der eben vorgetragenen Theorie dienen.

1. Betrachten wir die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist (Fig. 36). Man findet hieraus $y' = \frac{p}{2y}$, $y'' = -\frac{p^2}{4y^3}$, und erhält durch Substitution dieser Werthe in die Gl. (4) des vorigen §. für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes folgende Ausdrücke:

$$\alpha = 3x + \tfrac{1}{2}p, \quad \beta = -\frac{4xy}{p},$$

aus welchen durch Elimination von $x$ die Gleichung der Evolute:

$$\beta^2 = \frac{16}{27p}(\alpha - \tfrac{1}{2}p)^3$$

sich ergibt. Man erkennt aus dieser Gleichung, dass diese Curve aus zwei zu beiden Seiten der Abscissenaxe symmetrisch liegenden Aesten $AU$, $AU'$ besteht, welche von einem Punkte $A$ der genannten Axe aus, dessen Abstand vom Ursprung dem halben Parameter gleich ist, nach der Richtung der positiven $x$ ins Unendliche sich erstrecken. Verlegt man den Ursprung nach $A$, und schreibt zu diesem Ende $\alpha + \frac{1}{2}p$ statt $\alpha$ in obiger Gleichung, so erhält sie die einfachere Form:

$$\beta^2 = \frac{16}{27p}\alpha^3.$$

Diese Curve führt auch den Namen cubische oder Neil'sche Parabel, weil der Geometer Neil sie zuerst untersucht hat. Durch Abwickelung des Fadens von dem Aste $AU'$ der Evolute wird der Zweig $OV$ der Parabel beschrieben, wobei der Faden über den Scheitel $A$ der Evolute noch um das Stück $AO = \frac{1}{2}p$ in der Richtung der ersten Tangente $OX$ der Evolute hinausragen muss, damit sein Endpunkt die Appolonische Parabel $OV$ beschreibe. Würde man einen anderen zwischen $O$ und $A$ oder jenseits von $O$ liegenden Punkt des Fadens als beschreibenden Punkt wählen, so würde die erzeugte Evolvente nicht mehr die Appolonische Parabel, sondern irgend eine andere Curve sein.

2. Für die Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, erhält man als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4}, \quad \beta = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}.$$

Die aus diesen Gleichungen gezogenen Werthe von $x$ und $y$ geben in die Gleichung der Ellipse substituirt:

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der Evolute der Ellipse. Aus der Discussion dieser Gleichung erhellt ohne Schwierigkeit, dass die Evolute der Ellipse eine geschlossene Curve $aa'bb'$ (Fig. 37) ist, welche von den Coordinatenaxen in vier congruente Theile getheilt und in den Punkten $a$, $a'$, $b$, $b'$ berührt wird.

Für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ findet man:

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der Evolute (Fig. 38), welche ebenfalls aus vier congruenten und gegen die Axen symmetrisch liegenden Theilen besteht.

3. Betrachten wir eine durch die Gleichung

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

dargestellte Cycloide, wo bekanntlich $a$ den Halbmesser des Erzeugungskreises bezeichnet. Wir erhalten durch zweimalige Differenziation dieser Gleichung:

$$y' = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad y'' = -\frac{a}{y^2},$$

womit sich die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}, \quad \beta = -y$$

ergeben. Durch Substitution der aus diesen Gleichungen folgenden Werthe: $y = -\beta$, $x = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}$ in obige Gleichung der Cycloide erhalten wir als Gleichung der Evolute:

$$\alpha = a \text{ arc cos } \frac{a + \beta}{a} + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Um diese Gleichung, welche offenbar wieder einer Cycloide angehört, auf die einfachste Form zu bringen, beziehen wir dieselbe auf ein neues Coordinatensystem $(\alpha', \beta')$, dessen Abscissen-Axe $JX'$ (Fig. 39) in dem Abstande $DJ = -2a$ parallel zur ursprünglichen $OD$ angenommen wird, und dessen Ursprung der Punkt $J$ sein soll, in welchem die neue Abscissen-Axe von der Axe der Cycloide geschnitten wird. Zählen wir dann die Ordinaten $(\beta')$ in der Richtung $JD$, die Abscissen $(\alpha')$ in der Richtung $JX'$, so haben wir in der letzten Gleichung

$$\alpha = a\pi - \alpha', \quad \beta = -2a + \beta'$$

zu setzen und erhalten somit

$$a\pi - \alpha' = a \text{ arc cos } \frac{-a + \beta'}{a} + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}$$

oder:

$$-\alpha' = a\left[\text{arc cos } \frac{-a + \beta'}{a} - \pi\right] + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

d. i., weil bekanntlich $\text{arc cos }(-u) + \text{arc cos } u = \pi$ ist:

$$\alpha' = a \arc \cos \frac{a - \beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung der gegebenen Cycloide; die Evolute der Cycloide ist daher wieder eine mit der gegebenen congruente Cycloide.

4. Für die logarithmische Spirale: $r = e^{m\theta}$ haben wir [§. 373] als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes gefunden: $R = mr$, $\Theta = \theta + \frac{\pi}{2}$; durch Verbindung dieser Gleichungen mit jener der Spirale erhält man als Gleichung der Evolute:

$$R = me^{m(\Theta - \frac{1}{2}\pi)},$$

oder, wenn man $e^{lm}$ statt $m$ schreibt:

$$R = e^{m\left(\Theta - \frac{1}{2}\pi + \frac{lm}{m}\right)}.$$

Diess ist abermals eine logarithmische Spirale, congruent mit der gegebenen, nur gegen diese um einen Winkel $= \frac{1}{2}\pi - \frac{lm}{m}$ um den Pol gedreht.

## IV. Von den einhüllenden Curven.

**376.** Es sei

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer ebenen Curve und $\alpha$ eine in derselben erscheinende willkürliche Constante. Ertheilt man dieser Constanten der Reihe nach verschiedene Werthe, so geht aus der Gleichung (1) ein System gleichartiger Curven hervor, von welchen im Allgemeinen jede die folgende schneiden wird, und es ist einleuchtend, dass, wenn man $\alpha$ stetig sich ändern lässt, die Durchschnittspunkte je zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Curven eine neue Curve bilden werden, welche die einhüllende Curve oder Umhüllungslinie der aus (1) durch Veränderung von $\alpha$ entstehenden Curven genannt wird, welche letzteren beziehungsweise die eingehüllten Curven heissen. Es bietet sich nun die Aufgabe dar, die Gleichung der einhüllenden Curve zu suchen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke zwei aufeinanderfolgende, den Werthen $\alpha$ und $\alpha + h$ entsprechende Lagen der Curve (1), so ergeben sich die Coordinaten des Durchschnittspunktes derselben durch Verbindung der Gleichungen:

$$F(x, y; \alpha) = 0,$$

$$F(x, y, \alpha + h) = 0 = F(x, y, \alpha) + h\frac{dF}{d\alpha} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2F}{d\alpha^2} + \ldots,$$

an deren Stelle wir auch die folgenden:

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} + \frac{h}{2}\frac{d^2F}{d\alpha^2} + \ldots = 0$$

setzen können. Diese Gleichungen verwandeln sich, wenn wir $h$ unendlich klein werden lassen, in folgende:

$$F(x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0, \tag{2}$$

in welchen, wenn sie als coexistirend betrachtet werden, $x$ und $y$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier irgend einem Werthe von $\alpha$ entsprechenden, unendlich nahe aufeinanderfolgenden eingehüllten Curven bedeuten. Eliminiren wir nun $\alpha$ zwischen den Gleichungen (1) und (2), also diejenige Grösse, durch welche ein bestimmter Durchschnittspunkt partikularisirt wird, so erhalten wir eine Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{3}$$

zwischen $x$ und $y$, welcher die Coordinaten aller Durchschnittspunkte Genüge leisten müssen, welche demnach die gesuchte Gleichung des geometrischen Ortes dieser Durchschnittspunkte, d. i. der einhüllenden Curve sein wird.

Die einhüllende Curve hat die Eigenschaft, dass sie die eingehüllten Curven berührt, und in Folge dessen umschliesst oder einhüllt, woher sie den Namen führt. Es folgt diess schon aus der Entstehungsweise dieser Curve, man kann sich jedoch hievon leicht überzeugen. In der That ist die Gl. (3) der einhüllenden Curve keine andere, als die Gl. (1), wenn man darin für $\alpha$ seinen aus (2) folgenden Werth in Funktion von $x$, $y$ setzt. Man kann daher auch (1) als die Gl. der einhüllenden Curve nehmen, wenn man $\alpha$ als eine von $x$, $y$ abhängige Veränderliche betrachtet, welche der Gl. (2) Genüge leistet. Differenzirt man in dieser Voraussetzung die Gl. (1) nach $x$, so erhält man, da $y$ selbst eine Funktion von $x$ ist:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 1,$$

oder, weil der in diese Gleichung zu substituirende Werth von $\alpha$ der Gl. (2) Genüge leisten soll:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus sich $\frac{dy}{dx}$, d. i. die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der berührenden Geraden der einhüllenden Curve ergibt. Differenzirt man aber die Gl. (1) der eingehüllten Curve, wobei also $\alpha$ als constant betrachtet werden muss, so kommt

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0;$$

beide Gleichungen sind identisch und bieten also für $\frac{dy}{dx}$ dieselben Werthe dar, wenn für $x$ und $y$ die Coordinaten des beiden Curven (1) und (3) gemeinschaftlichen Punktes substituirt werden, zum Beweise, dass in diesem Punkte beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente haben, und sich folglich berühren.

**377.** Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dieser allgemeinen Betrachtung dienen.

1. Der Mittelpunkt eines Kreises von veränderlichem Halbmesser bewege sich auf der Axe der $x$ so, dass das Quadrat seines Halbmessers immer dem Rechtecke aus der Abscisse $\alpha$ seines Mittelpunktes und einer constanten Länge $m$ gleich sei; man sucht die Gleichung der alle diese Kreise einhüllenden Curve.

Die Gleichung des beweglichen Kreises in irgend einer seiner Lagen ist den Bedingungen der Aufgabe zufolge:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = m\alpha;$$

hieraus folgt durch Differenziation nach $\alpha$:

$$-2\,(x - \alpha) = m, \quad \text{oder} \quad \alpha = x + \tfrac{1}{2}\,m,$$

somit als Gleichung der einhüllenden Curve:

$$y^2 = mx + \tfrac{1}{4}\,m^2,$$

welche demnach eine Parabel ist.

2. Eine gerade Linie bewege sich so, dass sie mit zweien einen gegebenen Winkel $\lambda$ einschliessenden Geraden Dreiecke bilde, die einen constanten Flächeninhalt $= f$ haben. Man sucht die einhüllende Curve dieser Geraden.

Nimmt man die Schenkel des Winkels $\lambda$ zu Coordinaten-Axen und bezeichnet die Stücke, welche die bewegliche Gerade auf denselben abschneidet, mit $\alpha$ und $\beta$, so ist die Gleichung dieser Geraden:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

oder weil, der Bedingung der Aufgabe gemäss, $\alpha\beta \sin\lambda = 2f$ ist:

$$2f.x + \alpha^2 \sin\lambda . y = 2\alpha f.$$

Durch Elimination von $\alpha$ aus dieser Gleichung und ihrem nach $\alpha$ genommenen Differenzialquotienten:

$$\alpha y \sin\lambda = f$$

erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve:

$$yx = \frac{f}{2 \sin\lambda}.$$

Diese ist somit eine Hyperbel, welche die Schenkel des gegebenen Winkels zu Asymtoten hat.

3. Die Gleichung der parabolischen Bahn, welche ein aus dem Ursprunge der Coordinaten mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ unter einem Winkel $\alpha$ aufwärts geworfener Körper im leeren Raume beschreibt, ist:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2c^2 \cos\alpha^2},$$

wo $g$ die Accelleration der Schwere bedeutet. Man soll die einhüllende Curve der verschiedenen Bahnen finden, welche durch Aenderung des Elevationswinkels $\alpha$ entstehen.

Durch Differenziation der obigen Gleichung nach $\alpha$ erhält man: $gx \operatorname{tg} \alpha - c^2 = 0$, und $\alpha$ aus beiden Gleichungen eliminirend:

$$x^2 = \frac{c^2}{g^2}(c^2 - 2gy).$$

Die Umhüllungslinie ist daher wieder eine Parabel, deren Axe mit der Axe der $y$ zusammenfällt, und deren Scheitel in der Höhe $\frac{c^2}{2g}$ über dem Ursprunge liegt.

**378.** Jede Curve kann als Umhüllungslinie ihrer sämmtlichen Tangenten betrachtet werden; die einhüllende Curve sämmtlicher Normalen ist aber, wie leicht einzusehen, die Evolute der gegebenen Curve. In der That, sei $y = f(x)$ die Gleichung dieser Curve, und $\alpha$ die Abscisse irgend eines Punktes derselben; die Gleichungen der an diesen Punkt gezogenen Tangente und Normale sind beziehungsweise:

$$\eta - f(\alpha) - (\xi - \alpha) f'(\alpha) = 0, \ldots\ldots (m)$$

$$[\eta - f(\alpha)] f'(\alpha) + \xi - \alpha = 0, \ldots\ldots (n)$$

wo $\xi$, $\eta$ die laufenden Coordinaten dieser beiden Geraden bedeuten.

Differenzirt man nun die Gl. ($m$) der Tangente nach $\alpha$, so erhält man $\xi - \alpha = 0$, und wenn man zwischen dieser Gleichung und ($m$) die Grösse $\alpha$ eliminirt, als Gleichung der einhüllenden Curve sämmtlicher Tangenten: $\eta = f(\xi)$, d. i. die gegebene Curve.

Durch Differenziation der Gl. ($n$) der Normale in Bezug auf $\alpha$ ergibt sich:

$$[\eta - f(\alpha)]f''(\alpha) - [1 + f'(\alpha)^2] = 0 \ldots\ldots (p)$$

Die Gleichungen ($n$) und ($p$) können auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\eta - f(\alpha) = \frac{1 + f'(\alpha)^2}{f''(\alpha)}, \quad \xi - \alpha = -\frac{[1 + f'(\alpha)^2]f'(\alpha)}{f''(\alpha)}$$

und geben unmittelbar die Coordinaten $\xi$, $\eta$ des Durchschnittspunktes zweier nächster Normalen in Funktion von $\alpha$, also die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes der gegebenen Curve an jenem Punkte, dessen Abscisse $= \alpha$; die Elimination von $\alpha$ führt zur Gleichung der Evolute, als einhüllenden Curve sämmtlicher Normalen.

## V. Von den besonderen Punkten der ebenen Curven.

**379.** Unter besonderen Punkten einer Curve versteht man solche, in welchen dieselbe eine von der Lage gegen das Coordinatensystem unabhängige, besondere Eigenthümlichkeit darbietet, indem sie daselbst von der gewöhnlichen Form der einfachen Biegung abweicht. Die bemerkenswerthesten dieser Punkte sind die Beugungspunkte, die Rückkehrpunkte, die vielfachen und die conjugirten Punkte.

Bevor wir diese Punkte näher betrachten, wollen wir ein analytisches Merkmal aufsuchen, mit dessen Hülfe sich entscheiden lässt, ob eine Curve der Abscissenaxe ihre concave oder convexe Seite zukehrt.

Der Bogen $MM'$ kehrt der Abscissenaxe seine concave Seite zu, wenn seine Sehne zwischen dem Bogen und der Abscissenaxe liegt (Fig. 40, $a$); liegt jedoch der Bogen zwischen der Sehne und der Abscissenaxe (Fig. 40, $b$), so ist die Curve gegen diese Axe convex. Zieht man daher die in der Mitte zwischen $M$ und $M'$ liegende Ordinate $QN$, welche die Sehne in $R$ schneidet, so ist die Curve gegen die Abscissenaxe concav oder convex, je nachdem die Differenz $QN - QR$ positiv oder negativ ist.

Es sei nun $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, $OP = x$, $PQ = QP' = h$, so ist $PM = y = f(x)$ und vermöge des Taylor'schen Lehrsatzes:

$$QN = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + R,$$
$$P'M' = f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + R_1,$$
$$QR = \tfrac{1}{2}(PM + P'M') = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x) + \tfrac{1}{2}R_1,$$

wo $R$, $R_1$ die Reste der Reihen bezeichnen. Hiemit wird:

$$QN - QR = -\tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + (R - \tfrac{1}{2}R_1).$$

Es sind aber $R$ und $R_1$ Grössen der $3^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf $h$; man kann daher $h$ immer so klein wählen, dass das Zeichen des $2^{\text{ten}}$ Theiles der letzten Gleichung, somit auch das Zeichen der Differenz $QN - QR$ jenem des $2^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten $f''(x)$ entgegengesetzt ist. Die Curve wird daher in einem bestimmten Punkte gegen die Abscissenaxe concav oder convex sein, je nachdem $f''(x)$ für diesen Punkt negativ oder positiv ist. Dabei wurde vorausgesetzt, dass die in Betracht gezogene Stelle der Curve oberhalb der Abscissenaxe liege, also $y$ positiv sei; man überzeugt sich leicht, dass im entgegengesetzten Falle die eben ausgesprochene Regel sich umkehrt, so dass man dieselbe allgemein auf folgende Weise ausdrücken kann:

Eine Curve kehrt an einer bestimmten Stelle der Abscissenaxe ihre concave oder convexe Seite zu, je nachdem das Produkt $yf''(x) = y\dfrac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ist.

So ist für die Parabel $y^2 = px$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{p^2}{4y^3}$ und $y\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{p^2}{4y^2}$, also negativ für jeden Punkt der Curve; die Parabel kehrt also allenthalben der Abscissenaxe ihre concave Seite zu.

**380.** Wenn die Gerade, welche eine Curve in einem bestimmten Punkte berührt, in eben diesem Punkte die Curve dergestalt schneidet, dass die zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Punkte der Curve auf entgegengesetzten Seiten der Geraden sich befinden, so heisst dieser Berührungspunkt ein Beugungs- oder Inflexionspunkt. Ein solcher ist der Punkt $M$ (Fig. 41) der Curve $AMB$.

Betrachtet man die successiven Werthe, welche der Neigungswinkel der Tangente gegen die Abscissenaxe annimmt, wenn man den Berührungspunkt in der Nähe des Beugungspunktes auf der Curve fortrücken lässt, so erhellt sogleich, dass dieser Neigungswinkel im Beugungspunkte selbst ein Maximum oder Minimum erreicht, je nachdem der dem Inflexionspunkte vorausgehende Theil der Curve gegen die Abscissenaxe convex oder concav ist. Da nun die trigonometrische Tangente des besagten Neigungswinkels durch den $1^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten $\dfrac{dy}{dx}$ gegeben ist, so wird diese Grösse für einen Inflexions-

punkt nothwendig ein Maximum oder Minimum; und umgekehrt wird jedem Maximum oder Minimum von $\frac{dy}{dx}$ ein Beugungspunkt entsprechen, wenn die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe desselben stetig sind und reelle Werthe darbieten. Die Aufgabe, die Beugungspunkte einer Curve aufzusuchen, ist demnach darauf zurückgeführt, jene Werthe von $x$ zu finden, welche den ersten Differenzialquotienten zu einem Maximum oder Minimum machen; diese Werthe ergeben sich aber aus der Auflösung der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder auch unter Umständen $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$. Ob ein aus diesen Gleichungen gezogener Werth wirklich ein Maximum oder Minimum erzeuge, also auch ein Beugungspunkt vorhanden sei, oder nicht, hängt dann bekanntlich davon ab, ob der erste für diesen Werth nicht verschwindende höhere Differenzialquotient von ungerader oder gerader Ordnung ist.

Untersuchen wir z. B. die durch die Gleichung

$$y^2 = ax^2 + bx^3$$

ausgedrückte Curve, welche, je nachdem der Coefficient $a$ positiv, Null oder negativ ist, während $b$ immer positiv bleibt, eine der in Fig. 42, 43 und 44 dargestellten Formen annimmt. Man findet durch Differenziation dieser Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(2a+3bx)^2}{4(a+bx)}; \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \frac{b^2\left(a+\frac{3}{4}bx\right)^2}{(a+bx)^3}.$$

Die Werthe von $x$, welche ein Maximum oder Minimum des 1ten Differenzialquotienten zur Folge haben, ergeben sich sofort aus der Gleichung $a + \frac{3}{4}bx = 0$, woraus $x = -\frac{4a}{3b}$ folgt. Mit diesem Werthe wird $y^2 = -\frac{16a^3}{27b^2}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -3a$.

Ist nun $a$ positiv, so sind diese Werthe von $y$ und $\frac{dy}{dx}$ imaginär; es existirt somit kein Beugungspunkt.

Ist $a = 0$, in welchem Falle die Curve die Neil'sche Parabel ist, so wird der obige Werth von $x = 0$, womit auch $y$ und $\frac{dy}{dx}$ auf Null sich reduciren; da aber für negative Werthe von $x$ $y$ imaginär wird, so ist der Punkt $x = 0$, $y = 0$, d. i. der Ursprung kein Inflexionspunkt.

Ist endlich $a$ negativ, so entsprechen dem positiven Werthe $x = -\frac{4a}{3b}$ zwei reelle Ordinaten, und die entsprechenden zwei Punkte

der Curve sind Beugungspunkte, da, wie man sich leicht überzeugt, $y$ in der Nähe dieser Punkte stetig und reell bleibt.

Betrachten wir noch die Curve:

$$y = e^{-x^2},$$

welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in mehreren Problemen der angewandten Mathematik eine wichtige Rolle spielt. Sie besteht (Fig. 45) aus zwei zu beiden Seiten der $y$-Axe symmetrisch liegenden unendlichen Aesten, welche die $x$-Axe zur Asymtote haben. Aus der obigen Gleichung folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2(2x^2 - 1)\, e^{-x^2}.$$

Die Bedingung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ liefert die Werthe $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, welchen zwei Beugungspunkte $A$, $B$ entsprechen.

**381.** Wenn sich zwei Aeste einer Curve in demselben Punkte endigen und berühren, so heisst dieser Punkt ein Rückkehrpunkt oder eine Spitze. Er ist ein Rückkehrpunkt oder eine Spitze der ersten Art (Fig. 46), wenn die beiden Aeste in der Nähe des Vereinigungspunktes ihre convexen Seiten einander zukehren, oder der zweiten Art (auch Schnabel genannt) (Fig. 47), wenn die convexe Seite des einen Astes gegen die concave des andern gerichtet ist. Im ersten Falle liegen die beiden Aeste in der Nähe des Vereinigungspunktes auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente, im letzteren auf derselben Seite.

Nehmen wir an, die Curve $y = f(x)$ besitze einen Rückkehrpunkt, dessen Abscisse $= a$, so muss (abgesehen von dem besonderen Falle, wenn die diesem Punkte entsprechende Tangente auf der Axe der $x$ senkrecht steht) einer der beiden Werthe $f(a + h)$, $f(a - h)$, wenigstens für die kleinsten Werthe von $h$ nothwendig imaginär ausfallen, da die Curve von diesem Punkte aus sich nur nach einer Seite erstreckt. Hiezu wird erfordert, dass der Ausdruck $f(a \pm h)$ eine Wurzelgrösse von der Form $h^{\frac{m}{n}}$ enthalte, unter $\frac{m}{n}$ einen positiven Bruch verstanden, welcher — auf seine einfachste Gestalt gebracht — mit geradem Nenner versehen ist. Ist ferner der Rückkehrpunkt von der ersten Art, so wird der 2te Differenzialquotient $f''(x)$ für zwei sehr nahe an $x = a$ liegende Werthe von $x$, dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe annehmen, weil die beiden an der Spitze sich

vereinigenden Aeste der Curve der eine seine concave, der andere seine convexe Seite der Abscissenaxe zukehrt. Hieraus folgt, dass für $x = a$ selbst der 2te Differenzialquotient Null oder unendlich werden muss. (Diese Bedingung tritt bekanntlich auch für einen Beugungspunkt ein; für diesen müssen jedoch beide Werthe $f(x+h)$ und $f(x-h)$ reell sein, während bei einer Spitze einer derselben imaginär werden muss.) Bei Spitzen der zweiten Art gilt die obige Folgerung nicht, vielmehr muss hier der 2te Differenzialquotient für Werthe von $x$ in der Nähe von $a$, zwei reelle Werthe von gleichen Zeichen darbieten.

Beisp. 1. Untersuchen wir z. B. die durch die Gleichung

$$(y - 2x)^2 = (x - a)^3$$

$$\text{oder} \quad y = 2x \pm (x - a)^{\frac{3}{2}} = f(x)$$

dargestellte Curve (Fig. 46). Für jeden Werth von $x > a$ erhält $y$ zwei reelle Werthe, welche sich für $x = a$ auf einen einzigen: $y = 2a$ reduciren; für $x < a$ wird $y$ imaginär. Die Curve hält daher im Punkte $A\,(x = a,\ y = 2a)$ in ihrem Laufe inne; man hat nun:

$$f'(x) = 2 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{x - a}, \quad f''(x) = \pm \frac{3}{4\sqrt{x-a}}.$$

Setzt man $f''(x) = \infty$, so folgt $x = a$; da nun von den beiden Werthen $f(a + h)$ und $f(a - h)$ der erste reell, der zweite imaginär ist, und $f''(a + h)$ zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe $\pm \dfrac{3}{4\sqrt{h}}$ annimmt, so hat die Curve im Punkte $x = a$, $y = 2a$ einen Rückkehrpunkt der ersten Art. Der Neigungswinkel der Tangente an diesem Punkte gegen die Abscissenaxe hat die Grösse 2 zur trigonometrischen Tangente.

2. Es sei die Gleichung

$$y = b + m(x - a)^2 \pm n(x - a)^{\frac{5}{2}}$$

gegeben. Die Curve (Fig. 47) besteht aus zwei Aesten, welche sich in dem Punkte $A$, dessen Coordinaten $x = a$, $y = b$ sind, vereinigen. Um zu untersuchen, ob dieser Punkt eine Spitze sei, bilde man die Differenzialquotienten:

$$f'(x) = 2m(x - a) \pm \tfrac{5}{2}\, n(x - a)^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 2m \pm \tfrac{15}{4}\, n(x - a)^{\frac{1}{2}}.$$

Da $f''(x)$ für $x = a$ weder 0 noch $\infty$ wird, so kann die Spitze nur von der 2ten Art sein; nun ist $f''(a + h) = 2m \pm \frac{15}{4}\, n\sqrt{h}$: diese bei-

den Werthe sind reell und, wenn man nur $h$ klein genug nimmt, jedenfalls von gleichem Zeichen. Die Curve hat daher in $A$ einen Rückkehrpunkt zweiter Art. Die Tangente an diesem Punkte ist, wie aus dem Ausdrucke von $f'(x)$ erhellt, parallel zur Axe der $x$.

Die Gl. $f''(x) = 0$ liefert den Werth $x = a + \frac{64}{225} \frac{m^2}{n^2}$, welcher einem Beugungspunkte $B$ im unteren Curvenaste entspricht.

Die Cycloide, die Epicycloide und Hypocycloide, die Cissois (I. §. 236), die Evolute der Parabel bieten ebenfalls Beispiele von Curven dar, welche mit Rückkehrpunkten versehen sind.

**382.** Ein vielfacher Punkt einer Curve heisst derjenige, durch welchen mehrere Aeste einer Curve hindurchgehen, gleichgültig ob sie sich daselbst schneiden oder berühren.

Setzen wir zunächst voraus, dass sich die Aeste in dem vielfachen Punkte durchschneiden, so besitzt die Curve daselbst mehrere Tangenten, während ihr an jedem anderen Punkte deren nur eine zukommt; der Quotient $\frac{dy}{dx}$, welcher bekanntlich die Neigung der Tangente der Curve gegen die $x$-Axe ausdrückt, wird daher, wenn in denselben die Coordinaten eines vielfachen Punktes substituirt werden, nothwendig mehrere Werthe annehmen müssen, während er für jeden anderen Punkt nur eines Werthes fähig ist. Dies vorausgesetzt, sei nun $u = F(x, y) = 0$ die von etwa vorhandenen Wurzelgrössen befreite Gleichung der Curve, also $u = F(x, y)$ eine rationale Funktion, so werden in der Differenzialgleichung der Curve

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0, \quad \text{oder } Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

die partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx} = M$, $\frac{du}{dy} = N$ ebenfalls rationale Funktionen sein und der Quotient $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$ wird demnach für jedes Paar zusammengehöriger Werthe von $x$ und $y$ nur einen einzigen Werth darbieten. Dieser Quotient soll aber mehrere verschiedene Werthe annehmen, wenn man in denselben für $x$ und $y$ die Coordinaten eines vielfachen Punktes substituirt, was offenbar nur möglich ist, wenn für diese Coordinatenwerthe sowohl $M$ als $N$ auf Null sich reduziren, wodurch der Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Um daher die vielfachen Punkte einer Curve zu entdecken, wird man die Gleichung derselben, nachdem sie auf eine rationale Form gebracht ist, differenziren, und die Coefficienten beider Differenzialien gleich Null setzen; durch Auflösung der so gewonnenen Gleichungen:

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \tag{2}$$

erhält man die Coordinaten aller vielfachen Punkte der Curve, wobei selbstverständlich jene Auflösungen auszuscheiden sind, welche der Gleichung der Curve, $u = 0$, nicht Genüge leisten, weil die zugehörigen Punkte nicht in der Curve liegen. Nicht jeder auf diese Art ausgemittelte Punkt der Curve ist aber nothwendig ein vielfacher; um dies zu entscheiden, wird man die Werthe entwickeln, welche der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ für den in Rede stehenden Punkt annimmt; die Anzahl der reellen Werthe dieser Grösse bestimmt die Anzahl der Aeste, welche sich in diesem Punkte schneiden; sind aber sämmtliche Werthe imaginär, so liegt dieser Punkt, obwohl seine Coordinaten der Gleichung der Curve Genüge leisten, gar nicht in dem stetigen Zuge der Curve, weil es für ihn keine Berührende gibt; er ist daher kein vielfacher, sondern ein sogenannter conjugirter oder isolirter Punkt der Curve.

Da die Coordinaten jedes vielfachen Punktes die Gl. (1) identisch machen, so muss man zur Ausmittelung der oben erwähnten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ zu den höheren Differenzialgleichungen der Curve seine Zuflucht nehmen; die erste derselben, welche durch die Coordinaten des fraglichen Punktes nicht unabhängig von dem Werthe des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ erfüllt wird, dient zur Bestimmung der Werthe dieser Grösse.

Wenn sich die einzelnen Curvenäste in dem vielfachen Punkte nicht durchschneiden, sondern berühren, etwa nach der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, so erhalten, gemäss den in §. 368 vorgetragenen Principien, die Differenzialquotienten:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

jeder nur einen bestimmten Werth, während $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ mehrere verschiedene Werthe darbieten muss. Eine $n$malige Differenziation der Gl. (1) gibt uns aber:

$$Rdx^{n+1} + Nd^{n+1}y = 0,$$

wo $R$ und $N$ wieder rationale Funktionen von $x$ und $y$ sind und $N$ dieselbe Grösse ist, wie in (1). In Folge dieses Umstandes wird der

Bruch $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = -\frac{R}{N}$ nur dann mehrerer Werthe fähig, wenn sowohl $R$ als $N$ für die Coordinatenwerthe des vielfachen Punktes gleich Null werden; wenn aber diese Werthe die Grösse $N$ auf Null reduciren, so müssen sie vermöge der Gl. (1) auch die Grösse $M$ auf Null bringen, so dass sie sich aus den Gleichungen $M = 0$, $N = 0$ ergeben, und demnach für diesen Fall dieselben Vorschriften gelten, welche wir oben für den Fall des Durchschneidens der Curvenäste entwickelt haben. Ob die Curvenäste sich durchschneiden oder berühren, gibt sich von selbst durch die die Grösse $\frac{dy}{dx}$ bestimmende Gleichung zu erkennen, welche im ersteren Falle so viele verschiedene, im zweiten aber nur so viele einander gleiche reelle Wurzeln haben wird, als Aeste durch den fraglichen Punkt hindurchgehen.

Beisp. 1. Für die Lemniscate [§ 235] besteht die Gleichung $(y^2 + x^2)^2 + 2e^2 (y^2 - x^2) = 0 = u$, deren Differenziation:

$$x(y^2 + x^2 - e^2)\, dx + y\,(y^2 + x^2 + e^2)\, dy = 0$$

gibt. Wir setzen nun:

$$x(y^2 + x^2 - e^2) = 0, \quad y(y^2 + x^2 + e^2) = 0,$$

welche Gleichungen nur eine reelle der Gleichung der Curve genügende Auflösung $x = 0$, $y = 0$ zulassen; der Ursprung kann also ein vielfacher Punkt sein. Die 2te Differenzialgleichung der Curve verwandelt sich nach Auslassung jener Glieder, welche vermöge der Bedingung: $x = 0$, $y = 0$ verschwinden, in: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$, woraus $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ folgt. Der Ursprung ist demnach ein doppelter Punkt, in welchem die Tangenten der beiden sich daselbst schneidenden Aeste unter einem Winkel von $45^0$ gegen die $x$-Axe geneigt sind.

2. Es sei die Gleichung: $u = x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$ gegeben; hieraus folgt:

$$4x(x^2 + ay)\, dx + a\,(2x^2 - 3y^2)\, dy = 0;$$
$$x\,(x^2 + ay) = 0, \quad 2x^2 - 3y^2 = 0.$$

Von den Auflösungen dieser Gleichungen leistet nur jene: $x = 0$, $y = 0$ der Gl. der Curve Genüge. Die 2te Differenzialgleichung ist, mit Auslassung jener Glieder, welche vermöge der Bedingungsgleigungen verschwinden:

$$2(3x^2 + ay)\, dx^2 + 4ax\, dx\, dy - 3ay\, dx^2 = 0,$$

deren sämmtliche Glieder für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden. Die 3te

Differenzialgleichung wird, ebenfalls mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$4x dx^3 + 2a dx^2 dy - a dy^3 = 0,$$

welche sich für $x = 0$, $y = 0$ in:

$$\frac{dy}{dx}\left\{2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = 0$$

verwandelt, aus welcher Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ die drei reellen Werthe: $0$, $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ folgen. Der Ursprung ist daher ein dreifacher Punkt. Die Curve hat die in Fig. 48 verzeichnete Gestalt.

**383.** Conjugirte (beigeordnete, auch isolirte) Punkte werden jene genannt, welche zwar der Gleichung der Curve Genüge leisten, jedoch ausserhalb der Aeste der Curve sich befinden.

Sind $a$, $b$ die Coordinaten eines solchen Punktes, so muss die der Abscisse $a+h$ entsprechende Ordinate für die kleinsten Werthe von $h$ imaginär werden. Denkt man sich daher zunächst die Gleichung der Curve in der Form $y = f(x)$, so hat man nach dem Taylor'schen Satze:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(a) + \ldots\ldots,$$

woraus folgt, dass in der Reihe der Differenzialquotienten: $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, u. s. w. sich imaginäre Glieder vorfinden müssen.

Dies vorausgesetzt, nehmen wir an, es sei $\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ der erste aus der Reihe der aufeinanderfolgenden Differenzialquotienten, welcher für $x = a$ imaginär wird; $u = F(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve, und $u = F(x, y)$ eine rationale Funktion; aus jener zieht man, wie im vorigen §. die Differenzialgleichungen:

$$M dx + N dy = 0 \qquad (1)$$

$$R dx^n + N d^n y = 0 \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) soll nun, wenn in $R$ und $N$ für $x$ und $y$ die Coordinaten $a$, $b$ eines conjugirten Punktes substituirt werden, für $\frac{d^n y}{dx^n}$ einen imaginären Werth darbieten, was vermöge der rationalen Form von $R$ und $N$ nur möglich ist, wenn die Grösse $\frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{R}{N}$ unter die Form $\frac{0}{0}$ fällt; die Bedingung $N = 0$ zieht aber in Folge der Gl. (1) auch jene $M = 0$ nach sich, so dass, wie man sieht, die conjugirten Punkte, so wie die vielfachen aus den Gleichungen $M=0$, $N = 0$ sich ergeben, wie auch im vorigen §. schon bemerkt wurde.

Beisp. Die Curve $y = x\sqrt{x-1}$ hat im Ursprunge einen isolirten Punkt. Diese Gleichung auf die rationale Form: $y^2 - x^3 + x^2 = 0$ gebracht und differenzirt, gibt nämlich: $2y\,dy - x(3x - 2)\,dx = 0$; hieraus: $y = 0$, $x(3x - 2) = 0$, welche Gleichungen die Auflösungen $x = 0$, $y = 0$ und $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$ darbieten, von welchen die 2^te^, weil der Gleichung der Curve nicht Genüge leistend, unbrauchbar ist. Die 2^te^ Differenzialgleichung lautet mit Weglassung der in Folge der Bedingungsgleichung verschwindenden Glieder: $d^2y - (3x - 1)\,dx^2 = 0$, woraus für $x = 0$ der imaginäre Werth: $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1}$ folgt. Der Ursprung ist demnach in der That ein conjugirter Punkt der Curve.

---

## SIEBENTES KAPITEL.

### ELEMENTE DER THEORIE DER CURVEN VON DOPPELTER KRÜMMUNG.

---

#### I. Von den Tangenten und Normalebenen doppelt gekrümmter Curven. — Differenzial des Bogens.

**384.** Eine Linie im Raume wird bekanntlich, indem man sie als Durchschnitt zweier Flächen betrachtet, durch die Gleichungen dieser Flächen ausgedrückt, insofern man dieselben als coexistirend betrachtet. Es seien daher:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

die Gleichungen einer krummen Linie im Raume, bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem. Man kann dieselben durch die einfacheren:

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \tag{2}$$

ersetzen welche, durch successive Elimination von $z$ und $y$ aus jenen hervorgehend, den projicirenden Cylindern der Curve beziehungsweise auf die Ebene der $xy$ und $xz$, oder auch den Projectionen der Curve in diesen Ebenen selbst angehören.

Betrachten wir zwei benachbarte Punkte der Curve, $M$ und $M'$, deren Coordinaten respective $x$, $y$, $z$ und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sein mögen und legen wir durch beide Punkte eine Gerade (Sekante), so sind die Gleichungen derselben, wenn die laufenden Coordinaten mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bezeichnet werden:

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(\xi - x).$$

Lassen wir nun den Punkt $M'$ dem Punkte $M$ sich unendlich nähern, oder mit anderen Worten $\Delta x$ unendlich abnehmen, wodurch auch $\Delta y$ und $\Delta z$ unendlich klein werden, so geht die Sekante in eine Tangente über, die Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ verwandeln sich in die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, und wir haben sofort als Gleichungen der Tangente im Punkte $x, y, z$ der Curve:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x). \tag{3}$$

Die Grössen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ ergeben sich durch Differenziation der Gleichungen (2) der Curve. Bezeichnen wir mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Neigungswinkel der Tangente gegen die Axen der $x$, $y$, $z$, so ist [Gl. (2), § 254]:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}. \tag{4}$$

Sind die Gleichungen der Curve in der unentwickelten Form (1) gegeben, so hat man nicht nöthig aus ihnen die Gleichungen (2) abzuleiten; man erhält nämlich durch Differenziation dieser Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

substituirt man hier die aus (3) folgenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, so erhält man die Gleichungen der Tangente in folgender symmetrischer Form:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(\xi - x) + \frac{dF}{dy}(\eta - y) + \frac{dF}{dz}(\zeta - z) = 0, \\ \frac{dF_1}{dx}(\xi - x) + \frac{dF_1}{dy}(\eta - y) + \frac{dF_1}{dz}(\zeta - z) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Gleichungen sind, wie wir später sehen werden, die Gleichungen der Berührungsebenen der beiden Flächen (1) im Punkte $x$, $y$, $z$, deren Durchschnittslinie natürlich Tangente an der Curve sein muss, in welcher sich diese Flächen schneiden.

Eine Ebene, senkrecht auf die Tangente durch den Berührungspunkt $M$ gelegt, heisst Normalebene der Curve im Punkte $M$.

Sind, wie oben $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines Punktes der Curve; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die laufenden Coordinaten der Ebene, so ist die Gleichung einer dürch den Punkt $x$, $y$, $z$ gelegten Ebene:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0;$$

soll nun diese Ebene auf der durch die Gl. (3) ausgedrückten Tangente senkrecht stehen, so muss [§ 257] $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{C}{A}$ sein; man hat daher als Gleichung der Normalebene:

$$(\xi - x) + (\eta - y)\frac{dy}{dx} + (\zeta - z)\frac{dz}{dx} = 0, \qquad (6)$$

$$\text{oder } (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

Jede durch den Berührungspunkt senkrecht auf die Tangente gezogene Gerade heisst eine Normale der Curve; eine Curve im Raume besitzt daher in jedem Punkte unendlich viele Normalen, welche offenbar sämmtlich in der Normalebene liegen.

**385.** Die Länge der Sehne, welche die Punkte $x$, $y$, $z$, und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ der Curve verbindet, wird ausgedrückt durch $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; lässt man nun den letzteren Punkt dem ersteren sich unendlich nähern, d. i. $\Delta x$ und somit auch $\Delta y$, $\Delta z$ unendlich klein werden, so wird die Länge der Sehne der Länge des zwischen beiden Punkten liegenden Bogens der Curve immer mehr und mehr gleich werden; bezeichnen wir das Element oder Differenzial des Bogens mit $ds$, so haben wir zur Grenze übergehend:

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm\, dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}, \qquad (1)$$

wo von beiden Zeichen das obere oder untere genommen werden muss, je nachdem der von einem festen Punkte aus gezählte im Punkte $x$, $y$, $z$ endigende Bogen $s$ mit wachsendem $x$ zu- oder abnimmt.

Mit Hülfe dieses Ausdruckes nehmen die Gleichungen (4) des vorigen §. folgende einfachere Form an:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \qquad (2)$$

## II. Ueber die Berührungen der Curven von doppelter Krümmung.

**386.** Es seien

$$y = f(x), \quad z = F(x),$$
$$\text{und} \quad Y = f_1(X), \quad Z = F_1(X),$$

die Gleichungen zweier Curven im Raume, welche einen oder mehrere Punkte gemeinschaftlich haben. Es ist klar, dass für solche Punkte die drei Coordinaten in beiden Curven gleiche Werthe besitzen und demgemäss die Gleichungen:

$$f(x) = f_1(x), \quad F(x) = F_1(x)$$

stattfinden, aus welchen — in Verbindung mit den obigen Gleichungen der Curven — sich die Coordinaten der gemeinschaftlichen Punkte, wenn solche existiren, ergeben.

Die Curven berühren sich in dem gemeinschaftlichen Punkte, wenn sie daselbst eine gemeinschaftliche Tangente besitzen; im Gegenfalle findet ein Durchschnitt statt.

Es sei nun $x$ die zur $x$-Axe parallele Coordinate eines solchen gemeinschaftlichen Punktes $M$; eine zur Ebene der $yz$ in dem Abstande $x+h$ parallel geführte Ebene wird die beiden Curven in zwei Punkten $m$ und $n$ schneiden, deren Abstand $mn$ mit $\varDelta$ bezeichnet werden möge. Offenbar werden sich die beiden Curven im Punkte $M$ um so inniger an einander schmiegen, je kleiner $\varDelta$ ist im Verhältnisse zu $h$, und man schreibt den Curven eine Berührung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung zu, wenn $\varDelta$ im Vergleiche zu $h$ eine kleine Grösse der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Es seien nun $x+h$, $y'$, $z'$ die Coordinaten des Punktes $m$; $x+h$, $Y'$, $Z'$ jene des Punktes $n$, so ist:

$$\varDelta^2 = (y' - Y')^2 + (z' - Z')^2.$$

Man hat aber vermöge des Taylor'schen Lehrsatzes:

$$y' = f(x+h) = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots,$$

$$z' = F(x+h) = z + h\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3z}{dx^3} + \ldots,$$

$$Y' = f_1(x+h) = Y + h\frac{dY}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3Y}{dx^3} + \ldots,$$

$$Z' = F_1(x+h) = Z + h\frac{dZ}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3Z}{dx^3} + \ldots,$$

somit, weil für den gemeinschaftlichen Punkt die Gleichungen

$$y = Y, \quad z = Z \tag{1}$$

bestehen:

$$y' - Y' = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dx}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2Y}{dx^2}\right) + \ldots$$

$$z' - Z' = h\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dZ}{dx}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2Z}{dx^2}\right) + \ldots.$$

So lange nun die Grössen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dY}{dx}$, sowie $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dZ}{dx}$ für den Punkt $M$ verschiedene Werthe haben, findet daselbst ein Durchschnitt der beiden Curven statt, weil in diesem Falle die beiden Tangenten nicht in eine einzige Gerade zusammenfallen, wie aus den Gleichungen der Tangente sogleich erhellt.

Sind aber für den Punkt $M$ nebst den Gleichungen (1) auch noch die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx} \tag{2}$$

erfüllt, so kommt den Curven in dem besagten Punkte eine gemeinschaftliche Tangente zu; sie berühren sich daselbst, und zwar, wie man zu sagen pflegt, nach der 1[ten] Ordnung; die Grösse $\varDelta$ ist in diesem Falle, wie aus dem Ausdrucke derselben ersichtlich, im Vergleiche zu $h$ eine kleine Grösse 2[ter] Ordnung.

Eine Berührung 2[ter] Ordnung tritt ein, wenn für den Berührungspunkt nebst den Gleichungen (1) und (2) auch noch die folgenden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2Z}{dx^2} \tag{3}$$

bestehen, und es wird in diesem Falle $\varDelta$ eine kleine Grösse der 3[ten] Ordnung.

Allgemein erfordert eine Berührung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung die Erfüllung der Bedingungsgleichungen $2(n+1)$ an der Zahl:

$$y = Y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nY}{dx^n},$$

$$z = Z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2Z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n} = \frac{d^nZ}{dx^n}.$$

Gewöhnlich ist bloss eine Curve individuell gegeben, die zweite aber nur der Gattung nach, und die Aufgabe besteht dann darin, die constanten Parameter der letzteren so zu bestimmen, dass sie mit der ersteren eine Berührung von bestimmter Ordnung eingehe.

Hieraus folgt sogleich, dass eine Curve von einer Geraden nur nach der 1[ten] Ordnung berührt werden könne, da die Gleichungen der

Geraden nur vier constante Parameter enthalten, welche zur Erfüllung der vier Bedingungsgleichungen einer Berührung erster Ordnung eben hinreichen. Die Ausführung der leichten Rechnung führt zu den bereits in § 384 entwickelten Gleichungen der Tangente.

**387.** Auch die Berührungen von Flächen und Curven unter einander lassen sich einer ähnlichen Untersuchung unterziehen. Wir wollen hier nur diejenigen betrachten, welche eine beliebige Curve und eine Ebene darbieten.

Es seien

$$y = f(x), \quad z = F(x)$$

die Gleichungen der Curve; die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt $x$, $y$, $z$ der Curve geht, ist:

$$\zeta - z = a(\xi - x) + b(\eta - y), \tag{m}$$

wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die laufenden Coordinaten der Ebene sind.

Gehen wir von dem Punkte $x$, $y$, $z$ der Curve zu einem benachbarten $m$ über, dessen Coordinaten $x + h$, $y'$, $z'$ sein mögen, so ist:

$$y' = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots; \quad z' = z + h\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots$$

Die diesem Punkte entsprechende Coordinate $z'$ wird, wenn nöthig verlängert, die Ebene in einem Punkte $n$ schneiden, dessen Coordinaten: $x + h$, $y'$, $\zeta'$ sind, wo $\zeta'$ aus der Gleichung der Ebene sich bestimmt, wenn man $\xi = x + h$, $\eta = y'$ setzt; man findet hiedurch:

$$\zeta' = z + ah + b(y' - y),$$

oder wenn man für $y'$ seinen Werth substituirt:

$$\zeta' = z + h\left(a + b\frac{dy}{dx}\right) + \frac{h^2}{2}\cdot b\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots.$$

Für den Abstand $\varDelta$ der beiden Punkte $m$ und $n$ erhält man hiemit:

$$\varDelta = z' - \zeta' = h\left(\frac{dz}{dx} - a - b\frac{dy}{dx}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - b\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots$$

Auch hier sagt man, es finde eine Berührung der $1^{\text{ten}}$ Ordnung zwischen der Ebene und Curve statt, wenn $\varDelta$ in Bezug auf $h$ von der $2^{\text{ten}}$ Ordnung ist; hiezu wird erfordert, dass die Constanten $a$ und $b$ der Bedingungsgleichung

$$\frac{dz}{dx} - a - b\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

Genüge leisten. Da diese Gleichung zur Bestimmung der beiden

Grössen $a$ und $b$ nicht hinreicht, so gibt es unzählige Ebenen, welche die Curve in einem gegebenen Punkte nach der 1ten Ordnung berühren; sie gehen sämmtlich durch die Tangente der Curve an diesem Punkte [§. 257].

Fügen wir nun zur Gleichung (1) noch die Bedingung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - b\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{2}$$

hinzu, so erhebt sich die Berührung zur 2ten Ordnung, und da die Gl. (1) und (2) die Grössen $a$, $b$ vollkommen bestimmen, so gibt es für jeden Punkt der Curve nur eine Ebene, welche die Curve nach der 2ten Ordnung berührt. Diese Ebene führt den Namen osculatorische Ebene oder Krümmungsebene.

Indem man die aus (1) und (2) folgenden Werthe von $a$ und $b$ in die Gl. ($m$) einführt, erhält man als Gleichung der Krümmungsebene:

$$\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)(\xi - x) + \frac{d^2z}{dx^2}(\eta - y) - \frac{d^2y}{dx^2}(\zeta - z) = 0. \tag{3}$$

Es mag noch bemerkt werden, dass — wie man sich leicht überzeugt — die für die Krümmungsebene geltenden Bedingungsgleichungen (1) und (2) nichts anderes ausdrücken, als dass die aus den Gleichungen der Curve gezogenen Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ der 1ten und 2ten Differenzialgleichung der Ebene ($m$) Genüge leisten.

Die Gleichung der Krümmungsebene nimmt eine mehr symmetrische Form an, wenn man nicht — wie es oben geschehen ist — $x$ als unabhängig Veränderliche, also $dx$ als constant betrachtet. Um hiezu auf dem einfachsten Wege zu gelangen, sei die Gleichung einer durch den Punkt $x, y, z$ der Curve gelegten Ebene:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0; \tag{n}$$

differenzirt man dieselbe zweimal, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ als Funktionen irgend einer anderen unabhängig Veränderlichen betrachtend, so kommt:

$$Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta = 0,$$
$$Ad^2\xi + Bd^2\eta + Cd^2\zeta = 0.$$

Soll nun diese Ebene Krümmungsebene im Punkte $x$, $y$, $z$ der Curve werden, so müssen diese beiden Differenzialgleichungen durch die der Curve entsprechenden Werthe von $dx$, $dy$, $dz$, $d^2x$, $d^2y$, $d^2z$ verificirt werden, d. i. es muss sein:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0, \quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0. \tag{p}$$

Indem man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ bestimmt,

und in die obige Gl. der Ebene substituirt, erhält man die gesuchte Gleichung der Krümmungsebene:

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,(\xi - x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,(\eta - y) \\ + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,(\zeta - z) = 0. \qquad (4)$$

Will man $x$ zur unabhängig Veränderlichen machen, so hat man $d^2x = 0$ zu setzen, wodurch diese Gleichung wieder in die obige (3) übergeht.

Aus dem Gesagten wird man leicht ersehen, dass die Krümmungsebene als jene Ebene definirt werden kann, welche durch 3 unendlich nahe liegende Punkte $M$, $M'$, $M''$ der Curve geht, oder was auf dasselbe hinauskommt, welche durch zwei unendlich nahe aufeinander folgende Tangenten der Curve gelegt wird. In der That, soll die durch den Punkt $M\,(x, y, z)$ der Curve gehende Ebene, deren Gleichung ($n$) Kürze halber mit $L = 0$ bezeichnet werden möge, auch noch die Punkte $M'$ und $M''$ enthalten, so müssen die Coordinaten dieser Punkte, nämlich

$$x + dx\,, \quad y + dy\,, \quad z + dz$$

und $\quad x + 2\,dx + d^2x\,, \quad y + 2\,dy + d^2y\,, \quad z + 2\,dz + d^2z$

der Gl. $L = 0$ Genüge leisten. Substituirt man nun die erwähnten Coordinaten an die Stelle von $x, y, z$ in die Gl. $L = 0$, so geht diese bekanntlich über in

$$L + dL = 0\,, \quad L + 2\,dL + d^2L = 0\,,$$

welche Gleichungen sich mit Rücksicht auf $L = 0$ auf die folgenden:

$$dL = 0\,, \quad d^2L = 0$$

reduciren. Diese Gleichungen drücken nun die Bedingung aus, dass die Ebene (oder überhaupt die Fläche) $L = 0$, welche durch den Punkt $M\,(x, y, z)$ geht, auch noch die zwei diesem unendlich nahe liegenden Punkte $M'$ und $M''$ enthalte, und sind — wie man sieht — identisch mit den Gleichungen ($p$), welche zur Bestimmung der Krümmungsebene gedient haben.

### Ueber die Krümmung der Curven von doppelter Krümmung.

**388.** Es seien $M$, $M'$, $M''$ drei unendlich nahe liegende Punkte einer Curve von doppelter Krümmung; innerhalb dieser unendlich kleinen Ausdehnung kann die Curve als eine ebene, und zwar in der Krümmungsebene liegende Curve betrachtet werden, deren Krümmung im Punkte $M$ demgemäss auf dem in §. 370 für ebene Curven betretenen Wege sich bestimmen lässt. Bezeichnet man daher mit $\varrho$ den Krümmungshalbmesser, mit $d\tau$ den Contingenzwinkel, d. i. den unend-

lich kleinen Winkel, welchen die zwei an den Punkten $M$ und $M'$ gezogenen Tangenten der Curve einschliessen, mit $ds$ den unendlich kleinen Bogen $MM'$, so ist das Maas der Krümmung der Curve in der Krümmungsebene

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}, \text{ und } \varrho = \frac{ds}{d\tau}. \tag{1}$$

Man pflegt diese die erste Krümmung der Curve zu nennen.

Während aber bei ebenen Curven nur diese eine Krümmung vorkommt, weil bei diesen die Krümmungsebenen sämmtlicher Punkte der Curve mit der Ebene der Curve zusammenfallen, kommt bei den Curven von doppelter Krümmung noch eine zweite Krümmung in Betracht, weil die Krümmungsebene von einem Punkte zum anderen sich ändert; jedes Element der Curve tritt aus der Ebene der beiden vorhergehenden Elemente heraus. Es sei $d\theta$ der unendlich kleine Winkel, welchen die Krümmungsebene im Punkte $M$ mit jener in dem unendlich nahen Punkte $M'$ einschliesst, so betrachtet man, analog mit dem Obigen, den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{d\theta}{ds} \tag{2}$$

als Maass dieser zweiten Krümmung der Curve.

**389.** Beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten Krümmung, und suchen wir zu diesem Ende einen Ausdruck für den Contingenzwinkel $d\tau$. Es seien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Tangente im Punkte $x, y, z$ der Curve mit den Coordinaten-Axen einschliesst; die Cosinusse der Winkel, welche die zu dem unendlich nahen Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gehörige Tangente mit den besagten Axen bildet, können ausgedrückt werden durch:

$$\cos\alpha + d\cos\alpha, \quad \cos\beta + d\cos\beta, \quad \cos\gamma + d\cos\gamma;$$

man hat daher vermöge eines bekannten Satzes [Gl. 5. §. 247]:

$$\begin{aligned}\cos d\tau = {} & \cos\alpha\,(\cos\alpha + d\cos\alpha) + \cos\beta\,(\cos\beta + d\cos\beta)\\ & + \cos\gamma\,(\cos\gamma + d\cos\gamma) = 1 + \cos\alpha\,.\,d\cos\alpha + \cos\beta\,.\,d\cos\beta\\ & + \cos\gamma\,.\,d\cos\gamma,\end{aligned}$$

da bekanntlich $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Ebenso ist aber auch

$$(\cos\alpha + d\cos\alpha)^2 + (\cos\beta + d\cos\beta)^2 + (\cos\gamma + d\cos\gamma)^2 = 1,$$

aus welcher Gleichung nach Entwickelung der Quadrate:

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\,.\,d\cos\alpha + \cos\beta\,.\,d\cos\beta + \cos\gamma\,.\,d\cos\gamma\\ &\qquad = -\tfrac{1}{2}\left[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2\right]\end{aligned}$$

folgt. Hiemit wird, wenn man sogleich $1 - 2\,(\sin\frac{1}{2}d\tau)^2$ statt $\cos d\tau$ schreibt:

$$2\,(\sin\tfrac{1}{2}d\tau)^2 = \tfrac{1}{2}\left[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2\right],$$

folglich, da für den unendlich kleinen Winkel $d\tau$, $\sin d\tau = d\tau$, also $2(\sin \frac{1}{2} d\tau)^2 = \frac{1}{2} d\tau^2$ ist:

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), §. 385, folgt endlich hieraus:

$$d\tau = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}. \qquad (1)$$

Man kann diesen Ausdruck leicht auf andere Formen bringen. Vollzieht man die angezeigten Differenziationen, ohne ein Differenzial als constant zu betrachten, so kommt:

$$d\tau = \frac{\sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}}{ds^2}.$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen reducirt sich auf:

$$ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2),$$

wenn man die Quadrate entwickelt und beachtet, dass:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

und somit auch

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$$

ist. Hiemit wird nun:

$$d\tau = \frac{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}{ds}. \qquad (2)$$

Endlich folgt aus der vorletzten Gleichung:

$$d^2s = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (2), und bringt die Grösse unter dem Wurzelzeichen auf eine gemeinschaftliche Benennung, so erhält man noch folgenden Ausdruck:

$$d\tau = \frac{\sqrt{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dx\,d^2z - dz\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}}{ds^2}, \qquad (3)$$

in welchem die Binome im Zähler mit den Coefficienten der Gleichung der Krümmungsebene übereinstimmen.

Mit Hülfe dieser Ausdrücke des Contingenzwinkels $d\tau$ ergeben sich für den Krümmungshalbmesser folgende Ausdrücke:

$$\varrho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}, \qquad (4)$$

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}, \qquad (5)$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dx\,d^2z - dz\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}}. \qquad (6)$$

Nimmt man $s$ als unabhängig Veränderliche, so folgt aus (5), wegen $d^2s = 0$:

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}. \tag{7}$$

Wählt man aber $x$ als unabhängig Veränderliche, so erhält man aus (6), $d^2x = 0$ setzend:

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)}}. \tag{8}$$

**390.** Es erübrigt nunmehr noch die Bestimmung der Lage des Krümmungshalbmessers, welche — da der eine Endpunkt desselben der gegebene Punkt $x, y, z$ der Curve ist — durch die Coordinaten des anderen Endpunktes, des Krümmungsmittelpunktes, vollständig bestimmt wird. Dieser Punkt ist aber, wie aus §. 388 erhellt, der Durchschnittspunkt zweier aufeinanderfolgenden, in der Krümmungsebene liegenden Normalen der Curve, d. i. weil diese Normalen durch den Durchschnitt der Krümmungsebene mit zwei unendlich nahe folgenden Normalebenen gebildet werden, der Durchschnittspunkt dieser drei eben genannten Ebenen selbst.

Es ist nun die Gleichung der Krümmungsebene im Punkte $x, y, z$ der Curve [Gl. (4). §. 387]:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \tag{m}$$

wo der Kürze wegen

$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y$; $B = dz\,d^2x - dx\,d^2z$; $C = dx\,d^2y - dy\,d^2x$

gesetzt ist. Die Gleichung der Normalebene ist:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0. \tag{n}$$

Aus dieser Gleichung geht jene der unendlich nahe folgenden Normalebene hervor, wenn wir $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ an die Stelle von $x$, $y$, $z$ treten lassen; es sind demnach, wenn wir den 1ten Theil der Gl. ($n$) mit $L$ bezeichnen, $L = 0$ und $L + dL = 0$ die Gleichungen der beiden Normalebenen, welche — da sie zur Bestimmung des Durchschnittes mit einander verbunden werden — durch das System der Gleichungen $L = 0$, $dL = 0$ ersetzt werden können. Die letztere Gleichung ergibt sich durch Differenziation der Gl. ($n$):

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0. \tag{p}$$

Betrachten wir nun die Gleichungen ($m$), ($n$), ($p$), als coexistirend, so gehören die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ dem Durchschnittspunkte der drei Ebenen, also dem Krümmungsmittelpunkte an.

Durch successive Elimination von $(\zeta - z)$ und $(\eta - y)$ aus den Gl. $(m)$ und $(n)$ erhält man:

$$(\xi - x)(Adz - Cdx) + (\eta - y)(Bdz - Cdy) = 0,$$
$$(\xi - x)(Ady - Bdx) + (\zeta - z)(Cdy - Bdz) = 0,$$

und wenn man die hieraus folgenden Werthe in $(p)$ substituirt:

$$\xi - x = \frac{ds^2 (Bdz - Cdy)}{(Bdz - Cdy)\, d^2x + (Cdx - Adz)\, d^2y + (Ady - Bdx)\, d^2z}.$$

Der Nenner dieses Bruches ist $= A^2 + B^2 + C^2$, wie sich sogleich zeigt, wenn man je zwei mit $A$, $B$, $C$ multiplicirte Glieder zusammenfasst; man hat daher:

und hiemit:
$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= \frac{ds^2 (Bdz - Cdy)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ \eta - y &= \frac{ds^2 (Cdx - Adz)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ \zeta - z &= \frac{ds^2 (Ady - Bdx)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für den Krümmungshalbmesser besteht offenbar die Gleichung:

$$\varrho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2};$$

substituirt man für die Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ die eben gefundenen Ausdrücke (1), entwickelt die Quadrate, und schreibt statt:

$$A^2 (dy^2 + dz^2), \quad B^2 (dx^2 + dz^2), \quad C^2 (dx^2 + dy^2)$$

die beziehungsweise gleichgeltenden Ausdrücke:

$$A^2 (ds^2 - dx^2), \quad B^2 (ds^2 - dy^2), \quad C^2 (ds^2 - dz^2),$$

so bringt man die Wurzelgrösse leicht auf die Form:

$$\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\, ds^2 - (Adx + Bdy + Cdz)^2};$$

vermöge der 1ten der Gleichungen $(p)$, §. 387, ist aber $Adx + Bdy + Cdz = 0$, somit wird

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (2)$$

welcher Ausdruck mit (6) in §. 389 übereinstimmt.

Eine häufig angewendete Form der Ausdrücke (1) der Mittelpunktscoordinaten ergibt sich noch auf folgende Weise:

Es ist:

$$\begin{aligned} Bdz - Cdy &= (dz\, d^2x - dx\, d^2z)\, dz - (dx\, d^2y - dy\, d^2x)\, dy \\ &= d^2x\, (ds^2 - dx^2) - dx\, (dy\, d^2y + dz\, d^2z) \\ &= d^2x\, (ds^2 - dx^2) - dx\, (ds\, d^2s - dx\, d^2x) \\ &= d^2x\, ds^2 - dx\, ds\, d^2s \\ &= ds^3 \frac{d^2x\, ds - dx\, d^2s}{ds^2} = ds^3 . d\frac{dx}{ds}; \end{aligned}$$

behandelt man in gleicher Weise die beiden anderen Binome, so erhält man mit Rücksicht auf (2):

$$\xi - x = \varrho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}; \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}; \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}. \tag{3}$$

Die Differenzen: $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ sind die Projectionen des Krümmungshalbmessers auf die Coordinatenaxen; lässt man daher $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel bedeuten, welche der Halbmesser mit den besagten Axen einschliesst, so hat man:

$$\xi - x = \varrho \cos\lambda, \quad \eta - y = \varrho \cos\mu, \quad \zeta - z = \varrho \cos\nu, \tag{4}$$

welche Gleichungen in Verbindung mit den obigen die Richtung des Krümmungshalbmessers bestimmen.

**391.** Durch die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Ausdrücke des Krümmungshalbmessers und der Coordinaten des Krümmungsmittelpnnktes sind Halbmesser und Mittelpunkt eines in der Krümmungsebene liegenden Kreises bestimmt, welcher der Krümmungskreis genannt wird, weil er mit der Curve in dem zugehörigen Punkte gleiche Krümmung besitzt. Er geht mit der Curve in diesem Punkte eine Berührung der 2ten Ordnung ein. In der That würden wir zu denselben Resultaten gelangt sein, wenn wir uns die Aufgabe gestellt hätten, den Kreis zu suchen, welcher die Curve nach der 2ten Ordnung berührt.

Bezeichnen wir nämlich mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten des Mittelpunktes, mit $\varrho$ den Halbmesser, so werden die Gleichungen:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \varrho^2, \tag{1}$$

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \tag{2}$$

einen mit dem Halbmesser $\varrho$ aus dem Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ beschriebenen Kreis im Raume darstellen, da die erste eine eben so beschriebene Kugel, die 2te eine durch den Mittelpunkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gelegte Ebene ausdrückt. Soll dieser Kreis die Curve im Punkte $x$, $y$, $z$ nach der 2ten Ordnung berühren, so müssen nicht nur die Gleichungen (1) und (2), sondern auch ihre Differenzialgleichungen der 1ten und 2ten Ordnung:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0,$$

$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0,$$

durch die Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Berührungspunktes und deren Differenzialien erfüllt werden. Hiemit sind sechs Gleichungen ge-

geben, welche zur Bestimmung der sechs Unbekanntenn: $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\varrho$, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, eben hinreichen. Die Elimination bietet keine Schwierigkeiten dar, und führt auf die bekannten Ausdrücke.

**392.** Als Maas der zweiten Krümmung der Curve im Punkte $M(x, y, z)$ dient nach dem in §. 388 Gesagten der Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{d\theta}{ds}, \tag{1}$$

wo $d\theta$ den unendlich kleinen Winkel bedeutet, welchen die zu dem Punkte $x, y, z$ gehörige Krümmungsebene mit der dem Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ entsprechenden einschliesst. Dieser Winkel ist jenem gleich, welchen zwei auf die besagten Ebenen errichtete Perpendikel bilden; lässt man demnach $l, m, n$ die Winkel bedeuten, welche das auf die Krümmungsebene des Punktes $x, y, z$ gefällte Perpendikel mit den Coordinatenaxen einschliesst, so werden die Cosinusse der Neigungswinkel des zweiten Perpendikels gegen die erwähnten Axen ausgedrückt durch:

$$\cos l + d\cos l, \quad \cos m + d\cos m, \quad \cos n + d\cos n,$$

und man hat daher:

$$\cos d\theta = \cos l\,(\cos l + d\cos l) + \cos m\,(\cos m + d\cos m) + \cos n\,(\cos n + d\cos n),$$

aus welcher Gleichung, wenn sie wie die gleichgeformte in §. 389 behandelt wird:

$$d\theta = \sqrt{(d\cos l)^2 + (d\cos m)^2 + (d\cos n)^2}$$

folgt. Es sei nun:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

die Gleichung der Krümmungsebene im Punkte $(x, y, z)$, so ist bekanntlich [§. 250]:

$$\cos l = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos m = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos n = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

womit man ohne Schwierigkeit

$$d\theta = \frac{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(dA^2 + dB^2 + dC^2) - (AdA + BdB + CdC)^2}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

oder auch

$$d\theta = \frac{\sqrt{(AdB - BdA)^2 + (AdC - CdA)^2 + (BdC - CdB)^2}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

findet. Mit Rücksicht auf die Werthe der Grössen $A$, $B$, $C$ [§. 390] erhält man aber:

$$dA = dy\, d^3z - dz\, d^3y\,,\quad dB = dz\, d^3x - dx\, d^3z\,,\quad dC = dx\, d^3y - dy\, d^3x\,;$$

$$\frac{AdB - BdA}{dz} = \frac{AdC - CdA}{dy} = \frac{BdC - CdB}{dx} = dx\,(d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y)$$
$$+ dy\,(d^2z\, d^3x - d^2x\, d^3z) + dz\,(d^2x\, d^3y - d^2y\, d^3x)\,;$$

bezeichnet man diesen letzten Ausdruck mit $U$, so wird

$$(AdB - BdA)^2 = U^2 dz^2,\quad (AdC - CdA)^2 = U^2 dy^2,$$
$$(BdC - CdB)^2 = U^2 dx^2,$$

und man erhält durch Einführung dieser Werthe in den Ausdruck von $d\theta$:

$$d\theta = \frac{U ds}{A^2 + B^2 + C^2},$$

somit, da $\varrho' = ds : d\theta$ ist,

$$\varrho' = \frac{(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2 + (dx\, d^2z - dz\, d^2x)^2 + (dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2}{dx\,(d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y) + dy\,(d^2z\, d^3x - d^2x\, d^3z) + dz\,(d^2x\, d^3y - d^2y\, d^3x)}. \quad (2)$$

Durch diesen Ausdruck ist nun $\varrho'$, der sogenannte Halbmesser der $2^{ten}$ Krümmung bestimmt; er hängt, wie man sieht, von den $3^{ten}$ Differenzialien ab, während jener der $1^{ten}$ Krümmung nur die Differenzialien der $2^{ten}$ Ordnung enthält.

**393.** Zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen dieses Kapitels wollen wir als speciellen Fall die Schraubenlinie betrachten. Nimmt man die Axe des geraden Kreis-Cylinders, auf dessen Oberfläche die Curve beschrieben ist, als Axe der $z$; bezeichnet mit $r$ den Halbmesser dieses Cylinders, mit $\alpha$ den Steigungswinkel der Schraube, dessen trigonometrische Tangente mit $a$, endlich mit $\varphi$ den Winkel, welchen eine durch den Punkt $x, y, z$ der Curve und die Axe der $z$ gelegte Ebene mit der Ebene der $xz$ einschliesst, so sind nach §. 281 die Gleichungen dieser Curve:

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad z = ar\varphi\,, \qquad (1)$$

vorausgesetzt, dass die Axe der $x$ durch jenen Punkt der Curve gelegt wird, in welchem letztere die $xy$-Ebene schneidet. Die Gleichungen der Projectionen der Curve auf die Ebene der $xz$, $yz$ und $xy$ sind beziehungsweise:

$$x = r\cos\frac{z}{ar};\quad y = r\sin\frac{z}{ar},\quad x^2 + y^2 = r^2. \qquad (2)$$

Aus den Gl. (1) erhält man sofort:

$$dx = -r\sin\varphi\, d\varphi\,,\quad dy = r\cos\varphi\, d\varphi\,,\quad dz = ra\, d\varphi\,,$$

und die Gleichungen der Tangente [Gl. 3. §. 384] werden hiemit:

$$\eta - y = -\operatorname{cotg}\varphi\,(\xi - x); \quad \zeta - z = -a\operatorname{cosec}\varphi\,(\xi - x),$$
$$\zeta - z = a\sec\varphi\,(\eta - y);$$

die Gleichung der Normalebene [Gl. 6, §. 384] wird:

$$(\xi - x)\sin\varphi - (\eta - y)\cos\varphi - a(\zeta - z) = 0,$$

oder:
$$\xi y - \eta x - ra(\zeta - z) = 0.$$

Hieraus folgt, dass der Neigungswinkel der Normalebene gegen die Ebene der $xy$ constant ist.

Aus den Gleichungen der Tangente erhält man, $\zeta = 0$ setzend, für die Coordinaten $\xi$, $\eta$ ihres Durchschnittspunktes mit der Ebene der $xy$ folgende Werthe:

$$\xi = x + \frac{z}{a}\sin\varphi, \quad \eta = y - \frac{z}{a}\cos\varphi,$$

oder, wenn man für $x$, $y$, $z$ die Werthe (1) einführt:

$$\xi = r(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \quad \eta = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

woraus man erkennt [§. 242], dass wenn die Tangente der Schraubenlinie — diese Curve stets berührend — sich fortbewegt, ihr Durchschnittspunkt mit der Ebene der $xy$ in dieser Ebene eine Evolvente des Kreises beschreibt, in welchem der Cylinder die genannte Ebene schneidet.

Durch eine wiederholte Differenziation der Gl. (1) erhält man, $\varphi$ als unabhängig Veränderliche betrachtend:

$$d^2x = -r\cos\varphi\,d\varphi^2, \quad d^2y = -r\sin\varphi\,d\varphi^2, \quad d^2z = 0$$
$$d^3x = r\sin\varphi\,d\varphi^3, \quad d^3y = -r\cos\varphi\,d\varphi^3, \quad d^3z = 0.$$

Ferner ist:

$$ds = r\sqrt{1 + a^2}\,.\,d\varphi = r\sec\alpha\,d\varphi, \quad d^2s = 0.$$

Hiemit erhält man nun für den Halbmesser der 1ten Krümmung [nach Gl. (5), §. 389]:

$$\varrho = \frac{r}{\cos\alpha^2},$$

und als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes [nach Gl. (1) oder (3), §. 390]:

$$\xi = -a^2r\cos\varphi, \quad \eta = -a^2r\sin\varphi, \quad \zeta = ar\varphi.$$

Diese Gleichungen sind jenen (1) ganz ähnlich und zeigen, dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte wieder eine Schraubenlinie ist, welche auf einem Cylinder vom Halbmesser $a^2r$ beschrieben ist, dessen Axe mit der Axe der $z$ zusammenfällt. Die Höhe eines Schraubenganges ist für beide Schraubenlinien dieselbe, da für jeden Punkt $\zeta = ar\varphi = z$. Hieraus geht hervor, dass beide Schraubenlinien auf derselben Schraubenfläche liegen, welche entsteht, wenn sich eine Gerade so bewegt, dass sie, an der Schraubenlinie fortglei-

tend, die Axe der $z$ immer senkrecht schneidet. In der That wird die Gleichung dieser Fläche [§. 281]:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{ar}$$

durch die obigen Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ identisch. Auch fällt der Krümmungshalbmesser für jeden Punkt der Curve der Richtung nach zusammen mit dem zu diesem Punkte gehörigen Halbmesser des Cylinders.

Die Gleichung der Krümmungsebene [§. 387, Gl. (4)] wird:

$$a \sin \varphi (\xi - x) - a \cos \varphi (\eta - y) + \zeta - z = 0,$$

und der Halbmesser der 2ten Krümmung:

$$\varrho' = \frac{r}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

---

## ACHTES KAPITEL.

### ELEMENTE DER THEORIE DER KRUMMEN FLÄCHEN.

---

### I. Ueber die tangirenden Ebenen und Normalen.

**394.** Es seien

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche; $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines gegebenen Punktes $M$ auf derselben. Lassen wir nun $x$ um $\Delta x$ zunehmen, $y$ aber unverändert, so wird sich auch $z$ um $\Delta z$ ändern, und da diese Aenderung von $z$ bloss von einer Aenderung in $x$ herrührt, so wollen wir diese partielle Differenz mit $\frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$ bezeichnen. Wir gelangen hiedurch zu einem zweiten Punkte $M'$ der Fläche, dessen Coordinaten demnach

$$x + \Delta x, \quad y, \quad z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$$

sind. Ein dritter Punkt auf der Fläche sei $M''$, welchen wir von $M$ aus erreichen, indem wir, $x$ unverändert lassend, $y$ um $\Delta y$ zunehmen lassen; seine Coordinaten sind daher:

$$x, \quad y + \Delta y, \quad z + \frac{\Delta z}{\Delta y} \Delta y,$$

wo $\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$ jene partielle Aenderung von $z$ bedeutet, welche durch die alleinige Aenderung von $y$ erzeugt wird.

Durch diese drei Punkte der Fläche wollen wir nun eine Ebene legen. Bezeichnen wir die laufenden Coordinaten der Ebene durch $\xi, \eta, \zeta$, so ist die Gleichung einer durch den Punkt $M(x, y, z)$ gehenden Ebene:

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0, \qquad (m)$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel bedeuten, welche ein auf die Ebene gefälltes Perpendikel mit den Coordinatenaxen einschliesst.

Soll diese Ebene auch noch durch die Punkte $M'$, $M''$ gehen, so müssen die Coordinaten dieser Punkte der Gl. $(m)$ Genüge leisten, wodurch wir die Bedingungsgleichungen:

$$\Delta x \cos\alpha + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x \cos\gamma = 0$$

$$\Delta y \cos\beta + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y \cos\gamma = 0$$

erhalten, welche Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

die Lage der Ebene vollkommen bestimmen. Diese Gleichungen geben nämlich:

$$\cos\alpha = -\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\gamma, \quad \cos\beta = -\frac{\Delta z}{\Delta y}\cos\gamma,$$

mit welchen Werthen sich die Gleichung $(m)$ in folgende verwandelt:

$$(\xi - x)\frac{\Delta z}{\Delta x} + (\eta - y)\frac{\Delta z}{\Delta y} - (\zeta - z) = 0.$$

Dies ist die Gleichung der durch die drei Punkte $M$, $M'$, $M''$ gelegten schneidenden Ebene. Lassen wir nun $\Delta x$ und $\Delta y$ unendlich klein werden, so gehen die partiellen Differenzquotienten $\frac{\Delta z}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta y}$ in die partiellen Differenzialquotienten, die schneidende Ebene in die die Fläche im Punkte $M(x, y, z)$ berührende Ebene über; es ist somit

$$(\xi - x)\frac{dz}{dx} + (\eta - y)\frac{dz}{dy} - (\zeta - z) = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung der Berührungsebene.

Die aus der Gl. (1) der Fläche gezogenen und auf den Berührungspunkt sich beziehenden partiellen Differenzialquotienten pflegt man der Kürze wegen mit $p = \frac{dz}{dx}$ und $q = \frac{dz}{dy}$ zu bezeichnen, womit die Gleichung der tangirenden Ebene die Form

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0 \qquad (3)$$

erhält.

**395.** Eine Gerade, im Berührungspunkte $(x, y, z)$ senkrecht auf die tangirende Ebene errichtet, heisst die Normale der Fläche im Punkte $x, y, z$. Sie bildet mit den Coordinatenaxen die oben mit $\alpha, \beta, \gamma$ bezeichneten Winkel; ihre Gleichungen sind demnach, wenn $\xi, \eta, \zeta$ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta - z), \quad \eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta - z).$$

Man hat aber nach dem vorhergehenden §.:

$$\cos\alpha = -\frac{dz}{dx}\cos\gamma = -p\cos\gamma; \quad \cos\beta = -\frac{dz}{dy}\cos\gamma = -q\cos\gamma,$$

und erhält durch Verbindung dieser Gleichungen mit der Bedingungsgleichung: $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \mp\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\\ \cos\beta &= \mp\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\\ \cos\gamma &= \pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\end{aligned} \tag{1}$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zusammen gehören; wählt man die oberen, so beziehen sich diese Ausdrücke auf jenen Theil der Normale, welcher mit der $z$-Axe einen spitzen Winkel bildet.

Hiemit werden die Gleichungen der Normale:

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0. \tag{2}$$

Häufig ist die Gleichung der krummen Fläche in unentwickelter Form:

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben. Differenzirt man dieselbe partiell nach $x$ und $y$, so kommt:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0,$$

welche Gleichungen die Werthe der partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dz}, \quad \frac{dz}{dy} = q = -\frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz}$$

darbieten. Durch Substitution derselben in die vorhergehenden Gleichungen erhält man als Gleichung der tangirenden Ebene:

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} + (\zeta - z)\frac{dF}{dz} = 0; \tag{3}$$

als Gleichungen der Normale:

$$(\xi - x)\frac{dF}{dz} - (\zeta - z)\frac{dF}{dx} = 0, \quad (\eta - y)\frac{dF}{dz} - (\zeta - z)\frac{dF}{dy} = 0; \tag{4}$$

endlich für die Neigungswinkel der Normale gegen die Coordinatenaxen:

$$\cos\alpha = \frac{1}{N}\cdot\frac{dF}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{1}{N}\cdot\frac{dF}{dy}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{N}\cdot\frac{dF}{dz}, \tag{5}$$

wo der Kürze wegen

$$N = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

gesetzt ist.

Eine jede durch die Normale gelegte Ebene heisst Normalebene und der Durchschnitt derselben mit der krummen Fläche ein Normalschnitt; Schnitte der Fläche mit anderen Ebenen werden schiefe Durchschnitte genannt.

## II. Ueber die Berührungen von verschiedener Ordnung zwischen krummen Flächen.

**396.** Betrachten wir zwei durch die Gleichungen:

$$z = f(x, y) \ldots (1), \quad Z = F(X, Y) \ldots (2)$$

vorgestellte krumme Flächen und nehmen wir an, dass dieselben einen gemeinschaftlichen Punkt $M$ besitzen. Die Bedingung der Existenz eines solchen Punktes wird durch die Gleichung

$$f(x, y) = F(x, y)$$

ausgedrückt, da diesem Punkte offenbar in beiden Flächen dieselben Coordinatenwerthe angehören.

Es sei nun $P$ (Fig. 49) die Projection des gemeinschaftlichen Punktes $M$ auf die Ebene der $xy$; ferner seien $x = OQ$, $y = PQ$, $z = Z = PM$ die Coordinaten von $M$; lassen wir $x$ in $x + h$, $y$ in $y + k$ übergehen (wo also $h = Pr$, $k = rp$ ist), so rückt der Punkt $P$ nach $p$ und ein in $p$ auf der Ebene der $xy$ errichtetes Perpendikel wird nunmehr im Allgemeinen die beiden Flächen in zwei Punkten $m$ und $n$ schneiden. Denken wir uns endlich durch die beiden Perpendikel $PM$ und $pm$ eine Ebene gelegt, so ist die Lage derselben offenbar durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{rp}{Pr} = \frac{k}{h} = \omega \tag{3}$$

bestimmt, wenn wir mit $\varphi$ den Neigungswinkel derselben gegen die Ebene der $xy$ bezeichnen.

Diese Ebene wird nun die beiden Flächen in zwei krummen Linien schneiden, und man schreibt den beiden Flächen im Punkte $M$ eine Berührung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung zu, wenn die besagten Durchschnittslinien bei jeder Lage der Ebene $PpMm$ (d. i. für jeden beliebigen Werth von $\omega$) sich nach der

$n^{ten}$ **Ordnung berühren**, wozu bekanntlich erfordert wird, dass der Abstand $mn$ eine kleine Grösse der $(n+1)^{ten}$ Ordnung sei, unter $h$ und $k$ kleine Grössen der $1^{ten}$ Ordnung verstanden.

Es ist nun dem Taylor'schen Lehrsatze zufolge:

$$pm = z + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}k^2\right\} + \ldots,$$

$$pn = Z + \frac{dZ}{dx}h + \frac{dZ}{dy}k + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2Z}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2Z}{dx\,dy}hk + \frac{d^2Z}{dy^2}k^2\right\} + \ldots,$$

somit, da $mn = pn - pm$, und für den gemeinschaftlichen Punkt $Z = z$ ist:

$$mn = \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dz}{dy}\right)k$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2Z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy} - \frac{d^2z}{dx\,dy}\right)hk + \left(\frac{d^2Z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right)k^2\right]$$
$$+ \ldots$$

Sollen sich nun die beiden Flächen nach der $1^{ten}$ Ordnung berühren, so muss der Ausdruck von $mn$ in Bezug auf $h$ und $k$ eine Grösse $2^{ter}$ Ordnung werden, und somit

$$\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dz}{dy}\right)k = 0$$

oder

$$\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dz}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

sein und zwar für jeden Werth von $\omega = \operatorname{tg}\varphi$, wozu erfordert wird, dass beide Glieder dieser Gleichung, jedes für sich, verschwinden. Eine Berührung der $1^{ten}$ Ordnung findet demnach in einem Punkte $M$ statt, wenn die diesem Punkte entsprechenden Werthe von $x$ und $y$ den drei Gleichungen:

$$z = Z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dZ}{dy} \tag{4}$$

Genüge leisten.

Die Berührung erhebt sich zur $2^{ten}$ **Ordnung**, wenn der Ausdruck von $mn$ in Bezug auf $h$ und $k$ eine Grösse $3^{ter}$ Ordnung wird. Zu diesem Behufe muss nebst den Gleichungen (4) auch noch die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2Z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy} - \frac{d^2z}{dx\,dy}\right)hk + \left(\frac{d^2Z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right)k^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{d^2Z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy} - \frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \omega^2\left(\frac{d^2Z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0 \tag{5}$$

erfüllt werden, und zwar für jeden Werth von $\omega = \operatorname{tg}\varphi$, was nur möglich ist, wenn man hat:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2Z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2Z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dy^2}. \tag{6}$$

Die Gleichungen (4) und (6), sechs an der Zahl, drücken demnach die Bedingungen aus, welchen die Coordinaten des Punktes Genüge leisten müssen, in welchem die beiden Flächen eine Berührung der $2^{\text{ten}}$ Ordnung eingehen sollen.

Wie man auf diesem Wege weiter gehen kann, ist klar, und man sieht leicht, dass eine Berührung der $n^{\text{ten}}$ Ordnung an die Erfüllung von $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ Bedingungsgleichungen gebunden ist.

Wie bei den Berührungen der Curven ist auch hier gewöhnlich die eine Fläche vollständig gegeben, die andere nur ihrer Gattung nach, und die Aufgabe besteht wieder darin, die constanten Parameter der letzteren so zu bestimmen, dass sie mit der gegebenen Fläche in einem gegebenen Punkte eine Berührung von bestimmter Ordnung eingehe.

Es sei z. B. die zweite Fläche eine Ebene:

$$Z = aX + bY + c,$$

welche die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkte $x, y, z$ nach der $1^{\text{ten}}$ Ordnung berühren soll. Aus der Gleichung der Ebene zieht man die Differenzialquotienten:

$$\frac{dZ}{dX} = a, \quad \frac{dZ}{dY} = b,$$

und hat demnach in Folge der Gleichungen (4):

$$a = \frac{dz}{dx} = p, \quad b = \frac{dz}{dy} = q,$$

wenn man mit $p$ und $q$ die aus der Gleichung der Fläche: $z = f(x, y)$ gezogenen partiellen Differenzialquotienten bezeichnet. Hiemit wird die Gleichung der Ebene:

$$Z = pX + qY + c.$$

Da aber für $X = x$ und $Y = y$ auch $Z = z$ sein muss, so besteht die Gleichung:

$$z = px + qy + c,$$

und man erhält durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

als Gleichung der berührenden Ebene, welche, wie man sieht, mit Gl. (3), §. 394, übereinstimmt. Man bemerkt zugleich, dass die Berührung der $1^{\text{ten}}$ Ordnung die höchste ist, welche zwischen einer Ebene und einer krummen Fläche stattfinden kann, da die Gleichung

der Ebene nur drei constante Parameter enthält, über welche man verfügen kann.

**397.** Betrachten wir noch die Berührungen, welche eine Kugel mit einer durch die Gleichung:

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

bestimmten krummen Fläche eingehen kann. Der Kürze wegen wollen wir uns für die aus dieser Gl. (1) gezogenen partiellen Differenzialquotienten der folgenden, üblichen Bezeichnungen bedienen:

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

welche Grössen demnach als bekannt zu betrachten sind. Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, den Halbmesser mit $\varrho$, so ist ihre Gleichung:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \varrho^2. \tag{2}$$

Soll nun diese Kugel die Fläche (1) im Punkte $x$, $y$, $z$ nach der 1ten Ordnung berühren, so wird erfordert, dass die Coordinaten dieses Punktes der Gl. (2) Genüge leisten und den aus dieser Gleichung gezogenen partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ beziehungsweise mit $p$ und $q$ einerlei Werth ertheilen. Durch Differenziation der Gl. (2) erhalten wir nun:

$$\alpha - x + (\gamma - z)\frac{dz}{dx} = 0, \quad \beta - y + (\gamma - z)\frac{dz}{dy} = 0, \tag{m}$$

somit, wenn wir $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ setzen:

$$\alpha - x + (\gamma - z)\,p = 0, \quad \beta - y + (\gamma - z)\,q = 0. \tag{3}$$

Die drei Gleichungen (2) und (3), in welchen $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, enthalten somit die Bedingungen einer Berührung 1ter Ordnung. Man findet aus denselben leicht:

$$\alpha - x = -\frac{p\varrho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \beta - y = -\frac{q\varrho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\gamma - z = \frac{\varrho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \tag{4}$$

und diese Formeln bestimmen die Coordinaten des Mittelpunktes der gesuchten Kugel, sobald der Halbmesser $\varrho$ bekannt ist. Da jedoch diese letztere Grösse an eine Bedingung weiter nicht gebunden ist, und daher nach Belieben angenommen werden darf, so gibt es unendlich viele Kugelflächen, welche mit der Fläche in dem gegebenen Punkte in einer Berührung der 1ten Ordnung stehen.

Die Mittelpunkte aller dieser Kugeln liegen in der dem Berührungspunkte angehörigen Normale der Fläche. Man erkennt diess sogleich aus den Gl. (3), welche — wenn man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ wegen der Unbestimmtheit von $\varrho$ als veränderliche Coordinaten betrachtet — mit den Gleichungen der Normale der Fläche im Punkte $x$, $y$, $z$ [Gl. (2), §. 395] identisch sind.

**398.** Da die Herstellung einer Berührung der 2ten Ordnung zwischen zwei krummen Flächen die Erfüllung von 6 Bedingungsgleichungen erheischt, die Gleichung der Kugel aber nur vier constante Parameter enthält, über welche wir nach Belieben verfügen können, so ist es im Allgemeinen nicht möglich, zu einem gegebenen Punkte einer krummen Fläche eine Kugel zu construiren, welche die Fläche daselbst nach der 2ten Ordnung berührt. Es gibt also für einen bestimmten Punkt einer krummen Fläche im Allgemeinen keine Krümmungs- oder Osculations-Kugel, welche die Krümmungskreise sämmtlicher durch den Punkt auf der krummen Fläche gezogenen krummen Linien enthielte.

Immerhin aber kann man, da die Herstellung einer Berührung der 1ten Ordnung zwischen der Fläche und der Kugel einen Parameter der letzteren, den Halbmesser $\varrho$ unbestimmt lässt, durch gehörige Wahl desselben noch einer Bedingungsgleichung Genüge leisten. Wir wählen hiezu die Gl. 5, §. 396:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}-r\right)+2\,\omega\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}-s\right)+\omega^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}-t\right)=0. \qquad (5)$$

Hiedurch wird, wie man sieht, in dem Ausdrucke von $mn$ [§. 396] die Summe der Glieder 2ter Ordnung zum Verschwinden gebracht, und somit allerdings eine Berührung 2ter Ordnung zwischen Kugel und Fläche herbeigeführt, jedoch nur in der durch die Grösse $\omega = \operatorname{tg}\varphi$ bestimmten Richtung.

Differenzirt man nun die 1te der Gl. ($m$) nochmals nach $x$, die 2te nach $y$, so erhält man:

$$-1+(\gamma-z)\frac{d^2z}{dx^2}-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=0,$$

$$-1+(\gamma-z)\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=0,$$

und wenn man die 1te der Gl. ($m$) nach $y$, oder die 2te nach $x$ differenzirt:

$$(\gamma-z)\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}=0.$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man sofort mit Rücksicht auf die durch die Gl. ($m$) dargebotenen Werthe der 1ten Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{(\alpha-x)^2+(\gamma-z)^2}{(\gamma-z)^3},\quad \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}{(\gamma-z)^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{(\alpha-x)(\beta-y)}{(\gamma-z)^3}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gl. (5) und setzt, wie es die schon oben aufgestellten Bedingungsgleichungen (3) erfordern:

$$\alpha-x=-p(\gamma-z),\quad \beta-y=-q(\gamma-z), \tag{6}$$

so erhält man zur Bestimmung von $\gamma-z$ die Gleichung:

$$\left(\frac{p^2+1}{\gamma-z}-r\right)+2\omega\left(\frac{pq}{\gamma-z}-s\right)+\omega^2\left(\frac{q^2+1}{\gamma-z}-t\right)=0,$$

aus welcher:

$$\gamma-z=\frac{1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2}{r+2\omega s+\omega^2 t} \tag{7}$$

folgt. Werden endlich die durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmten Werthe von $\alpha-x$, $\beta-y$, $\gamma-z$ in die Gl. (2) der Kugel substituirt, so ergibt sich für den Halbmesser derselben folgender Ausdruck:

$$\varrho=\frac{1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2}{r+2\omega s+\omega^2 t}\sqrt{p^2+q^2+1}. \tag{8}$$

Fassen wir nun die Bedeutung der soeben durch die Gleichungen (6), (7) und (8) bestimmten Berührungs-Kugel näher in's Auge.

Es sei (Fig. 50) $M$ der gegebene Punkt ($x, y, z$) der krummen Fläche, und $TT'$ eine die Fläche in diesem Punkte berührende Gerade, deren Projection $UV$ auf die Ebene der $xy$ mit der Axe der $x$ den Winkel $\varphi=\text{arc tg}\,\omega$ einschliesse. Denken wir uns nun die durch die Gl. (6), (7) und (8) bestimmte, die Fläche im Punkte $M$ berührende Kugel construirt, und durch die Tangente $TT'$ eine auf die Ebene der $xy$ senkrechte Ebene $TT'UV$ gelegt, so wird, vermöge der den genannten Gleichungen zu Grunde liegenden Bedingungen, diese Ebene die Fläche in einer krummen Linie $A'B'$, die Kugel aber in einem Kreise $a'b'$ schneiden, welcher die Curve $A'B'$ nach der 2ten Ordnung berührt.

Demzufolge ist der Kreis $a'b'$ der Krümmungskreis und dessen Halbmesser der Krümmungshalbmesser des durch die Ebene $TV$ erzeugten Schnittes $A'B'$ der krummen Fläche. Dieser Krümmungshalbmesser steht mit dem Halbmesser $\varrho$ der Kugel in einer einfachen Beziehung. Es sei nämlich $N$ der Mittelpunkt der Kugel, dessen

Coordinaten durch die Gl. (6) und (7) bestimmt sind, so ist $MN = \varrho$, und ein aus $N$ auf die schneidende Ebene $TV$ gefälltes Perpendikel $NN'$ trifft offenbar diese Ebene in dem Mittelpunkte $N'$ des Krümmungskreises $a'b'$, so dass $MN' = r$ der gesuchte Krümmungshalbmesser ist. Bezeichnet man also den Winkel, welchen die beiden Halbmesser $\varrho$ und $r$ einschliessen mit $\lambda$, so hat man aus dem bei $N'$ rechtwinkeligen Dreiecke $MNN'$:

$$r = \varrho \cos \lambda. \tag{9}$$

Der Halbmesser $\varrho$ der Berührungskugel hängt, wie aus Gl. (8) erhellt, nur von der Lage des Punktes $M$ auf der Fläche und der Richtung der Tangente $TT'$ ab, nicht aber von dem Winkel $\lambda$; er bleibt demnach unverändert, wenn sich die schneidende Ebene $TV$ um die Tangente $TT'$ dreht. Setzt man daher $\lambda = 0$, wodurch die Ebene $TV$ mit der Normalebene $TW$ zusammenfällt und der Schnitt $A'B'$ in den Normalschnitt $AB$ [§. 395] übergeht, so folgt aus (9):

$$r = \varrho,$$

woraus erhellt, dass der durch Gl. (8) bestimmte Halbmesser $\varrho$ der Krümmungshalbmesser des durch die Tangente $TT'$ geführten Normalschnittes der Fläche in dem Berührungspunkte ist.

Die Gl. (9) lässt sich nunmehr auch in folgender Weise ausdrücken: der Krümmungshalbmesser irgend eines schiefen Schnittes [§. 395] ist die Projection (auf die Ebene dieses Schnittes) des Krümmungshalbmessers des durch dieselbe Tangente geführten Normalschnittes.

Auch kann man diesen merkwürdigen von Meusnier herrührenden Lehrsatz in folgender Weise aussprechen: denkt man sich aus dem Punkte $N$ der Normale (Fig. 50) mit dem Krümmungshalbmesser $\varrho = NM$ des durch irgend eine Tangente $TT'$ geführten Normalschnittes die Berührungskugel construirt, so schneidet jede durch die Tangente $TT'$ gelegte Ebene diese Kugel in einem Kreise, welcher der Krümmungskreis des durch dieselbe Ebene mit der Fläche erzeugten Schnittes ist.

## III. Ueber die Krümmung der Flächen.

**399.** Die Krümmung irgend einer Fläche in einem gegebenen Punkte kann nicht — wie es bei Curven mittelst des Berührungskreises $2^{ter}$ Ordnung geschieht — durch die Berührungskugel $2^{ter}$ Ordnung an dem gegebenen Punkte gemessen werden, weil eine solche Kugel, wie aus dem vorhergehenden §. bekannt ist, im Allgemeinen

nicht existirt. Dies folgt übrigens schon aus dem Umstande, dass eine Kugel rings um einen Punkt nach allen Richtungen dieselbe Krümmung hat, was bei anderen Flächen im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Schneiden wir aber die Fläche mittelst einer durch den gegebenen Punkt $x, y, z$ gelegten Normalebene, so werden wir die Krümmung dieses Normalschnittes in dem gegebenen Punkte als die Krümmung der Fläche daselbst in der Richtung des Schnittes anzusehen haben, und durch Betrachtung einer Reihe von Normalschnitten zu einer klaren Vorstellung von der Krümmung der Fläche in diesem Punkte gelangen.

Bezeichnen wir, wie früher, mit $\omega$ die trig. Tangente des Winkels, welchen die Projection auf die $xy$-Ebene irgend einer durch den Punkt $x, y, z$ der Fläche gezogenen Tangente mit der Axe der $x$ einschliesst, und legen wir durch diese Tangente eine Normalebene, so ist der Krümmungshalbmesser $\varrho$ des entsprechenden Normalschnittes [Gl. 8, §. 398]:

$$\varrho = \frac{1 + p^2 + 2pq\omega + (1 + q^2)\,\omega^2}{r + 2\,\omega s + \omega^2 t} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,. \qquad (1)$$

Die Relationen zwischen den Krümmungshalbmessern der verschiedenen Normalschnitte sind offenbar unabhängig von der Lage des Coordinatensystems; nehmen wir daher, um die Untersuchung zu vereinfachen, die $xy$-Ebene parallel zu der die Fläche im Punkte $x, y, z$ berührenden Ebene, so wird für diesen Punkt, wie aus der Gleichung der Berührungsebene leicht erhellt, $p = 0$, $q = 0$ und somit:

$$\varrho = \frac{1 + \omega^2}{r + 2\,\omega s + \omega^2 t}, \qquad (2)$$

wo nun $\omega$ die trig. Tangente des Winkels ist, welchen die Ebene des Normalschnittes selbst mit der $xz$-Ebene einschliesst. Geben wir dieser Grösse successive verschiedene Werthe, d. h. drehen wir die schneidende Normalebene um die Normale, so ändert sich auch $\varrho$ oder die Krümmung des Schnittes; da aber dieselbe offenbar nicht beständig zu- oder abnehmen kann, so wollen wir zunächst diejenigen Werthe von $\omega$ suchen, welche dem Krümmungshalbmesser einen g r ö s s t e n oder k l e i n s t e n Werth ertheilen. Setzen wir zu diesem Ende den aus (2) folgenden 1ten Differenzialquotienten:

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{2\left[\omega^2 s + \omega\,(r - t) - s\right]}{(r + 2\,\omega s + \omega^2 t)^2}$$

der Nulle gleich, so erhalten wir die Gleichung:

$$\omega^2 + \omega \frac{r - t}{s} - 1 = 0, \tag{3}$$

welche für $\omega$ die beiden Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{t - r + \sqrt{(r - t)^2 + 4 s^2}}{2 s} \quad \text{und} \\ \omega_2 &= \frac{t - r - \sqrt{(r - t)^2 + 4 s^2}}{2 s} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

darbietet, von welchen der erste einem Maximum, der zweite einem Minimum der Krümmung entspricht, wie man sich durch Betrachtung des 2ten Differenzialquotienten leicht überzeugt.

Aus der quadratischen Form der Gl. (3) folgt zunächst, dass es unter allen durch einen gegebenen Punkt einer Fläche gelegten Normalschnitten nur zwei gibt, deren Krümmung beziehungsweise grösser oder kleiner ist, als jene aller übrigen; diese zwei Normalschnitte der grössten und kleinsten Krümmung werden Hauptschnitte genannt.

Es sind $\omega_1$ und $\omega_2$ die Tangenten der Winkel, welche diese beiden Hauptschnitte mit der $xz$-Ebene einschliessen, und vermöge der Gl. (3) ist $\omega_1 \omega_2 = -1$, woraus man erkennt [§. 167, I. Bd.], dass die beiden Hauptschnitte aufeinander senkrecht stehen. Es wird daher in einem jeden Punkte einer krummen Fläche die Richtung der kleinsten Krümmung von jener der grössten Krümmung unter einem rechten Winkel geschnitten.

Die Halbmesser dieser grössten und kleinsten Krümmung, die sogenannten Hauptkrümmungshalbmesser, ergeben sich durch Substitution der Werthe von $\omega_1$ und $\omega_2$ aus (4) in die Gl. (2), oder einfacher auf folgendem Wege. Schreiben wir die Gl. (2) in der Form:

$$\varrho\,(r + 2\,\omega s + \omega^2 t) = 1 + \omega^2$$

und differenziren wir dieselbe nach $\varrho$ und $\omega$, indem wir, um die Bedingung des Maximums und Minimums einzuführen, $\frac{d\varrho}{d\omega} = 0$ setzen, so erhalten wir:

$$\varrho\,(s + \omega t) = \omega,$$

welche Gleichung mit $\omega$ multiplicirt und von der vorhergehenden abgezogen, auf folgende

$$\varrho\,(r + \omega s) = 1$$

führt. Durch Elimination von $\omega$ aus den beiden letzteren Gleichungen erhalten wir nun:

$$\varrho^2\,(rt - s^2) - \varrho\,(r + t) + 1 = 0, \tag{5}$$

eine Gleichung, deren Wurzeln, welche wir im folgenden mit $R_1$ und $R_2$ bezeichnen wollen, der kleinste und grösste Werth des Krümmungshalbmessers sind. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{r + t - \sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}{2(rt - s^2)}, \\ R_2 &= \frac{r + t + \sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}{2(rt - s^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

**400.** Da die Ebenen der beiden Hauptschnitte auf einander senkrecht stehen, so kann man dieselben als coordinirte Ebenen der $xz$ und $yz$ annehmen; lassen wir also etwa die Ebene der $xz$ mit jenem Hauptschnitte zusammenfallen, auf welchen sich $\omega_1$ und $R_1$ beziehen, so wird $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \infty$, und da vermöge der Gl. (3) $\omega_1 + \omega_2 = -\frac{r-t}{s}$ ist, und da die Grössen $r$ und $t$ im Allgemeinen nicht unendlich sind, so muss für diese Lage des Coordinatensystems $s = 0$ werden. Hiemit erhalten wir aus (6) für die Hauptkrümmungshalbmesser folgende Werthe:

$$R_1 = \frac{1}{r}, \quad R_2 = \frac{1}{t}. \tag{7}$$

Für irgend einen andern Normalschnitt, dessen Ebene mit jener der $xz$ ($R_1$) den Winkel $\alpha$ einschliesst, erhalten wir den Krümmungshalbmesser $\varrho$ aus (2), $s = 0$ setzend:

$$\varrho = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}{r + t.\operatorname{tg}\alpha^2},$$

oder, da $1 + \operatorname{tg}\alpha^2 = \sec\alpha^2 = \frac{1}{\cos\alpha^2}$ ist:

$$\frac{1}{\varrho} = r\cos\alpha^2 + t\sin\alpha^2,$$

d. i. mit Rücksicht auf (7):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1}\cos\alpha^2 + \frac{1}{R_2}\sin\alpha^2; \tag{8}$$

eine merkwürdige, von Euler herrührende Formel, mittelst welcher der Krümmungshalbmesser $\varrho$ irgend eines Normalschnittes leicht berechnet werden kann, wenn man den Winkel $\alpha$, welchen er mit einem der beiden Hauptschnitte einschliesst, und die Krümmungshalbmesser dieser letzteren kennt.

Bezeichnet man mit $\varrho'$ den Krümmungshalbmesser jenes gegen die Ebene der $xz$ um den Winkel $\alpha + 90^0$ geneigten Normalschnittes, welcher auf dem soeben betrachteten, dessen Halbmesser $\varrho$ ist, senkrecht steht, so ist, zufolge der Gl. (8):

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{R_1}\sin\alpha^2 + \frac{1}{R_2}\cos\alpha^2;$$

aus der Verbindung dieser Gleichung mit jener (8), folgt:

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}, \tag{9}$$

und diese Gleichung zeigt, dass die Summe der Krümmungen je zweier aufeinander senkrechten Normalschnitte (d. i. ihrer reciproken Krümmungshalbmesser) eine constante Grösse ist.

**401.** Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen entwickelten Ausdrücke für die Richtung der grössten und kleinsten Krümmung und die Hauptkrümmungshalbmesser setzen eine bestimmte Lage des Coordinatensystems voraus; um hiefür allgemeine Ausdrücke zu erhalten, kehren wir zur Gl. (1) [§. 399] zurück. Entwickelt man den Differenzialquotienten $\frac{d\varrho}{d\omega}$, und setzt denselben gleich Null, so gelangt man zur Gleichung:

$$\omega^2\left[(1+q^2)s-pqt\right]+\omega\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]$$
$$-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0, \tag{10}$$

deren Wurzeln $\omega_1$ und $\omega_2$ die Richtungen der Hauptschnitte bestimmen.

Schreibt man ferner die Gl. (1) in der Form:

$$\varrho(r+2\omega s+\omega^2 t)=\left[1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2\right]\sqrt{p^2+q^2+1},$$

differenzirt man dieselbe nach $\varrho$ und $\omega$, und setzt $\frac{d\varrho}{d\omega}=0$, so erhält man:

$$\varrho(s+\omega t)=\left[pq+(1+q^2)\omega\right]\sqrt{p^2+q^2+1},$$

welche Gleichung mit $\omega$ multiplicirt und von der vorhergehenden abgezogen, die folgende gibt:

$$\varrho(r+\omega s)=\left[1+p^2+pq\omega\right]\sqrt{p^2+q^2+1}.$$

Eliminirt man nun aus den zwei letzten Gleichungen $\omega$, und schreibt wieder $R$ statt $\varrho$, so findet man:

$$R^2(rt-s^2)-R\left[t(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)\right]\sqrt{p^2+q^2+1}$$
$$+(p^2+q^2+1)^2=0 \tag{11}$$

eine Gleichung, deren Wurzeln die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $R_1$ und $R_2$ sind. Hat man diese berechnet, so findet man mittelst der Gl. (8) den Krümmungshalbmesser $\varrho$ jedes anderen Normalschnittes welcher gegen den zu $R_1$ gehörigen Hauptschnitt unter dem Winkel $\alpha$ geneigt ist.

Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen folgt:

$$\omega=\frac{\varrho s-pqk}{(1+q^2)k-\varrho t}=\frac{(1+p^2)k-\varrho r}{\varrho s-pqk}, \tag{12}$$

wo der Kürze wegen $\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = k$ gesetzt ist. Substituirt man hier der Reihe nach $R_1$ und $R_2$ statt $\varrho$, so erhält man ebenfalls die Richtungen der Hauptschnitte, nämlich die Tangenten $\omega_1$, $\omega_2$ der Winkel, unter welchen die Projectionen der Tangenten der Hauptschnitte auf die Ebene der $xy$, die Axe der $x$ schneiden.

**402.** Aus der Gl. (11) folgt nach bekannten Sätzen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{t(1 + p^2) - 2pqs + r(1 + q^2)}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man erkennt hieraus, dass die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $R_1$ und $R_2$ gleiches Zeichen haben, wenn $rt - s^2 > 0$; dasselbe Zeichen kommt aber sodann vermöge der Gl. (8) den Krümmungshalbmessern sämmtlicher Normalschnitte zu, und die Fläche liegt daher in der Gegend des betrachteten Punktes gänzlich über oder unter der Berührungsebene. Beim Ellipsoide, dem Hyperboloide mit zwei Hölungen und dem elliptischen Paraboloide findet diese Eigenschaft für jeden Punkt der Fläche statt.

$R_1$ und $R_2$ sind von entgegengesetztem Vorzeichen, wenn $rt - s^2 < 0$; in diesem Falle gibt es daher Normalschnitte, welche über der Berührungsebene, andere welche unter derselben liegen, und die Krümmung der Fläche ist in beiden Partieen eine entgegengesetzte. Lässt man z. B. $R_2$ negativ sein, so verwandelt sich die Gl. (8) in:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1} \cos \alpha^2 - \frac{1}{R_2} \sin \alpha^2;$$

setzt man hier $\varrho = \infty$, so wird $\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$, wodurch zwei Richtungen bestimmt werden, in welchen die Krümmung der Fläche (wegen $\varrho = \infty$) Null ist, es sind dies jene Richtungen, welche die auf entgegengesetzten Seiten der Berührungsebene liegenden Flächentheile begrenzen, und in welchen die Fläche von der Berührungsebene geschnitten wird.

Beispiele hiezu bieten das Hyperboloid mit einer Hölung und das hyperbolische Paraboloid und zwar in jedem Punkte der Fläche.

Ist $rt - s^2 = 0$, so ist einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross, und somit die Krümmung der Fläche in dem zugehörigen Hauptschnitte Null; diess tritt z. B. bei den Cylinder- und Kegelflächen, und überhaupt bei den sogenannten abwickelbaren

Flächen ein, deren allgemeiner Charakter eben durch die Differenzialgleichung $2^{ter}$ Ordnung: $rt - s^2 = 0$ ausgedrückt wird.

Die Hauptkrümmungshalbmesser sind der absoluten Grösse nach gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, wenn die Bedingungsgleichung:

$$t(1+p^2) - 2pqs + r(1+q^2) = 0$$

erfüllt ist.

Löst man endlich die Gl. (11) für $R$ auf und setzt die Grösse unter dem Wurzelzeichen $= 0$, so erhält man die Gleichung:

$$\{t(1+p^2) - 2pqs + r(1+q^2)\}^2 - 4(rt - s^2)(p^2+q^2+1) = 0,$$

als Bedingung, dass die Hauptkrümmungshalbmesser sowohl der Grösse als dem Zeichen nach gleich seien.

Diese Gleichung lässt sich auf die Form:

$$\left[t(1+p^2) - r(1+q^2) + 2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)\right]^2 + 4k^2\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2 = 0$$

bringen (wo der Kürze wegen $k^2 = p^2 + q^2 + 1$), und ist somit gleichbedeutend mit dem Systeme der zwei Gleichungen:

$$\frac{pqr}{1+p^2} - s = 0, \quad t(1+p^2) - r(1+q^2) = 0, \tag{13}$$

oder

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}. \tag{14}$$

Ist aber $R_1 = R_2$, so ist vermöge der Gl. (8) auch $\varrho = R_1 = R_2$ für jeden Werth von $\alpha$; d. h. ein solcher Punkt der Fläche hat die Eigenschaft, dass alle durch denselben geführte Normalschnitte in diesem Punkte gleiche Krümmung besitzen. Man nennt dergleichen besondere Punkte der krummen Flächen Nabelpunkte und findet dieselben durch Verbindung der Gleichungen (13) oder (14) mit der Gleichung der Fläche.

**403.** Zur Erläuterung der vorgetragenen Sätze wollen wir dieselben auf das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

anwenden und hiebei, was offenbar immer gestattet ist, $a > b > c$ voraussetzen. Man findet durch Differenziation dieser Gleichung:

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

$$r = -\frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}.$$

Mit diesen Werthen erhält man, wenn noch für $z^2$ der aus der Gleichung der Fläche gezogene Werth eingeführt wird, nach gehöriger Reduction:

$$(1 + p^2) s - pqr = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3} \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right),$$

$$(1 + q^2) s - pqt = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3} \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right),$$

$$(1 + q^2) r - (1 + p^2) t = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} \left[\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 - (a^2 - b^2)\right].$$

Die Gleichungen (13) zur Bestimmung der Nabelpunkte werden somit:

$$xy = 0, \text{ und } \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 - (a^2 - b^2) = 0,$$

welche die reellen Auflösungen:

$$y = 0, \quad x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$$

darbieten; das Ellipsoid hat folglich vier Nabelpunkte, welche in einer durch seine grösste und kleinste Axe gelegten Ebene sich befinden.

Denken wir uns in einem der Nabelpunkte eine Berührungsebene an das Ellipsoid gelegt, und bezeichnen den Neigungswinkel derselben gegen die $xy$-Ebene mit $\theta$, so ist — wenn wir beachten, dass dieser Winkel $\theta$ mit jenem übereinstimmt, unter welchem die Normale der Axe der $z$ begegnet — nach Gl. (1), §. 395, allgemein:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \text{ oder } \sin\theta = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 + 1}},$$

somit, wenn wir für $p^2$ und $q^2$ die auf einen Nabelpunkt bezüglichen Werthe:

$$p^2 = \frac{c^2 (a^2 - b^2)}{a^2 (b^2 - c^2)}, \quad q = 0$$

einführen:

$$\sin\theta = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Hieraus folgt [vgl. §. 301, I], dass die Berührungsebenen des Ellipsoides in den vier Nabelpunkten parallel sind zu jenen Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden.

Bei dem Rotationsellipsoide fallen die Nabelpunkte mit den Endpunkten der Rotationsaxe zusammen, wie aus obigen Ausdrücken sogleich erhellt, wenn man $a = b$ setzt.

Entwickeln wir noch die Ausdrücke der Hauptkrümmungshalbmesser für einen gegebenen Punkt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids, dessen Umdrehungsaxe $b$ mit der Axe der $z$, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammenfallen möge, und dessen Gleichung daher ist:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Da sämmtliche durch die Umdrehungsaxe gelegte Ebenen die Fläche in congruenten Ellipsen (den Meridianen) schneiden, so können wir die Rechnung für einen Punkt führen, welcher in der Ebene der $xz$ liegt. Hiedurch wird $y = 0$, und wenn wir zugleich in obigen Ausdrücken der Differenzialquotienten $a$ statt $b$ und $b$ statt $c$ schreiben, so erhalten wir:

$$p = -\frac{b^2 x}{a^2 z}, \quad q = 0, \quad r = -\frac{b^4}{a^2 z^3}, \quad s = 0, \quad t = -\frac{b^2}{a^2 z};$$

durch Substitution dieser Werthe in die Gl. (11) ergibt sich, wenn $a^2 - b^2 = e^2$ gesetzt wird:

$$R^2 + \frac{(2a^4 - e^2x^2)\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{a^4 b} R + \frac{(a^4 - e^2x^2)^2}{a^4 b^2} = 0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln:

$$R_1 = -\frac{(a^4 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}, \quad R_2 = -\frac{(a^4 - e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{b} \qquad (m)$$

die gesuchten Werthe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser sind. In dem Ausdrucke von $R_1$ erkennt man den Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridians [§. 371, 2], mit welchem, wie zu erwarten war und auch aus der Gl. 10, §. 401 leicht gefolgert werden kann, der eine Hauptschnitt zusammenfällt. Da $\frac{R_1}{R_2} = 1 - \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}$, und $\frac{e}{a}$, so wie $\frac{x}{a}$ echte Brüche sind, so ist immer $R_1 < R_2$, d. h. in jedem Punkte der Fläche ist die Krümmung in der Richtung des Meridians ein Maximum, jene senkrecht auf den Meridian ein Minimum.

Führt man statt der linearen Excentricität die numerische $\varepsilon$ ein, indem man setzt: $e^2 = a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$, und $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$, so nehmen die obigen Ausdrücke, abgesehen vom Zeichen, folgende Form an:

$$R_1 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^3}{1 - \varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_2 = \left(\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{1 - \varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Gleichung des in der Ebene der $xz$ liegenden elliptischen Meridians ist: $b^2x^2 + a^2z^2 = a^2b^2$; bezeichnet man nun den Neigungswinkel der Normale gegen die Axe der $x$ oder die Ebene der $xy$ mit $\varphi$, so hat man:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dx}{dz} = \frac{a^2z}{b^2x};$$

zieht man hieraus den Werth von $x^2$, indem man zugleich für $z^2$ seinen aus der Gleichung des Meridians folgenden Werth einsetzt, so findet man:

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{a^2 \cos\varphi^2}{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von $x^2$ in die obigen Ausdrücke für $R_1$ und $R_2$ erhält man nach leichter Reduction:

$$R_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_2 = \frac{a}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Ausdrücke finden in der Geodäsie häufige Anwendung. Die Erde hat die Gestalt eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugten Ellipsoids (Sphäroids), und obige Ausdrücke geben die beiden Hauptkrümmungshalbmesser (im Meridian und senkrecht auf denselben) für einen Punkt des Sphäroids, dessen geographische Breite oder Polhöhe $\varphi$ ist.

Der Krümmungshalbmesser $R$ irgend eines andern Normalschnittes, welcher mit dem Meridiane den Winkel $\alpha$ (das Azimuth der Richtung des Schnittes) einschliesst, ist nach §. 400, Gl. (8):

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\alpha^2}{R_1} + \frac{\sin\alpha^2}{R_2},$$

oder, wenn man obige Werthe von $R_1$ und $R_2$ substituirt:

$$R = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2+\varepsilon^2\cos\varphi^2\cos\alpha^2)\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}.$$

**404.** Es seien $M$, $M'$ zwei unendlich nahe liegende Punkte auf einer Fläche; deren Coordinaten beziehungsweise $x, y, z$ und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Denken wir uns durch beide Punkte die Normalen gezogen und bestimmen wir den Durchschnittspunkt derselben.

Die Gleichungen der durch $M$ geführten Normale sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi - x + p(\zeta - z) = 0 = N \\ \eta - y + q(\zeta - z) = 0 = N'; \end{aligned}\right\} \quad (m)$$

jene der zweiten Normale gehen aus diesen hervor, wenn wir $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ an die Stelle von $x, y, z$ treten lassen, und haben daher die Form: $N + dN = 0$ und $N' + dN' = 0$; erwägt man aber,

dass zur Bestimmung des Durchschnittspunktes diese beiden Gleichungen mit den Gl. $(m)$ $[N = 0, N' = 0]$ zu verbinden sind, so erhellt sogleich, dass sich dieselben auf: $dN = 0$ und $dN' = 0$ reduciren. Diese ergeben sich durch Differenziation der Gl. $(m)$ nach $x$, $y$, $z$ und lauten demnach:

$$dx + pdz = (\zeta - z)\, dp$$
$$dy + qdz = (\zeta - z)\, dq,$$

oder, wenn man beachtet, dass vermöge der Bedeutung der Grössen $p, q, r, s, t$ [§. 397]:

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

ist:

$$\begin{aligned}(1 + p^2)\, dx + pqdy &= (rdx + sdy)(\zeta - z), \\ (1 + q^2)\, dy + pqdx &= (sdx + tdy)(\zeta - z).\end{aligned} \qquad (n)$$

Jene Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, welche den vier Gleichungen $(m)$ und $(n)$ Genüge leisten, sind die gesuchten Coordinaten des Durchschnittspunktes. Da aber die Anzahl der Gleichungen jene der Unbekannten um die Einheit überschreitet, so erhellt sogleich, dass die beiden Normalen sich nur dann schneiden werden, wenn der Punkt $M'$ gegen $M$ eine solche Lage hat, dass die durch Elimination von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ aus den Gleichungen $(m)$ und $(n)$ resultirende Bedingungsgleichung erfüllt ist.

Indem die Gleichungen $(n)$ die Grössen $\xi$ und $\eta$ nicht enthalten, so hat man nur $\zeta$ aus diesen Gleichungen zu eliminiren, um die erwähnte Bedingungsgleichung zu erhalten. Man findet:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [(1 + q^2)\, s - pqt] + \left(\frac{dy}{dx}\right) [(1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t] \\ - [(1 + p^2)\, s - pqr]\end{aligned}\right\} = 0. \quad (p)$$

Durch diese Gleichung, in welcher $p, q, r, s, t$ nur von der Lage des Punktes $M$ auf der Fläche abhängende, also gegebene Grössen bedeuten, ist — wie man sieht — das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$ bestimmt; denkt man sich das unendlich kleine Bogenstück $MM'$ auf die Ebene der $xy$ projicirt, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \omega$$

die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Projection mit der Axe der $x$ einschliesst, und die Gl. $(p)$ bestimmt demnach die Richtung, in welcher man von $M$ aus auf der Fläche fortgehen muss, um zu einem unendlich nahe liegenden Punkte zu gelangen, dessen Normale jene zum Punkte $M$ gehörige schneidet.

Da die Gleichung $(p)$ vom $2^{\text{ten}}$ Grade ist, so gibt es für jeden Punkt der Fläche zwei mit dieser Eigenschaft versehene Richtungen,

welche, wie aus der Identität der Gl. ($p$) mit der Gl. (10) [§. 401] unmittelbar folgt, mit den Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung zusammenfallen, und demnach so wie diese auf einander senkrecht stehen.

Man kann also von irgend einem Punkte $M$ einer Fläche aus in zwei aufeinander senkrechten Richtungen zu zwei benachbarten Punkten gelangen, welche der Bedingung Genüge leisten, dass ihre Normalen mit jener des Punktes $M$ in einer Ebene liegen und folglich dieselbe schneiden.

Geht man nun von $M$ aus etwa in der Richtung der grössten Krümmung zu dem benachbarten Punkte $M'$ über, dessen Normale jene des Punktes $M$ schneidet; von $M'$ abermals zu dem nächsten dieser Bedingung Genüge leistenden Punkte u. s. w., so erhält man auf der Fläche eine stetige Reihe von Punkten, welche eine Curve bilden, die den Namen Krümmungslinie führt. Da man in gleicher Weise von $M$ ausgehend in der Richtung der kleinsten Krümmung fortschreiten kann, so gibt es im Allgemeinen für jeden Punkt einer Fläche zwei Krümmungslinien, welche sich daselbst unter einem rechten Winkel begegnen. Denkt man sich sämmtliche Krümmungslinien auf der Fläche verzeichnet, so entstehen zwei Systeme von Zonen, durch welche die Fläche in unendlich kleine, krummlinige, vierseitige und rechtwinkelige Figuren getheilt wird.

Die Gl. ($p$) ist nichts anderes als die Differenzialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die Ebene der $xy$, aus welcher man, sobald die Gleichung der krummen Fläche selbst gegeben ist, die Gleichung der Projection in endlicher Form durch Integration findet.

Im Allgemeinen sind die Krümmungslinien Curven von doppelter Krümmung, und nur bei einzelnen Gattungen von Flächen erscheinen dieselben als ebene Curven. So z. B. bei den Rotationsflächen, deren Meridiane und Parallelen die beiden Systeme von Krümmungslinien bilden. Denn einerseits liegen sämmtliche Normalen, die zu Punkten eines und desselben Meridians gehören, in der Ebene dieses Meridians und müssen sich demnach nothwendig schneiden; anderseits begegnen die Normalen, welche zu Punkten desselben Parallels gehören, der Rotationsaxe in einem und demselben Punkte, und schneiden sich demnach ebenfalls. Bei den Cylinderflächen sind die geraden Erzeugungslinien und die darauf senkrechten ebenen Schnitte die Krümmungslinien.

**405.** Unter denjenigen Curven, welche auf einer krummen Fläche nach bestimmten Gesetzen construirt werden können, verdienen ihrer

praktischen Anwendung wegen die Niveaulinien und die Linien des stärksten Falles noch eine besondere Erwähnung.

Niveaulinien nennt man jene Curven, in welchen eine krumme Fläche von horizontalen Ebenen geschnitten wird. Lässt man daher die Ebene der $xy$ horizontal sein, so stellt das System der Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad z = \gamma$$

irgend eine Niveaulinie dar; durch Elimination von $z$ erhält man $F(x, y, \gamma) = 0$ als Gleichung der Projection der Niveaulinie auf die Ebene der $xy$.

Differenzirt man das obige System von Gleichungen, so kommt $dz = pdx + qdy$, und $dz = 0$, es ist daher

$$pdx + qdy = 0 \tag{1}$$

die gemeinschaftliche Differenzialgleichung der Projectionen der Niveaulinien auf die $xy$-Ebene. Die Differenzialquotienten $p$ und $q$ werden, wenn die Gleichung der Fläche in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben ist, gewöhnlich noch die Grösse $z$ enthalten, welche mit Hülfe der Gleichung der Fläche zu eliminiren ist.

Unter Linien des grössten Falles versteht man jene auf einer Fläche verzeichnete Curven, deren Neigung gegen die (horizontale) Ebene der $xy$ in jedem ihrer Punkte grösser ist, als die aller anderen durch diesen Punkt auf der Fläche gezogenen Curven. Geht man von irgend einem Punkte $M(x, y, z)$ der Fläche zu einem benachbarten $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ über, so steigt man in verticaler Richtung um die Höhe $dz$ auf oder ab, während man sich in horizontaler Richtung um das Stück $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ fortbewegt; die Grösse

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{pdx + qdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{p + qy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

drückt demnach die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des beschriebenen Bogenelementes $MM'$ gegen den Horizont aus; dieser Ausdruck ändert sich mit der willkürlichen Grösse $y' = \frac{dy}{dx}$, welche die Richtung des Elementes $MM'$ angibt, und wird daher für irgend einen Werth von $y'$ ein Maximum erreichen. Man findet diesen Werth $y' = \frac{q}{p}$, und diese Gleichung, oder

$$qdx - pdy = 0 \tag{2}$$

ist demnach die gemeinschaftliche Differenzialgleichung der Projectionen der Linien des stärksten Falles auf die Ebene der $xy$.

Aus der Vergleichung der Gleichungen (1) und (2) erhellt, dass die Niveaulinien und die Linien des stärksten Falles sich senkrecht durchschneiden.

## IV. Erzeugung der Flächen. Von den einhüllenden und abwickelbaren Flächen.

**406.** Wir haben schon in §. 271 u. f. f. die Erzeugung von Flächen durch, nach bestimmten Gesetzen erfolgende Bewegung von Curven betrachtet, und insbesondere die cylindrischen und conischen Flächen, die Rotations- und windschiefen Flächen ausführlicher erörtert. Diese Betrachtungen führen in ihrem weiteren Verfolge zu sehr allgemeinen Ergebnissen über die Natur der Flächen; wir wollen uns im Folgenden mit einigen der wesentlichsten noch in Kürze beschäftigen und zunächst über die oben erwähnten Flächen-Familien noch einige Bemerkungen folgen lassen.

Die Gleichung einer Cylinderfläche, deren Erzeugende zur Geraden $x = az$, $y = bz$ parallel sind, ist bekanntlich [§. 273]:

$$y - bz = f(x - az). \tag{1}$$

Differenzirt man diese Gleichung partiell in Bezug auf $x$ und $y$, so erhält man [§. 331] durch Elimination der willkürlichen Funktion als 1te Differenzialgleichung der Cylinderflächen:

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1, \tag{2}$$

welche Gleichung ausdrückt, dass sämmtliche Berührungsebenen zu einer festen Geraden: $x = az$, $y = bz$ parallel sind. In der That ist

$$(\xi - x)\frac{dz}{dx} + (\eta - y)\frac{dz}{dy} - (\zeta - z) = 0$$

die Gleichung der Berührungsebene [§. 394] und die Bedingung, dass diese zur festen Geraden $x = az$, $y = bz$ parallel sei, wird bekanntlich [Gl. (2), §. 257] durch die Gleichung

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$$

ausgedrückt.

Wenn die cylindrische Fläche eine durch die Gleichung $U = 0$ gegebene Fläche berühren soll, wie dies z. B. bei dem Probleme der Schatten der Fall ist, wenn der leuchtende Punkt unendlich weit entfernt ist, so ziehe man aus der Gleichung $U = 0$ die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ und substituire sie in die Gleichung (2); man erhält dadurch eine Gleichung $V = 0$, welche in Verbindung mit $U = 0$ der Berührungslinie des Cylinders und der Fläche $U = 0$ angehört, und demnach als Leitlinie gewählt werden kann.

Es sei z. B. die gegebene Fläche ein Ellipsoid, dessen Gleichung:

$$U = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0\,; \qquad (m)$$

die erzeugende Gerade möge zur Ebene der $yz$ parallel sein, so sind ihre Gleichungen in irgend einer ihrer Lagen:

$$x = \alpha, \; y = bz + \varphi(\alpha)\,. \qquad (n)$$

Aus $(m)$ erhält man $\frac{dz}{dx} = -\frac{C^2 x}{A^2 z}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{C^2 y}{B^2 z}$, welche Werthe in (2) substituirt, wegen $a = 0$, die Gleichung

$$V = \frac{bC^2 y}{B^2 z} + 1 = 0 \qquad (p)$$

darbieten. Die Gl. $(m)$ und $(p)$ sind sofort die Gleichungen der Berührungslinie, welche als Leitlinie dient. Eliminirt man demnach aus den vier Gleichungen $(m)$, $(n)$ und $(p)$ die Grössen $x$, $y$, $z$, so erhält man:

$$A^2 \varphi(\alpha)^2 + (\alpha^2 - A^2)(b^2 C^2 + B^2) = 0\,,$$

und hieraus durch Wiederherstellung der Werthe $\alpha = x$, $\varphi(\alpha) = y - bz$, die gesuchte Gleichung des das Ellipsoid berührenden Cylinders:

$$A^2 (y - bz)^2 + (x^2 - A^2)(b^2 C^2 + B^2) = 0\,.$$

Die allgemeine Gleichung einer Kegelfläche, deren Mittelpunkte die Coordinaten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entsprechen, ist [§. 275]:

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = f\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right); \qquad (3)$$

differenzirt man diese Gleichung partiell sowohl nach $x$, $z$, als auch nach $y$, $z$ und eliminirt aus den so gewonnenen zwei Gleichungen die willkürliche Funktion, so erhält man [§. 331] als 1te Differenzialgleichung der Kegelflächen:

$$z - \gamma = (x - \alpha)\frac{dz}{dx} + (y - \beta)\frac{dz}{dy}\,. \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist, sobald wir $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als laufende Coordinaten betrachten, die Gl. der Berührungsebene im Punkte $x$, $y$, $z$ der Fläche, und drückt demnach aus, dass alle Berührungsebenen einer Kegelfläche durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt oder Scheitel, gehen.

Die Aufgabe, die Gleichung des eine gegebene Fläche $U = 0$ berührenden Kegels zu finden, dessen Scheitel in einem gegebenen Punkte $S$ liegt, wird auf ähnliche Weise wie bei den Cylindern aufgelöst. Durch Substitution der aus der Gl. $U = 0$ gezogenen Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ in die Differenzialgleichung (4) der Kegelflächen ergibt sich eine Gleichung $V = 0$, welche in Verbindung mit der Gl. $U = 0$

der Berührungslinie angehört. Diese kann nunmehr als Leitlinie der gesuchten Kegelfläche betrachtet werden, wonach die Ableitung der Gleichung der letzteren nach dem in §. 272 und 275 angegebenen Verfahren keiner Schwierigkeit unterliegt. Ist $S$ ein leuchtender Punkt, so bildet die Berührungslinie ($U=0$, $V=0$) die Grenze zwischen dem beleuchteten und unbeleuchteten Theile der Fläche $U=0$.

Als allgemeine Gleichung der Rotationsflächen haben wir in §. 278:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=f(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$

erhalten, wo $x_0, y_0, z_0$ die Coordinaten eines Punktes der Rotationsaxe, $\alpha, \beta, \gamma$ deren Neigungswinkel gegen die Coordinatenaxen bedeuten.

Differenzirt man diese Gleichung partiell nach $x$, $z$ und nach $y$, $z$, so erhält man, wenn Kürze halber die Funktion $f'(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$ mit $f'$ bezeichnet wird:

$$2(x-x_0)+2(z-z_0)\frac{dz}{dx}=f'.\left(\cos\alpha+\cos\gamma\frac{dz}{dx}\right),$$

$$2(y-y_0)+2(z-z_0)\frac{dz}{dy}=f'.\left(\cos\beta+\cos\gamma\frac{dz}{dy}\right);$$

eliminirt man aus beiden Gleichungen die willkürliche Funktion $f'$, so hat man als 1te Differenzialgleichung der Rotationsflächen:

$$\left[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta\right]\frac{dz}{dx}-\left[(x-x_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha\right]\frac{dz}{dy}$$
$$=(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha. \quad (5)$$

Die Gleichungen der Rotationsaxe sind, wenn $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\xi-x_0=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta-z_0), \quad \eta-y_0=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta-z_0); \quad (6)$$

jene der Normale im Punkte $x, y, z$ einer krummen Fläche:

$$\xi-x+p(\zeta-z)=0, \quad \eta-y+q(\zeta-z)=0; \quad (7)$$

sucht man, durch Elimination von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ aus diesen vier Gleichungen die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass die Gerade (6) von der Normale geschnitten wird, so kommt die Gl. (5) zum Vorschein; die 1te Differenzialgleichung der Rotationsflächen spricht demnach die diesen Flächen eigenthümliche allgemeine Eigenschaft aus, dass ihre Normallinien durch eine und dieselbe Gerade, die Rotationsaxe gehen.

## Von den einhüllenden Flächen.

**407.** Es sei

$$U = f(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung einer Fläche, und $\alpha$ ein in derselben vorkommender Parameter, von welchem die Lage der Fläche gegen das Coordinatensystem und die Dimensionen derselben abhängen. Denken wir uns nun der Grösse $\alpha$ stufenweise sämmtliche Werthe beigelegt, deren sie fähig ist, so entsteht aus der Gl. (1) eine Reihe von Flächen, deren jede im Allgemeinen die nächstfolgende in einer Curve schneiden wird, und diese Durchschnittscurven werden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine neue Fläche bilden, welche die einhüllende Fläche oder Einhüllungsfläche der durch Variation von $\alpha$ aus (1) entstehenden Flächen genannt wird, welche letztere beziehungsweise die eingehüllten Flächen heissen.

Auf dem in §. 376 betretenen Wege findet man auch hier, dass die beiden Gleichungen:

$$U = 0 \text{ und } \frac{dU}{d\alpha} = 0 \qquad (2)$$

für alle jene Punkte gelten, welche zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Lagen der Fläche (1) gemeinschaftlich angehören und somit die Gleichungen einer der oben erwähnten Durchschnittscurven sind, deren Position durch die in den Gl. (2) noch erscheinende Grösse $\alpha$ bestimmt wird. Eliminirt man aber aus den Gl. (2) diese Grösse, so erhält man eine neue Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$, welcher offenbar die Coordinaten aller Punkte einer jeden Durchschnittscurve Genüge leisten, und welche demzufolge die Gleichung des geometrischen Ortes sämmtlicher Durchschnittscurven, d. i. der einhüllenden Fläche, sein muss.

Die durch die Gl. (2) ausgedrückte Curve, in welcher sich zwei unendlich nahe aufeinanderfolgende eingehüllte Flächen schneiden, führt den Namen Charakteristik der einhüllenden Fläche.

Die einhüllende Fläche berührt sämmtliche eingehüllte Flächen, und zwar bildet jede Charakteristik die gemeinschaftliche Berührungslinie der einhüllenden Fläche und jener zwei eingehüllten, deren Durchschnitt sie ist. Denn die Gleichung der Ebene, welche eine der eingehüllten Flächen (1) im Punkte $x$, $y$, $z$ berührt, ist:

$$\frac{dU}{dx}(\xi - x) + \frac{dU}{dy}(\eta - y) + \frac{dU}{dz}(\zeta - z) = 0.$$

Da ferner die Gl. der einhüllenden Fläche keine andere ist, als die Gl. (1), wenn man in derselben für $\alpha$ seinen aus der Gleichung

$\frac{dU}{d\alpha} = 0$ folgenden Werth, in Funktion von $x$, $y$, $z$, gesetzt denkt, so kann die Gleichung der Berührungsebene der einhüllenden Fläche auf die Form:

$$\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}\right)(\xi - x) + \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}\right)(\eta - y) + \left(\frac{dU}{dz} + \frac{dU}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz}\right)(\zeta - z) = 0$$

gebracht werden, welche jedoch vermöge der Gl. $\frac{dU}{d\alpha} = 0$ von der vorhergehenden nicht verschieden ist. Hieraus folgt, dass, in jedem auf irgend einer Charakteristik liegenden Punkte, der einhüllenden Fläche dieselbe Berührungsebene zukommt, wie der dieser Charakteristik entsprechenden eingehüllten Fläche, wodurch die obige Behauptung gerechtfertiget ist.

Ertheilt man in den Gl. (2) der Charakteristik der Grösse $\alpha$ einen bestimmten Werth (wodurch die Lage dieser Curve im Raume bestimmt wird), und lässt man sodann diese Grösse in $\alpha + d\alpha$ übergehen, so werden die zwei neuen Gleichungen:

$$U + \frac{dU}{d\alpha} d\alpha = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} + \frac{d^2U}{d\alpha^2} d\alpha = 0,$$

welche vermöge der Gl. (2) die Form:

$$\frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2U}{d\alpha^2} = 0$$

annehmen, der nächstfolgenden Charakteristik angehören. Beide Curven werden sich im Allgemeinen in einem oder mehreren Punkten schneiden, deren Coordinaten sich durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen mit jenen (2) ergeben werden.

Da die Gl. $\frac{dU}{d\alpha}$ beiden Systemen gemeinschaftlich ist, so hat man die drei Gleichungen:

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2U}{d\alpha^2} = 0, \tag{3}$$

mittelst welcher man für jede einzelne Charakteristik, d. i. für jeden einzelnen Werth von $\alpha$, die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit der nächstfolgenden bestimmen kann.

Die so eben betrachteten Durchschnittspunkte je zweier nächster Charakteristiken bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine auf der einhüllenden Fläche liegende krumme Linie, welche den Namen Wendungscurve führt, und, wie man leicht sieht, von den aufeinanderfolgenden Charakteristiken berührt wird. Die Gleichungen der-

selben ergeben sich offenbar, wenn man aus den Gl. (3) die Grösse $\alpha$ eliminirt.

In den meisten Fällen wird die Gleichung der eingehüllten Fläche, $U=0$, mehrere Parameter enthalten, welche als sich gleichzeitig verändernd angenommen werden. In diesem Falle wird man nur einen dieser Parameter als unabhängig sich verändernd, die übrigen aber als Funktionen desselben zu betrachten haben, weil im Gegenfalle, wenn zwischen den gleichzeitigen Aenderungen dieser Parameter keine bestimmte Beziehung stattfinden würde, auch das Gesetz der Bewegung der eingehüllten Fläche, und folglich die Einhüllungsfläche selbst, unbestimmt bliebe.

**408.** Zur Erläuterung dieser Betrachtungen mögen folgende Beispiele dienen.

I. In der Ebene der $xy$ sei eine Curve $y=\varphi(x)$ verzeichnet, auf welcher sich der Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser $r$ bewege; man suche die einhüllende Fläche aller dieser Kugeln.

Bezeichnet man bei irgend einer bestimmten Lage der Kugel den Abstand ihres Mittelpunktes von der Ebene der $yz$ mit $\alpha$, so ist die Gleichung dieser Fläche:

$$U=[x-\alpha]^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+z^2-r^2=0; \tag{1}$$

durch zweimalige Differenziation dieser Gleichung in Bezug auf $\alpha$ erhält man, wenn Kürze halber

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=\varphi'(\alpha) \text{ und } \frac{d\varphi'(\alpha)}{d\alpha}=\varphi''(\alpha) \text{ gesetzt wird:}$$

$$\frac{dU}{d\alpha}=x-\alpha+[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)=0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}=[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi''(\alpha)-[\varphi'(\alpha)]^2-1=0. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) und (2) zusammengenommen gehören der Charakteristik der einhüllenden Fläche an; die Gleichung dieser Fläche selbst ergibt sich, indem man $\alpha$ aus (1) und (2) eliminirt.

Die Gleichungen (1), (2) und (3) zusammengenommen gehören dem Durchschnittspunkte zweier nächster Charakteristiken an, und wenn man aus diesen drei Gleichungen $\alpha$ eliminirt, so hat man die Gleichungen der Wendungscurve.

Es sei z. B. die feste Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, ein Kreis vom Halbmesser $R$, also

$$y=\varphi(x)=\sqrt{R^2-x^2},$$

so ist

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}, \quad \varphi''(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{R^2-\alpha^2}} - \frac{\alpha^2}{(R^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

hiemit werden die obigen drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + \left(y - \sqrt{R^2-\alpha^2}\right)^2 + z^2 - r^2 = 0, \\ \alpha y - x\sqrt{R^2-\alpha^2} = 0, \\ y = 0. \end{aligned}\right\} \quad (m)$$

Eliminirt man $\alpha$ aus den zwei ersten Gleichungen, so erhält man:

$$\sqrt{x^2+y^2} = R + \sqrt{r^2-z^2},$$

als Gleichung der gesuchten einhüllenden ringförmigen Fläche.

Die eben genannten Gleichungen gehören zusammengenommen der Charakteristik an, welche, wie man sieht, eine ebene Curve ist, da vermöge der 2ten Gleichung ihre Projection auf die Ebene der $xy$ eine durch den Ursprung gehende Gerade ist. Diese Curve liegt also in einer auf die Ebene der $xy$ senkrechten durch die Axe der $z$ gehenden Ebene, deren Knotenlinie in der $xy$-Ebene mit der Axe der $x$ einen Winkel $u$ einschliesst, für welchen $\operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{R^2-\alpha^2}}{\alpha}$ oder $\cos u = \frac{\alpha}{R}$ ist. Setzt man den aus der 2ten Gleichung folgenden Werth von $y$ in die erste, so hat man

$$(x-\alpha)^2 \frac{R^2}{\alpha^2} + z^2 = r^2,$$

welche Gleichung sich, wenn man $x = x' \cos u = \frac{x'\alpha}{R}$ setzt, in

$$(x'-R)^2 + z^2 = r^2$$

verwandelt. Die Charakteristik ist daher ein auf der Ebene der $xy$ senkrecht stehender Kreis vom Halbmesser $r$, dessen Mittelpunkt vom Anfangspunkte der Coordinaten um die Grösse $R$ absteht.

Die drei Gleichungen $(m)$ gehören der Wendungscurve an; vermöge der 3ten, $y = 0$, folgt aus der 2ten: $x = 0$, mit welchen Werthen sich die 1te Gleichung in folgende verwandelt:

$$z = \pm\sqrt{r^2-R^2}.$$

Die Wendungscurve ist demnach imaginär, d. h. je zwei nächste Charakteristiken schneiden sich nicht, wenn $r < R$; sie reducirt sich auf zwei Punkte in der Axe der $z$, wenn $r > R$, endlich auf einen Punkt, den Ursprung, wenn $r = R$; welche Resultate mit der obigen Bemerkung, dass die Ebenen der Charakteristiken sämmtlich durch die Axe der $z$ gehen, vollkommen im Einklange stehen.

So lange die Form der in der Gleichung der gegebenen Fläche vorkommenden willkürlichen Funktionen unbestimmt bleibt, kann man die angedeuteten Eliminationen in der Regel nicht wirklich ausführen,

sondern nur eine Differenzialgleichung der Einhüllungsfläche bilden. Zu diesem Zwecke differenzire man die Gl. (1) nacheinander in Bezug auf $x$ und $y$, wobei $\alpha$ als constant zu betrachten ist; denn man sieht leicht, dass alle Glieder, welche aus der Veränderung von $\alpha$, sowohl in Bezug auf $x$, als nach $y$, entspringen, kraft der Gl. (2) verschwinden. Man findet:

$$x - \alpha + pz = 0\,, \quad y - \varphi(\alpha) + qz = 0\,,$$

also

$$x - \alpha = -pz\,, \quad y - \varphi(\alpha) = -qz\,,$$

und durch Substitution dieser Resultate in die Gl. (1) ergibt sich

$$z^2 (p^2 + q^2 + 1) = r^2$$

als Differenzialgleichung der Einhüllungsfläche sämmtlicher Kugeln. Sie drückt, wie man leicht findet, die Eigenschaft aus, dass das zwischen der Fläche und der Ebene der $xy$ enthaltene Stück der Normale für jeden Punkt der Fläche eine constante Grösse $(= r)$ ist, wie vorauszusehen war.

Das hier eingeschlagene Verfahren beruht überhaupt auf der Bemerkung, dass die ursprüngliche, auf jede der eingehüllten Flächen sich beziehende Gleichung:

$$f\,(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha), \ldots .) = 0$$

auch der einhüllenden Fläche angehört, wenn man nur nebst $x$, $y$, $z$, auch $\alpha$ als veränderlich betrachtet, und beachtet, dass für letztere Fläche $\frac{df}{d\alpha} = 0$ ist. Die unter dieser Voraussetzung durch Differenziation nach $x$ und $y$ aus $f = 0$ gewonnenen Differenzialgleichungen werden daher ebenfalls der einhüllenden Fläche angehören, ebenso wie jede Verbindung dieser Gleichungen, die man — zum Behufe der Elimination von $\alpha$ und der willkürlichen Funktionen — bilden mag, wobei man, wenn die Anzahl der wegzuschaffenden Grössen beträchtlicher wird, zu den höheren Differenzialien seine Zuflucht nehmen muss.

II. Eine Ebene bewege sich dergestalt, dass sie zu einer gegebenen Geraden, $x = az$, $y = bz$ beständig parallel bleibe. Man suche die Gleichung der einhüllenden Fläche, welche von der gegebenen Ebene in allen ihren Lagen beständig berührt wird.

Wählen wir für die Gl. der Ebene die Form: $Ax + By + Cz + 1 = 0$, so wird die Bedingung, dass die Ebene zur Geraden $x = az$, $y = bz$ parallel sei, durch die Relation: $Aa + Bb + C = 0$ ausgedrückt, mittelst welcher die Gleichung der Ebene die Form: $A(x - az) + B(y - bz) + 1 = 0$ annimmt. Setzen wir nun $B = \varphi(A)$, so ist die Gleichung der eingehüllten Ebene in irgend einer ihrer Lagen:

$$A(x - az) + \varphi(A)(y - bz) + 1 = 0\,. \qquad (n)$$

Durch Differenziation derselben nach $A$ erhalten wir:

$$x - az + \varphi'(A)(y - bz) = 0, \quad \text{somit} \quad \varphi'(A) = -\frac{x - az}{y - bz};$$

diese Gleichung nach $A$ aufgelöst, führt zu einem Resultate von der Form $A = \psi\left(\frac{x - az}{y - bz}\right)$, welcher Werth in die Gleichung ($n$) substituirt,

$$(x - az)\,\psi\left(\frac{x - az}{y - bz}\right) + \varphi\left[\psi\left(\frac{x - az}{y - bz}\right)\right](y - bz) + 1 = 0$$

gibt. Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$\frac{x - az}{y - bz}\,\psi\left(\frac{x - az}{y - bz}\right) + \varphi\left[\psi\left(\frac{x - az}{y - bz}\right)\right] = -\frac{1}{y - bz}$$

und denkt sich dieselbe nach der Grösse $\frac{x - az}{y - bz}$ aufgelöst, so wird man ein Resultat von der Form $\frac{x - az}{y - bz} = F(y - bz)$, oder $x - az = (y - bz)\,F(y - bz)$, d. i.

$$x - az = f(y - bz)$$

erhalten. Dies ist die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche, welche somit eine Cylinderfläche sein wird, wie im Voraus zu erwarten war.

Auf ähnliche Weise gelangt man zur allgemeinen Gleichung der conischen Flächen, wenn man die Umhüllungsfläche einer Ebene sucht, welche bei ihrer Bewegung beständig durch einen festen Punkt geht.

## Von den developpablen Flächen.

**409.** Developpable oder abwickelbare Flächen heissen diejenigen, welche durch die Bewegung einer Geraden entstehen, deren je zwei nächste Positionen immer in einer Ebene liegen.

Diese Flächen können daher als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge und unendlich kleiner Breite bestehend betrachtet werden, welche sich in geraden Linien (den erzeugenden Geraden) schneiden. Dreht man das erste dieser Elemente um seine gerade Durchschnittslinie mit dem zweiten, bis es in die Ebene des letzteren zu liegen kommt; dreht man ferner das System der beiden ersten Elemente um die Durchschnittslinie mit dem dritten, bis es in die Ebene dieses dritten fällt u. s. w., so werden nach und nach sämmtliche Elemente der krummen Fläche, also die ganze developpable Fläche selbst, in eine Ebene zu liegen kommen; und von dieser charakteristischen Eigenschaft, sich ohne Falten und Risse in eine Ebene

ausbreiten (abwickeln, developpiren) zu lassen, haben die in Rede stehenden Flächen den Namen.

Man kann übrigens die developpablen Flächen noch auf mehrfache Weise erzeugt sich vorstellen. Lässt man eine Ebene nach irgend einem Gesetze sich bewegen, so ist die einhüllende Fläche, welche von der Ebene in allen Lagen derselben berührt wird, nothwendig eine developpable Fläche. Denn die einhüllende Fläche ist bekanntlich nichts anderes als die stetige Folge der geraden Durchschnittslinien, in welchen sich die aufeinanderfolgenden Positionen der beweglichen Ebene begegnen, und von diesen Durchschnittslinien liegen je zwei nächste offenbar immer in einer Ebene. Hieraus erhellt, dass jede developpable Fläche als die Einhüllungsfläche einer nach irgend einem gegebenen Gesetze sich bewegenden Ebene angesehen werden kann, so wie dass die Charakteristik einer developpablen Fläche eine gerade Linie sein muss.

Da endlich je zwei nächste Charakteristiken auf derselben eingehüllten Fläche, also in einer Ebene, liegen, so werden sich dieselben — wenn sie nicht parallel sind — in einem Punkte schneiden, und die stetige Folge dieser Durchschnittspunkte bildet eine auf der developpablen Fläche liegende Wendungscurve, welche von der Charakteristik (oder der erzeugenden Geraden) in allen Positionen derselben berührt wird. Hieraus folgt, dass man eine developpable Fläche auch durch die Bewegung einer Geraden erzeugt denken kann, welche eine gegebene Curve von doppelter Krümmung beständig berührt.

**410.** Es hat keine Schwierigkeit, auf Grund der einen oder anderen Erzeugungsart der developpablen Flächen Gleichungen für dieselben abzuleiten. Betrachten wir dieselben als einhüllende Flächen einer nach einem bestimmten Gesetze sich bewegenden Ebene und sei

$$z = \alpha + x \cdot \varphi(\alpha) + y \cdot \psi(\alpha) \qquad (1)$$

die Gleichung der letzteren, in welcher $\alpha$ einen willkürlichen Parameter bezeichnet, $\varphi$ und $\psi$ aber Funktionen desselben sind, durch deren Form das Gesetz der Bewegung ausgedrückt wird.

Differenzirt man die Gl. (1) zweimal in Bezug auf $\alpha$, so kommt:

$$1 + x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) = 0, \qquad (2)$$

$$x\varphi''(\alpha) + y\psi''(\alpha) = 0, \qquad (3)$$

und die Elimination von $\alpha$ aus den Gl. (1) und (2) führt auf die Gleichung der developpablen (einhüllenden) Fläche. Die Gl. (1) und (2) zusammengenommen gehören der Charakteristik der developpablen Fläche, welche somit — wie schon oben bemerkt — eine gerade Linie

ist, da jede dieser Gleichungen für sich eine Ebene bedeutet. Durch Elimination von $\alpha$ aus den Gl. (1), (2) und (3) ergeben sich die Gleichungen der Wendungscurve.

Da sich diese Eliminationen nicht ausführen lassen, ohne die Form der Funktionen $\varphi$ und $\psi$ festzusetzen und hiedurch die Fläche zu partikularisiren, so wird man zur analytischen Darstellung der developpablen Flächen das System der Gl. (1) und (2) beibehalten, indem man in (1) $\alpha$ als eine Funktion von $x$ und $y$ bestrachtet, deren Form durch die Gl. (2) bestimmt wird.

Auf dem am Schlusse des §. 408, I., angedeuteten Wege gelangt man aber leicht zu Differenzialgleichungen dieser Flächen, welche von einer oder von beiden willkürlichen Funktionen frei sind.

Differenzirt man die Gl. (1) partiell nach $x$ und $y$, so erhält man, unter Anwendung der schon früher gebrauchten Bezeichnungen für die partiellen Differenzialquotienten, und mit Rücksicht darauf, dass $\alpha$ als eine Funktion von $x$ und $y$ betrachtet werden muss, welche durch die Gl. (2) bestimmt ist:

$$p = \frac{d\alpha}{dx} + \varphi(\alpha) + x\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} + y\psi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$

$$q = \frac{d\alpha}{dy} + \psi(\alpha) + x\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy} + y\psi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy};$$

diese Gleichungen reduciren sich vermöge der Gl. (2) auf folgende:

$$p = \varphi(\alpha), \quad q = \psi(\alpha),$$

aus welchen nunmehr $\alpha$ eliminirt werden kann, ohne über die Natur der Funktionen $\varphi$ und $\psi$ etwas festzusetzen; denkt man sich nämlich den aus der $2^{\text{ten}}$ Gleichung folgenden Werth von $\alpha$ in die $1^{\text{te}}$ substituirt, so gelangt man zu einem Resultat von der Form

$$p = f(q) \tag{4}$$

und dies ist die Differenzialgleichung der $1^{\text{ten}}$ Ordnung der developpablen Flächen mit partiellen Differenzialien, welche nur mehr eine willkürliche Funktion enthält. Um auch diese zu beseitigen, differenziren wir die Gl. (4) abermals partiell nach $x$ und $y$, und erhalten

$$r = f'(q) \,.\, s, \quad s = f'(q) \,.\, t,$$

welche Gleichungen, nach Elimination der unbekannten Funktion $f'(q)$, die Differenzialgleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung der developpablen Flächen:

$$rt - s^2 = 0 \tag{5}$$

darbieten, welche keine willkürliche Funktion mehr enthält. Man kann diese Gleichung dazu benützen, um zu untersuchen, ob eine vorgelegte Fläche developpabel sei oder nicht; ihre Gleichung muss im ersten Falle der Gl. (5) Genüge leisten.

Man gelangt zu denselben Resultaten, wenn man die developpablen Flächen als solche betrachtet, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden, welche beständig Tangente bleibt an einer Curve von doppelter Krümmung, welche der erzeugten abwickelbaren Fläche als Wendungscurve entspricht. In der That, sind

$$x = F(z) \text{ und } y = F_1(z)$$

die Gleichungen der Curve, und wählt man in derselben einen Punkt, dessen Coordinate $z = \alpha$ ist, so ist für diesen Punkt $x = F(\alpha)$ und $y = F_1(\alpha)$, und die Gleichungen der Tangente an diesem Punkte sind

$$x - F(\alpha) = F'(\alpha)(z - \alpha)$$
$$y - F_1(\alpha) = F'_1(\alpha)(z - \alpha),$$

zwei Gleichungen, aus welchen durch Elimination von $\alpha$ die Gleichung der durch die Bewegung der Tangente erzeugten developpablen Fläche hervorgehen würde, und welche Gleichungen ebenfalls als der allgemeine analytische Ausdruck der developpablen Flächen betrachtet werden können, wenn man in der 1ten Gleichung $\alpha$ als eine Funktion von $x$ und $y$ ansieht, welche durch die 2te Gleichung bestimmt wird.

Differenzirt man nun unter dieser Voraussetzung jede dieser Gleichungen partiell nach $x$ und $y$, so erhält man vier Gleichungen, aus welchen man durch Elimination der Grössen $(z - \alpha)\frac{d\alpha}{dx}$ und $(z - \alpha)\frac{d\alpha}{dy}$ zwei neue Gleichungen von der Form:

$$p = \omega(\alpha), \quad q = \omega_1(\alpha)$$

findet, welche durch Wegschaffung von $\alpha$ wieder die schon oben erhaltene Gleichung (4):

$$p = f(q)$$

darbieten.

**411.** Um diese Betrachtungen durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung der abwickelbaren Schraubenfläche suchen, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die eine gegebene Schraubenlinie beständig berührt. Mit Beibehaltung der in §. 281 getroffenen Anordnung des Coordinatensystems sind die Gleichungen der Schraubenlinie

$$x = r\cos\frac{2\pi z}{h}, \quad y = r\sin\frac{2\pi z}{h},$$

wo $r$ den Halbmesser des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie verzeichnet ist, und $h$ die Höhe eines Schraubenganges bedeutet. Die Gleichungen der Tangente an irgend einem Punkte $z = \alpha$ der Curve sind:

$$x - r\cos\frac{2\pi\alpha}{h} = -\frac{2\pi r}{h}\sin\frac{2\pi\alpha}{h}(z-\alpha),$$

$$y - r\sin\frac{2\pi\alpha}{h} = \frac{2\pi r}{h}\cos\frac{2\pi\alpha}{h}(z-\alpha).$$

Aus diesen Gleichungen ist nun $\alpha$ zu eliminiren, um die Gl. der developpablen Schraubenfläche zu erhalten. Multiplicirt man zu diesem Zwecke die erste mit dem Cosinus, die zweite mit dem Sinus des Bogens $\frac{2\pi\alpha}{h}$ und addirt, so kommt:

$$x\cos\frac{2\pi\alpha}{h} + y\sin\frac{2\pi\alpha}{h} = r;$$

erhebt man aber beide Gleichungen zum Quadrate und addirt dieselben, so erhält man mit Rücksicht auf die letzte Gleichung:

$$x^2 + y^2 - r^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{h^2}(z-\alpha)^2.$$

Zieht man endlich aus dieser Gleichung den Werth von $\alpha$ und substituirt ihn in die vorhergehende, so folgt:

$$x\cos\left(\frac{2\pi z}{h} + \frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}\right) + y\sin\left(\frac{2\pi z}{h} + \frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}\right) = r$$

als Gleichung der developpablen Schraubenfläche.

Das in der Gleichung erscheinende Radical wird imaginär, wenn $x^2 + y^2 < r^2$; es liegt also kein Punkt der Fläche innerhalb des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie verzeichnet ist. Dass letztere der Fläche als Wendungscurve entspricht, ist nach dem früher Gesagten für sich klar.

Setzt man $z = 0$, so geht die Gleichung in folgende über:

$$x\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r} + y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r} = r,$$

welche der Durchschnittslinie der Schraubenfläche mit der $xy$-Ebene angehört, und die Gl. der Evolvente des Kreises ist, in welchem der Cylinder die Ebene der $xy$ schneidet. In der That wurden in §. 242 als Gleichungen der Kreisevolvente gefunden:

$$x = r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi, \quad y = r\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi.$$

Erhebt man beide Gleichungen zum Quadrat und bildet die Summe, so erhält man $x^2 + y^2 - r^2 = r^2\varphi^2$, woraus

$$\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}$$

folgt; addirt man aber beide Gleichungen, nachdem die erste mit $\cos\varphi$, die andere mit $\sin\varphi$ multiplicirt ist, so kommt:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = r,$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf den Werth von $\varphi$ mit der obigen identisch ist. Zu diesem letzteren Resultate sind wir schon im §. 393 auf anderem Wege gelangt.

# II. ABSCHNITT.

## INTEGRALRECHNUNG.

### ERSTES KAPITEL.

#### INTEGRATION DER ENTWICKELTEN FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN GRÖSSE.

---

#### I. Grundbegriffe und Fundamentalsätze der Integralrechnung.

**412.** Es sei $F(x)$ eine beliebige Funktion von $x$ und $f(x)\,dx = d.F(x)$ das Differenzial derselben, so entsteht — wenn letzteres gegeben ist — die Aufgabe, aus demselben die ursprüngliche Funktion $F(x)$ wiederherzustellen, durch deren Differenziation es entstanden ist. Diese Operation, die umgekehrte des Differenzirens, heisst das Integriren; die Funktion $F(x)$, durch deren Differenziation das vorgelegte Differenzial entsteht, wird das Integral desselben genannt, und durch das demselben vorgesetzte Zeichen $\int$ bezeichnet, so dass die Gleichung

$$d.F(x) = f(x)\,dx \tag{1}$$

unmittelbar die folgende:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{2}$$

nach sich zieht.

Aus (2) folgt, indem man beiderseits differenzirt,

$$d\int f(x)\,dx = d.F(x),$$

d. i. mit Rücksicht auf (1):

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

woraus erhellt, dass die beiden Zeichen $d$ und $\int$ sich gegenseitig aufheben.

Da bekanntlich das Differenzial einer constanten Grösse der Nulle gleich ist, so ist auch $d[F(x) + C] = f(x)\,dx$, wenn $C$ eine willkürliche von $x$ unabhängige Grösse bezeichnet; hieraus folgt:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3}$$

woraus erhellt, dass jedem Integrale, um demselben die nöthige Allgemeinheit zu verschaffen, eine willkürliche Constante beigefügt werden muss. Der Werth derselben bleibt völlig unbestimmt, so lange das Integral $F(x)$ durch keine andere Bedingung bestimmt ist, als jene, den Ausdruck $f(x)\,dx$ zum Differenzial zu haben. In den Anwendungen der Integralrechnung jedoch auf bestimmte Aufgaben bieten diese immer die Mittel dar, den Werth der willkürlichen Constante zu bestimmen und zwar dadurch, dass der Werth des Integrals für einen bestimmten besonderen Werth von $x$ bekannt ist. Weiss man z. B., dass das Integral der Nulle gleich ist oder verschwindet für den besonderen Werth $x = a$, so hat man:

$$F(a) + C = 0, \text{ somit } C = -F(a),$$

und folglich

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{4}$$

**413.** Zu einer näheren Einsicht in das Wesen des Integrals führt folgende Betrachtung. Bezeichnet man, wie oben, mit $F(x)$ jene Funktion, deren Differenzial $f(x)\,dx$ ist, so dass also zwischen den Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ die durch die Gleichungen

$$d.F(x) = f(x)\,dx, \text{ und } \int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1}$$

ausgedrückten Beziehungen bestehen, so ist dem Begriffe des Differenzialquotienten [§. 307] zufolge:

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = f(x) + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine mit $\delta$ verschwindende Grösse, somit auch:

$$F(x+\delta) - F(x) = \delta\left[f(x) + \varepsilon\right].$$

Es seien nun $a$ und $b$ zwei beliebige, aber constante Werthe von $x$, innerhalb deren die Funktion $f(x)$ stetig ist, und

$$b - a = n\delta, \text{ also } \delta = \frac{b-a}{n},$$

so dass wir uns das Intervall $b - a$ in $n$ gleiche Theile, $= \delta$, getheilt denken, so erhalten wir, in der letzten Gleichung der Reihe nach statt $x$ die Werthe $a$, $a + \delta$, $a + 2\delta$, $a + 3\delta$, ...., $a + (n-1)\delta = b - \delta$ setzend, folgende Gleichungen:

$$F(a+\delta) - F(a) = \delta\left[f(a) + \varepsilon\right],$$

$$F(a+2\delta) - F(a+\delta) = \delta\left[f(a+\delta) + \varepsilon_1\right],$$

$$F(a+3\delta) - F(a+2\delta) = \delta\left[f(a+2\delta) + \varepsilon_2\right],$$

$$\vdots$$

$$F(b) - F\big(a + (n-1)\delta\big) = \delta\left[f\big(a + (n-1)\delta\big) + \varepsilon_{n-1}\right],$$

durch deren Addition die folgende sich ergibt:

$$F(b)-F(a)=\delta\,[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+(n-1)\delta)]$$
$$+\,\delta(\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}).$$

Lässt man nun $n$ unendlich zunehmen, wodurch gleichzeitig $\delta$ unendlich klein wird, so verschwindet an der Grenze die Grösse $\delta(\varepsilon+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1})$, und die letzte Gleichung verwandelt sich in:

$$F(b)-F(a)=\lim\delta\,[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(b-\delta)]. \quad (2)$$

Die Grösse rechts vom Gleichheitszeichen ist offenbar die Summe der unendlich vielen und unendlich kleinen Werthe, welche das Differenzial $f(x)\,dx$ annimmt, während $x$ alle Werthe von $a$ bis $b$ durchläuft; man bezeichnet diese Summe allgemein durch $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, indem man dem Zeichen $\int$ (als Summenzeichen aus dem Buchstaben $S$ hervorgegangen), unten den Werth der Variablen beifügt, mit welchem die Summirung der Werthe des Differenzials $f(x)\,dx$ beginnt, oben aber jenen Werth der Veränderlichen, bei welchem die Summirung schliesst. Diese Grösse $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, welche demnach durch die Gl.:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\delta\,[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(b-\delta)] \quad (3)$$

definirt ist, heisst das bestimmte Integral von $f(x)\,dx$, genommen zwischen den Grenzen $a$ und $b$; $a$ und $b$ werden beziehungsweise die untere und obere Grenze des Integrals genannt.

Da die Gl. (3) an die Bedingung gebunden ist, dass $\delta$ unendlich klein werde, und vermöge der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalles $a$ bis $b$ keine der Grössen $f(a)$, $f(a+\delta), \ldots, f(b-\delta)$ unendlich wird, so sind die Glieder der im $2^{\text{ten}}$ Theile dieser Gleichung stehenden Summe, nämlich die Grössen

$$f(a)\,\delta,\quad f(a+\delta)\,\delta,\quad f(a+2\delta)\,\delta, \ldots$$

selbst unendlich klein, und das bestimmte Integral ist somit in aller Strenge die Summe dieser unendlich vielen und unendlich kleinen Grössen, der sogenannten Elemente des bestimmten Integrals. Die Probleme der Geometrie, Mechanik etc. führen sehr häufig auf solche Summirungen, und man hat es daher dann immer mit der Ermittelung eines bestimmten Integrals zu thun.

Verbindet man die Gl. (2) und (3), so folgt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \quad (4)$$

woraus mit Rücksicht auf die Gl. (1) erhellt, dass das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ gleich ist der Differenz zweier Specialwerthe jener Funktion $F(x)$, welche der Gleichung: $d.F(x) = f(x)\, dx$ Genüge leistet; diese letztere Beziehung zwischen den beiden Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ drückt man durch das Symbol:

$$\int f(x)\, dx = F(x),$$

oder allgemeiner:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{5}$$

aus, und nennt diesen Ausdruck das unbestimmte Integral von $f(x)\, dx$.

Durch die Gl. (4) ist die Ausmittelung des bestimmten Integrals auf jene des unbestimmten Integrals zurückgeführt, und bietet keine Schwierigkeit dar, sobald das letztere angegeben werden kann. Hiebei darf jedoch nie übersehen werden, dass die Gl. (4) nur gilt, wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ und $x = b$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

Lässt man in dem bestimmten Integrale [Gl. (4)] die obere Grenze $b$ unbestimmt und setzt, um diess anzudeuten, $x$ statt $b$, so erhält man

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a),$$

welcher Ausdruck die Summe sämmtlicher Werthe des Differenzials $f(x)\, dx$ darstellt von $x = a$ angefangen bis zu jenem willkürlichen Werthe, welchen man der Veränderlichen $x$ beilegen mag. Dieser Ausdruck des Integrals verschwindet für $x = a$, wie es sein muss, da die Summirung mit $x = a$ beginnt, und man sagt, das Integral fange mit $x = a$ an.

Lässt man endlich auch die untere Grenze $a$ unbestimmt, so ist auch $F(a)$ eine unbestimmte, gänzlich willkürliche Grösse; bezeichnen wir sie mit $- C$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

wodurch wir wieder zum unbestimmten Integral gelangt sind; es stellt die Summe sämmtlicher Werthe des Differenzials $f(x)\, dx$ dar, von einem unbestimmten Werthe von $x$ beginnend bis zu jenem Werthe, welchen man dieser Veränderlichen ertheilen will.

Ein vorgelegtes Differenzial $f(x)\, dx$ einfach integriren heisst, das unbestimmte Integral $F(x)$ suchen, d. h. eine Funktion $F(x)$, welche der Gleichung $d.F(x) = f(x)\, dx$ Genüge leistet. Integriren von $x = a$ angefangen, heisst das Integral $\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a)$

bilden, welches man erhält, indem man von dem unbestimmten Integral den Werth desselben für $x = a$ abzieht. Endlich zwischen gegebenen Grenzen $a$ und $b$ integriren, heisst das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ suchen, welches man erhält, wenn man in dem unbestimmten Integrale zuerst die obere Grenze $b$, dann die untere Grenze $a$ an die Stelle von $x$ setzt und die Substitutionsresultate, und zwar letzteres vom ersteren, subtrahirt.

Die hier gewonnenen Resultate werden durch geometrische Betrachtungen sehr anschaulich. Lassen wir, was immer gestattet ist, $f(x)$ die zur Abscisse $x = Op$ (Fig. 51) gehörige Ordinate $mp$ einer Curve $y = f(x)$ bedeuten, und bezeichnen wir die von irgend einer festen Ordinate $AB$ an gezählte Fläche $ABmp$ mit $F(x)$, so ist [§. 363] $f(x)\,dx$ das Differenzial dieser Fläche, somit

$$d\,.\,F(x) = f(x)\,dx. \qquad (m)$$

Sind nun $OP = a$, $OQ = b$ zwei beliebige Abscissen, so ist die Fläche $ABPM = F(a)$, die Fläche $ABQN = F(b)$, somit

$$\text{Fläche } PMNQ = F(b) - F(a).$$

Anderseits kann man diese Fläche in lauter schmale Streifen, wie $pmnq$, zerlegt denken; beachtet man nun, dass der Flächeninhalt eines solchen Streifens von der Breite $pq = \delta$ durch $f(x)\,\delta$ ausgedrückt wird, und zwar um so genauer, je kleiner $\delta$, so folgt nothwendig:

$$\text{Fläche } PMNQ = \lim \delta \left\{ f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(b-\delta) \right\},$$

d. i. mit Rücksicht auf Gl. (3):

$$\text{Fläche } PMNQ = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Diese Gleichung, mit der vorhergehenden verbunden, gibt endlich:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

übereinstimmend mit den früheren Ergebnissen, wenn man beachtet, dass, vermöge der Relation $(m)$, $F(x)$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ ist.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichung (3) einen directen Weg vorzeichnet, um von einem gegebenen Differenzial $f(x)\,dx$ zu dem bestimmten Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ zu gelangen; ja auch das unbestimmte Integral würde sich auf diesem Wege unmittelbar ergeben, da nichts hindert, am Ende in dem Ausdrucke des bestimmten Integrals wieder $x$ statt $b$ zu schreiben; allein die hiezu erforderlichen Operationen, wie solche im 2ten Theile der besagten Gleichung

vorgeschrieben sind, nämlich Summirung einer Reihe und nachheriger Grenzübergang, sind nur selten ausführbar, so dass wir uns nach andern Methoden, zunächst zur Entwickelung der unbestimmten Integrale, umsehen müssen.

Während aber, wie aus der Differenzialrechnung bekannt ist, das Differenzial jeder beliebigen Funktion nach einfachen, auf alle Gattungen von Funktionen sich erstreckenden Regeln gefunden wird, besitzen wir für das umgekehrte Geschäft des Integrirens keine gleich allgemeinen Methoden; ja in sehr vielen Fällen müssen wir darauf verzichten, das Integral in Form eines geschlossenen Ausdruckes darzustellen, und zur Reihenentwickelung und Näherungsmethoden unsere Zuflucht nehmen.

**414.** Die am Schlusse des §. 316 zusammengestellten Differenzialformeln verschaffen uns durch einfache Umkehrung einige Integrale, welche die Grundformeln der Integralrechnung bilden und bei der Integration zusammengesetzterer Ausdrücke zur Anwendung kommen. Wir können als solche folgende aufstellen:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C; \quad \int \frac{dx}{x} = lx + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x^2} = \operatorname{tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin x^2} = -\operatorname{cotg} x + C.$$

Die Formel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ gilt für jeden Werth von $m$; eine Ausnahme scheint hievon der Werth $m = -1$ zu machen, da für diesen Werth der zweite Theil der Gleichung die Form $\frac{1}{0}$ erhält und somit unendlich wird; integrirt man aber von $x = a$ angefangen, so erhält man:

$$\int_a^x x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

und es erscheint nunmehr der Bruch im 2ten Theile für $m = -1$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; sucht man nun nach der in §. 349 gegebenen Vorschrift dessen wahren Werth, so findet man als solchen $lx - la$, so dass also

$$\int_a^x x^{-1}\,dx = \int_a^x \frac{dx}{x} = lx - la,$$

oder wegen der Unbestimmtheit von $a$:

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C,$$

wie ohnehin bekannt ist. Eine ähnliche Erscheinung tritt immer ein, wenn das Integral seine Natur ändert, wie dies hier bei dem Uebergang von der algebraischen zur logarithmischen Form der Fall ist.

Vermöge der in §. 315 aufgestellten Sätze der Differenzialrechnung hat man, wenn $u, v, w, \ldots$ beliebige Funktionen von $x$ sind, und $a$ eine Constante bedeutet, unmittelbar:

$$\int a\,du = a \int du;$$

$$\int (du \pm dv \pm dw \pm \ldots) = u \pm v \pm w + \ldots.$$

Vermöge der ersten Gleichung kann jeder constante Factor, mit welchem der Differenzialausdruck behaftet ist, vor das Integralzeichen gesetzt werden, und hat auf das Integrationsgeschäft keinen Einfluss. Die 2te Gleichung spricht aus, dass das Integral einer Summe oder Differenz gleich ist der Summe oder Differenz der Integrale der einzelnen Theile.

Ebenso folgt aus den Grundbegriffen der Differenzialrechnung, dass man in obigen Grundformeln an die Stelle der unabhängig Veränderlichen $x$, eine beliebige Funktion $u$ derselben gesetzt denken kann, wodurch diese Formeln eine allgemeinere Bedeutung erlangen:

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C; \quad \int \frac{du}{u} = lu + C;$$

u. s. w.

Ist überhaupt, unter $x$ eine unabhängig Veränderliche verstanden,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

so ist auch

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

wenn $u$ eine beliebige Funktion von $x$ bedeutet.

**415.** Was die zusammengesetzteren Differenzialausdrücke betrifft, so muss man zum Behufe ihrer Integration dieselben durch schickliche Transformationen auf andere bereits bekannte, und in letzter Linie auf die im vorigen §. angeführten einfachen Formen zurückzuführen trachten. Die Mittel, welche uns hiezu zu Gebote stehen, sind im Wesentlichen folgende.

1. Integration durch Substitution, oder durch Einführung einer neuen Veränderlichen. Ist nämlich $\int f(x)\,dx$ das vorgelegte Integral, und man setzt $\psi(x) = z$, so erhält man hieraus:

$$x = \varphi(z),\ dx = \varphi'(z)\,dz, \text{ folglich}$$

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \int \chi(z)\,dz;$$

kann nun, was bei schicklicher Wahl der Funktion $\psi(x)$ häufig der Fall ist, das letztere Integral: $\int \chi(z)\,dz = F(z)$ gefunden werden, so ist damit auch das vorgelegte bestimmt; denn man hat:

$$\int f(x)\,dx = \int \chi(z)\,dz = F(z) + C = F[\psi(x)] + C.$$

Beispiele. 1) Ist $y = \int \frac{dx}{a \pm bx}$ zu bestimmen, so setze man $a \pm bx = z$; hieraus folgt $dx \pm = \frac{dz}{b}$; folglich

$$y = \pm \frac{1}{b} \int \frac{dz}{z} = \pm \frac{1}{b}\, lz + C,$$

und somit, wenn man den Werth von $z$ wiederherstellt:

$$\int \frac{dx}{a \pm bx} = \pm \frac{1}{b}\, l(a \pm bx) + C. \qquad (1)$$

2) $y = \int \frac{dx}{a + bx^2}$; man setze $x = z\sqrt{\frac{a}{b}}$, so wird

$$y = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} z, \text{ somit}$$

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C. \qquad (2)$$

Setzt man in dieser Formel $b = 1$ und $a^2$ statt $a$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C. \qquad (3)$$

3) $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$; setzt man $x^2 + a^2 = z^2$, so wird $x\,dx = z\,dz$ und $y = \int \frac{z\,dz}{z} = \int dz = z + C$; folglich ist

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C.$$

Man erkennt leicht, dass sich dieses Verfahren auf die am Schlusse des vorigen §. gemachte Bemerkung gründet.

2) Integration durch Zerlegung. Lässt sich in der vorgelegten Differenzialfunktion $f(x)\,dx$, $f(x)$ in mehrere Theile zerlegen, also $f(x) = \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots$ setzen, so ist

$$\int f(x)\,dx = \pm \int \varphi(x)\,dx \pm \int \psi(x)\,dx \pm \ldots.$$

Beispiele. 1) Es sei $y = \int \frac{dx}{1 - x^2}$, so hat man $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1 + x)} + \frac{1}{2(1 - x)}$, somit:

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - x} = \frac{1}{2}\, l(1 + x) - \frac{1}{2}\, l(1 - x) + C, \text{ also}$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

Setzt man in dieser Formel $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ an die Stelle von $x$, so erhält man das allgemeinere Integral:

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot l\, \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C. \qquad (4)$$

$$2)\ y = \int \frac{dx}{\sin x^2 \cos x^2} = \int \frac{(\sin x^2 + \cos x^2)\,dx}{\sin x^2 \cos x^2} = \int \frac{dx}{\cos x^2} + \int \frac{dx}{\sin x^2},$$

folglich

$$\int \frac{dx}{\sin x^2 \cos x^2} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C = -2 \operatorname{cotg} 2x + C.$$

Die eben gewonnenen Integralformeln (1) bis (4) verdienen ihrer häufigen Anwendung wegen besonders hervorgehoben zu werden.

3. Die theilweise Integration, eines der fruchtbarsten Hülfsmittel zur Integration zusammengesetzterer Ausdrücke, gründet sich auf die bekannte Gleichung:

$$d \,.\, uv = v\,du + u\,dv,$$

wo $u$ und $v$ beliebige Funktionen von $x$ bedeuten. Integrirt man Glied für Glied, so folgt:

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv,$$

oder

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ist daher das Integral $\int f(x)\,dx$ zu entwickeln, so zerlege man $f(x)$ in zwei Factoren $\varphi(x)\,.\,\psi(x)$, von der Beschaffenheit, dass $\int \psi(x)\,dx = F(x)$ als bekannt betrachtet werden kann; man hat dann:

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx = \varphi(x)\,.\,F(x) - \int F(x)\,.\,d\varphi(x),$$

wodurch das gegebene Integral auf jenes: $\int F(x)\,.\,d\varphi(x)$ zurückgeführt ist, welches in vielen Fällen leichter zu bestimmen sein wird.

Beispiele. 1) Es sei $y = \int x \sin x\,dx$; man setze $u = x$, $dv = \sin x\,dx$; hiedurch wird $v = -\cos x$, $du = dx$, somit:

$$y = \int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2) Ist $y = \int x^n lx\,dx$ gegeben, so setze man $u = lx$, $dv = x^n dx$, folglich $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, und es wird:

$$y = \int x^n lx\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} lx - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

3) Um das Integral $\int \frac{x^2-1}{x^2} \operatorname{arc\,tg} x\,.\,dx$ zu bestimmen, setze man $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = \frac{x^2-1}{x^2} dx$, so wird $du = \frac{dx}{1+x^2}$; ferner

$$v = \int \frac{x^2-1}{x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2} = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x},\text{ folglich}$$

$$y = \frac{x^2+1}{x} \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2+1}{x} \operatorname{arc\,tg} x - lx + C.$$

Durch die Anwendung dieser Methoden auf bestimmte Klassen und Formen von Differenzialfunktionen gelangt man zu mehr oder weniger allgemeinen Integrations-Regeln und Formeln, mit deren Entwickelung wir uns in den folgenden Abschnitten beschäftigen wollen.

**416.** Integration durch unendliche Reihen. Gelingt es aber nicht, durch eine der vorstehenden Methoden oder durch eine geeignete Verbindung derselben, das Integral in endlicher Form darzustellen, so muss man zur näherungsweisen Bestimmung desselben

seine Zuflucht nehmen, indem man das vorgelegte Differenzial in eine Reihe auflöst und letztere Glied für Glied integrirt.

Dieses Verfahren bietet in der Regel keine Schwierigkeiten dar; man hat nur darauf zu achten, dass die Reihe convergire, und die Glieder derselben eine integrable Form besitzen. Da wir später zur Anwendung dieser Methode mehrfache Gelegenheit finden werden, so mögen hier nur einige Beispiele folgen, welche einerseits das Verfahren im Allgemeinen erläutern, anderseits zeigen, wie dasselbe nicht selten ein bequemes Mittel zur Entwickelung der Funktionen in Reihen darbietet, wenn das Integral in geschlossener Form von anderer Seite her bekannt ist.

Unter der Voraussetzung, dass $x$ ein ächter Bruch, ist:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots;$$

multiplicirt man mit $dx$ und integrirt Glied für Glied nach der Formel $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + C.$$

Es ist aber nach Gl. (1), §. 415, $\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) + C$;

daher

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, beachten wir, dass die linke Seite der Gl. für $x = 0$ den Werth $l(1) = 0$ annimmt; es muss daher auch die rechte Seite für $x = 0$ verschwinden und demnach $C = 0$ sein; folglich hat man:

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Ebenso folgt, wenn $x$ ein ächter Bruch:

$$\frac{dx}{1+x^2} = (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)\,dx,$$

somit

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + C.$$

Für $x = 0$ geht diese Gleichung über in $\operatorname{arc\,tg} 0 = C$; aber $\operatorname{arc\,tg} 0 = r\pi$; somit $C = r\pi$, wo $r$ eine beliebige ganze Zahl. Wählt man $r = 0$, so gibt die Reihe

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

den kleinsten Bogen, dessen Tangente $x$ ist. Um eine Reihe zu erhalten, welche für Werthe von $x > 1$ convergirt, kann man setzen:

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dx}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{dx}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \dots\right)$$

$$= dx\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots\right),$$

somit, nach der Formel $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ integrirend:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3\,x^3} - \frac{1}{5\,x^5} + \frac{1}{7\,x^7} - \dots.$$

Für $x = \infty$ folgt aus dieser Gleichung $\operatorname{arc\,tg} \infty = \frac{\pi}{2} = C$, somit für Werthe von $x > 1$:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3\,x^3} - \frac{1}{5\,x^5} + \frac{1}{7\,x^7} - \dots.$$

Auf dieselbe Weise würde man zu den Reihen für $\operatorname{arc\,sin} x$, etc. und andere Funktionen gelangen.

Man kann auch allgemeine Reihen für das $\int f(x)\,dx$ aufstellen. Vermöge des Maclaurin'schen Lehrsatzes ist nämlich:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \dots, \qquad (m)$$

somit, wenn man mit $dx$ multiplicirt und integrirt:

$$\int f(x)\,dx = C + xf(0) + \frac{x^2}{1.2}f'(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f''(0) + \dots \qquad (n)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Reihe $(n)$ nothwendig convergent ist, wenn $(m)$ convergirt. Denn die Convergenz der Reihe $(m)$ ist an die Bedingung gebunden, dass der Rest derselben:

$$R = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

für unendlich wachsende Werthe von $n$ unendlich klein werde. Ist dies aber der Fall, so wird auch das entsprechende Glied $\int R\,dx$ der Integralreihe die Null zur Grenze haben, und diese Reihe somit convergiren.

Setzt man ferner in der Taylor'schen Reihe:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

wo $\theta$ bekanntlich einen positiven echten Bruch bedeutet, $f(x) = \int\varphi(x)\,dx$, $h=-x$, und die constante Grösse $f(0)=C$, so wird $f'(x)=\varphi(x)$, $f''(x)=\varphi'(x)$ etc.; und $f^{(n+1)}(x+\theta h)=\varphi^{(n)}(x-\theta x) = \varphi^{(n)}\left[(1-\theta)x\right]$, wofür man, da $1-\theta$ wieder ein positiver echter Bruch ist, $\varphi^{(n)}(\theta x)$ schreiben kann; hiedurch wird:

$$C=\int\varphi(x)\,dx - x\varphi(x)+\frac{x^2}{1.2}\varphi'(x)-\frac{x^3}{1.2.3}\varphi''(x)+\ldots$$
$$-(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n-1)}(x)-(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n)}(\theta x),$$

folglich

$$\int\varphi(x)\,dx = C+x\varphi(x)-\frac{x^2}{1.2}\varphi'(x)+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi''(x)-\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n-1)}(x)+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n)}(\theta x). \quad (p)$$

Diese Reihe heisst die Bernoulli'sche Reihe; das Ergänzungsglied dient zur Beurtheilung des Fehlers, welchen man begeht, wenn die Reihe mit dem vorhergehenden Gliede abgebrochen wird. Wenden wir dieselbe beispielsweise auf das Integral $\int\frac{dx}{1+x}$ an, so haben wir:

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x},\ \varphi'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ldots\ \varphi^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

somit:

$$\int\frac{dx}{1+x}=l\,(1+x)=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots,$$

da, wie die Substitution $x=0$ lehrt, die Constante $C=0$ ist. Wir haben diese Reihe bereits in §. 63 (I. Bd.) kennen gelernt.

## II. Integration der algebraischen rationalen Differenziale.

**417.** Wenn in dem gegebenen Differenzialausdrucke $dy=f(x)\,dx$ die Funktion $f(x)$ eine algebraische rationale Funktion ist, so kann die Integration jederzeit bewerkstelliget werden. Der einfachste Fall

ist jener, in welchem $f(x)$ die Form einer rationalen ganzen Funktion hat; also von der Form:

$$f(x) = ax^m + bx^n + cx^p + \ldots$$

ist; man hat dann unmittelbar durch Integration der einzelnen Theile nach §. 414:

$$\begin{aligned} y &= \int (ax^m + bx^n + cx^p + \ldots)\, dx \\ &= \int ax^m dx + \int bx^n dx + \int cx^p dx + \ldots \\ &= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + \ldots + C. \end{aligned}$$

Da die Operation nur die Anwendung der für jeden Werth von $m$, mit Ausnahme von $m = -1$, giltigen Formel

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

erheischt, so können die obigen Exponenten $m, n, p, \ldots$ auch beliebige gebrochene oder negative Zahlen sein, wobei nur zu beachten, dass für den Ausnahmsfall:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lx$$

ist.

Auf demselben Wege gelangt man auch zu dem Integrale

$$y = \int (ax^m + bx^n + cx^p + \ldots)^r dx,$$

wo $r$ eine positive, ganze Zahl bedeutet, indem man die angezeigte Potenz wirklich entwickelt. In besonderen Fällen kann übrigens eine geeignete Substitution schneller zum Ziele führen. So geht z. B. das Integral:

$$y = \int (a + bx^m)^r x^{m-1} dx$$

durch die Substitution: $a + bx^m = z$, woraus $x^{m-1} dx = \frac{dz}{mb}$ folgt, über in:

$$y = \frac{1}{mb} \int z^r dz = \frac{z^{r+1}}{mb\,(r+1)} + C;$$

stellt man den Werth von $z$ wieder her, so erhält man:

$$y = \int (a + bx^m)^r x^{m-1} dx = \frac{(a + bx^m)^{r+1}}{mb\,(r+1)} + C, \tag{1}$$

eine Formel, welche für jeden Werth von $r$, mit Ausnahme von $r = -1$, giltig ist. Für letzteren Werth folgt:

$$y = \int \frac{x^{m-1} dx}{a + bx^m} = \frac{1}{mb} \int \frac{dz}{z} = \frac{lz}{mb} + C = \frac{l(a + bx^m)}{mb} + C. \tag{2}$$

Für $m = 1$ folgt hieraus:

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} l(a + bx) + C.$$

Setzt man aber in (1) $-r$ an die Stelle von $r$, so kommt:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(a + bx^m)^r} = -\frac{1}{mb\,(r-1)\,(a + bx^m)^{r-1}} + C. \qquad (3)$$

Die Integration vollzieht sich hier und in ähnlichen Fällen, wie man leicht sieht, auf Grund der am Schlusse des §. 414 gemachten Bemerkung.

Auch das Integral $\int \frac{x^n\,dx}{(a + bx)^m}$ lässt sich auf Monome zurückführen, indem man $a + bx = z$, also $x = \frac{z - a}{b}$, $dx = \frac{dz}{b}$ setzt, hiedurch wird nämlich

$$\int \frac{x^n\,dx}{(a + bx)^m} = \frac{1}{b^{n+1}} \int \frac{(z - a)^n\,dz}{z^m},$$

welches Integral nach Entwickelung der Potenz $(z - a)^n$ in solche von der Form $\int Az^p\,dz$ zerfällt.

**418.** Es sei nun in der zur Integration vorliegenden Differenzialformel $f(x)\,dx$, $f(x)$ eine gebrochene rationale Funktion, also

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + p}{x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Q},$$

wobei, was immer gestattet ist, angenommen werden mag, dass die höchste Potenz von $x$ im Nenner mit dem Coefficienten 1 behaftet sei; ferner $a$, $b$, ...., $B$, $C$, ... beliebige constante Coefficienten, $m$ und $n$ positive ganze Zahlen bedeuten.

Bemerken wir zuvörderst, dass zum Behufe der Integration immer vorausgesetzt werden darf, die Funktion $f(x)$ sei echt gebrochen, d. h. der Zähler von niedrigerem Grade als der Nenner, also $m < n$; denn ist $m =$ oder $> n$, so kann der Bruch durch Division in zwei Theile zerlegt werden, von welchen der eine eine ganze Funktion, der andere ein echter Bruch sein wird, dessen Zähler mindestens um eine Einheit niedrigeren Grades ist als der Nenner. Der ganze Bestandtheil kann nach dem vorhergehenden §. leicht integrirt werden; wir haben es daher nur mit der Integration der echt gebrochenen Funktionen zu thun.

Es sei demnach $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ ein echter Bruch. Wie aus der Theorie der algebraischen Gleichungen [§. 85] bekannt ist, kann jede algebraische, ganze, rationale Funktion des $n^{\text{ten}}$ Grades, $F(x)$, in $n$ einfache Faktoren zerlegt werden; bezeichnet man nämlich mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, so ist:

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n).$$

Man kann nun, unter der Voraussetzung, dass unter den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ keine wiederholten sich befinden, setzen:

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \frac{A_3}{x - \alpha_3} + \ldots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}, \tag{1}$$

wo $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ constante von $x$ unabhängige Grössen bedeuten; denn die Voraussetzung, dass der Bruch $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ ein echter sei, zieht dieselbe Eigenschaft für die Brüche rechter Hand nothwendig nach sich; da nun die Nenner vom $1^{\text{ten}}$ Grade sind, so müssen die Zähler vom $0^{\text{ten}}$ Grade, d. i. von $x$ unabhängige Constanten sein. Diese lassen sich nun immer so bestimmen, dass die Gleichung (1) identisch wird. Denn denkt man sich die Brüche im $2^{\text{ten}}$ Theile auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, welcher offenbar $= F(x)$ ist, so wird der Zähler ein Polynom des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von der Form $M_1 x^{n-1} + M_2 x^{n-2} + \ldots + M_n$, in welchem die Coefficienten $M_1, M_2, \ldots M_n$, $n$ an der Zahl, Funktionen der Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$ und der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sind; dieses Polynom muss aber, wegen der nothwendigen Identität der obigen Gleichung, dem Zähler $\varphi(x)$ gleich sein und zwar für jeden Werth von $x$, wozu erfordert wird, dass die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von $x$ gleich seien; durch Gleichsetzung derselben ergeben sich daher nothwendig $n$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der $n$ Constanten $A_1, A_2, \ldots A_n$ erforderlich sind und hinreichen, und bekanntlich in Bezug auf diese Unbekannten linear sind. Hiedurch ist der vorgelegte Bruch in eine Reihe einfacher, sogenannter Partialbrüche zerlegt, wonach die Integration keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt.

**419.** Eine wesentliche Modification erleidet das eben erörterte Verfahren der Zerlegung in dem Falle, wenn die Gl. $F(x) = 0$ wiederholte Wurzeln darbietet. Denn wäre z. B. $\alpha_1 = \alpha_2$ und man wollte mit den nunmehr gleichen Wurzelfaktoren, so wie oben, die beiden Partialbrüche: $\frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_1}$ bilden, so würden diese in einen einzigen Bruch: $\frac{A_1 + A_2}{x - \alpha_1} = \frac{S}{x - \alpha_1}$ sich zusammenziehen und der Faktor

$x - \alpha_1$ würde sofort, wenn sämmtliche Partialbrüche wieder über einen gemeinschaftlichen Nenner vereinigt werden, in letzterem nur einmal erscheinen, während er in $F(x)$ zweimal vorkommt. Nichts hindert aber, einen Bestandbruch einzuführen, dessen Nenner $(x - \alpha_1)^2$ ist, und dessen Zähler somit auf den 1ten Grad steigen kann, so dass der Bruch die Form $\frac{Ax + A'}{(x - \alpha_1)^2}$ annimmt; hiefür kann man, bei der Unbestimmtheit von $A$ und $A'$, auch $\frac{B_1}{(x - \alpha_1)^2} + \frac{B_2}{x - \alpha_1}$ schreiben, welche letztere Form für die Rechnung bequemer ist. Hiernach liefert jede der Gl. $F(x) = 0$ $b$mal zukommende Wurzel $\beta$ eine Reihe von Partialbrüchen, $b$ an der Zahl, von der Form:

$$\frac{B_1}{(x-\beta)^b} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{b-1}} + \frac{B_3}{(x-\beta)^{b-2}} + \ldots + \frac{B_b}{x-\beta}.$$

Sind daher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_g$ unter sich verschiedene Wurzeln der Gl. $F(x) = 0$, ferner $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ beziehungsweise $b, c, d \ldots$ mal wiederholte Wurzeln, so wird man setzen:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{F(x)} = & \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \frac{A_3}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{A_g}{x-\alpha_g} \\ & + \frac{B_1}{(x-\beta)^b} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{b-1}} + \frac{B_3}{(x-\beta)^{b-2}} + \ldots + \frac{B_b}{(x-\beta)} \\ & + \frac{C_1}{(x-\gamma)^c} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^{c-1}} + \frac{C_3}{(x-\gamma)^{c-2}} + \ldots + \frac{C_c}{(x-\gamma)} \qquad (2) \\ & + \frac{D_1}{(x-\delta)^d} + \frac{D_2}{(x-\delta)^{d-1}} + \frac{D_3}{(x-\delta)^{d-2}} + \ldots + \frac{D_d}{(x-\delta)}. \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{aligned}$$

**420.** Die Wurzeln der Gl. $F(x) = 0$ können sowohl reell als imaginär sein, wodurch aber offenbar die Zerlegung nach Gl. (1) oder (2) nicht berührt wird, nur werden im letzteren Falle auch imaginäre Partialbrüche zum Vorschein kommen, und zwar wie die Wurzeln selbst, immer je zwei conjugirt, im Zähler und Nenner nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ sich unterscheidend. Man kann dann die Rechnung auf verschiedene Weise durchführen. Entweder vereinigt man 1) schon vor der Bestimmung der Zähler in (1) oder (2) je zwei conjugirte Partialbrüche zu einem reellen. Ist nämlich $\lambda \pm \mu\sqrt{-1}$ ein Paar conjugirter nicht wiederholter Wurzeln, so entstehen hieraus die zwei Partialbrüche:

$$\frac{p - q\sqrt{-1}}{x - \lambda - \mu\sqrt{-1}} + \frac{p + q\sqrt{-1}}{x - \lambda + \mu\sqrt{-1}},$$

aus deren Vereinigung über einen gemeinschaftlichen Nenner der Bruch

$$\frac{2px-(2p\alpha-2q\beta)}{(x-\lambda)^2+p^2}=\frac{Px+Q}{(x-\lambda)^2+p^2} \qquad (a)$$

entspringt; dieser, ebenfalls mit zwei unbestimmten Constanten $P$ und $Q$ versehen, tritt nunmehr in Gl. (1) an die Stelle der beiden conjugirten Brüche.

Ist aber $\lambda \pm \mu\sqrt{-1}$ eine $i$mal wiederholte Wurzel, so gehen daraus vermöge der Gl. (2) folgende 2 Reihen von Brüchen hervor:

$$\begin{aligned}&\frac{p_1-q_1\sqrt{-1}}{(x-\lambda-\mu\sqrt{-1})^i}+\frac{p_2-q_2\sqrt{-1}}{(x-\lambda-\mu\sqrt{-1})^{i-1}}+\dots\\ &+\frac{p_i-q_i\sqrt{-1}}{(x-\lambda-\mu\sqrt{-1})}+\frac{p_1+q_1\sqrt{-1}}{(x-\lambda+\mu\sqrt{-1})^i}\\ &+\frac{p_2+q_2\sqrt{-1}}{(x-\lambda+\mu\sqrt{-1})^{i-1}}+\dots+\frac{p_i+q_i\sqrt{-1}}{(x-\lambda+\mu\sqrt{-1})},\end{aligned} \qquad (b)$$

an deren Stelle man wieder die folgenden setzen kann:

$$\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^i}+\frac{P_2x+Q_2}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{i-1}}+\dots+\frac{P_ix+Q_i}{(x-\lambda)^2+\mu^2}; \qquad (c)$$

man überzeugt sich hievon sogleich, wenn man erwägt, dass in beiden Formen ($b$) und ($c$) der gemeinschaftliche Nenner sämmtlicher Brüche derselbe ist, nämlich $[(x-\lambda)^2+\mu^2]^i$ vom $2i^{\text{ten}}$ Grade, und dass beide Formen in den Zählern dieselbe Anzahl $=2i$ von Constanten enthalten; bringt man daher beide Formen auf einen gemeinschaftlichen Nenner, so werden die Zähler beider Formen Polynome vom $(2i-1)^{\text{ten}}$ Grade, und es ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von $x$ genau so viele Gleichungen, als erforderlich und hinreichend sind, um die $2i$ Constanten $P$ und $Q$ durch jene $p$, $q$ zu bestimmen oder umgekehrt, und hiedurch beide Formen identisch zu machen.

Hieraus geht hervor, dass jede echt gebrochene rationale Funktion in reelle Partialbrüche zerlegt werden kann, welche unter eine der vier Formen fallen:

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^m}, \quad \frac{Px+Q}{(x-\lambda)^2+\mu^2}, \quad \frac{Px+Q}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^m}.$$

Oder man kann 2) die Vereinigung je zweier conjugirter Partialbrüche in einen reellen erst nach vollzogener Bestimmung der Zähler in Gl. (2) vornehmen; im Falle wiederholter imaginärer Wurzeln geht aus der Verbindung je zweier conjugirter Brüche:

$$\frac{p - q\sqrt{-1}}{(x - \lambda - \mu\sqrt{-1})^m} + \frac{p + q\sqrt{-1}}{(x - \lambda + \mu\sqrt{-1})^m}$$

offenbar ein Bruch von der Form:

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{[(x - \lambda)^2 + \mu^2]^m}$$

hervor, wovon die vierte der obigen Bruchformen ein specieller Fall ist.

Endlich kann 3) die Integration unmittelbar an den imaginären Partialbrüchen ausgeführt werden; jedes dieser Integrale erscheint dann unter imaginärer Form und lässt sich mit Hülfe der im III. und V. Capitel des I. Bandes enthaltenen Sätze in einen reellen und imaginären Bestandtheil zerfällen, welcher letztere sich mit dem von dem conjugirten Integrale herrührenden in der Summe aufheben wird, da diese, als Integral eines reellen Differenzials, nothwendig reell sein muss.

**421.** Zur Bestimmung der Zähler bietet sich zunächst der schon im §. 418 angegebene Weg der Methode der unbestimmten Coefficienten dar. Man bringe nämlich sämmtliche Partialbrüche auf der rechten Seite der Gl. (2) auf einen gemeinschaftlichen Nenner, und setze die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von $x$ in den beiden Zählern einander gleich; man erhält hiedurch genau so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der Constanten in den Zählern der Partialbrüche erforderlich sind. Bei Anwendung dieser Methode wird man sich, im Falle der Anwesenheit imaginärer Wurzeln, am bequemsten des unter 1) in §. 420 angezeigten Verfahrens bedienen, weil dann nur mit reellen Grössen zu rechnen ist.

Folgendes Beispiel möge zur Erläuterung des Verfahrens dienen. Die vorgelegte Bruchfunktion sei:

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{11x^5 + 23x^4 + 12x^3 + 100x^2 + 105x + 149}{x^6 + x^5 - 4x^4 + 10x^3 + x^2 - 43x - 30}.$$

Als Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ findet man:

$$-3, \quad +2, \quad -1, \quad -1, \quad 1 \pm 2\sqrt{-1},$$

und setzt demnach:

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1} + \frac{Px + Q}{x^2 - 2x + 5},$$

wo der letzte Partialbruch durch Vereinigung der beiden imaginären conjugirten Bestandbrüche:

$$\frac{p - q\sqrt{-1}}{x - 1 - 2\sqrt{-1}} + \frac{p + q\sqrt{-1}}{x - 1 + 2\sqrt{-1}}$$

entsteht. Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $F(x)$, ordnet die rechte Seite nach Potenzen von $x$ und setzt die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von $x$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
11 &= A_1 + A_2 + B_2 + P \\
23 &= -2A_1 + 3A_2 + B_1 + 3P + Q \\
12 &= 2A_1 + 2A_2 - B_1 - 4B_2 - 3P + 3Q \\
100 &= 4A_1 + 14A_2 - 3B_1 + 14B_2 - 11P - 3Q \\
105 &= -11A_1 + 29A_2 + 17B_1 - 13B_2 - 6P - 11Q \\
149 &= -10A_1 + 15A_2 - 30B_1 - 30B_2 - 6Q,
\end{aligned}$$

aus welchen man durch Elimination:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 7, \quad B_1 = -3, \quad B_2 = 1, \quad P = 2, \quad Q = 1$$

findet. Es ist folglich:

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{1}{x+3} + \frac{7}{x-2} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.$$

Dieses Verfahren wird, namentlich wegen des Eliminationsgeschäftes, unbequem, wenn die Anzahl der zu bestimmenden Constanten — wie schon im obigen Beispiele — etwas bedeutend ist; wir wollen daher im Folgenden noch eine andere schneller zum Ziele führende Methode kennen lernen.

**422.** I. Beschäftigen wir uns zuerst mit den Zählern jener Brüche, welche von den nicht wiederholten Wurzeln der Gl. $F(x) = 0$ herrühren. Um $A_1$ zu bestimmen, multipliciren wir die Gl. (2) [§. 419] mit $x - \alpha_1$, dem Nenner von $A_1$, und erhalten:

$$\frac{(x-\alpha_1)\,\varphi(x)}{F(x)} = A_1 + S(x - \alpha_1),$$

mit $S$ das Aggregat sämmtlicher Partialbrüche, mit Ausnahme des ersten, bezeichnend. Diese Gleichung ist, so wie (2) eine identische, daher für jeden Werth von $x$ giltig; setzen wir darin $x = \alpha_1$, so kommt — da vermöge der Voraussetzung, dass $\alpha_1$ eine einfache Wurzel ist, die Grösse $x - \alpha_1$ in den Nennern von $S$ nicht erscheint — $A_1 = \frac{0}{0}$, indem $F(x)$ den Faktor $x - \alpha_1$ einmal enthält. Zur Ausmittelung des wahren Werthes von $A_1$ machen wir von den in §. 349 entwickelten Vorschriften Gebrauch und erhalten, Zähler und Nenner des Bruches linker Hand in obiger Gleichung differenzirend:

$$A_1 = \left\{\frac{\varphi(x) + (x-\alpha_1)\,\varphi'(x)}{F'(x)}\right\}_{x=\alpha_1},$$

somit, $x = \alpha_1$ setzend:

$$A_1 = \frac{\varphi(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}.$$

Aus demselben Grunde ist:

$$A_2 = \frac{\varphi(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}, \quad A_3 = \frac{\varphi(\alpha_3)}{F'(\alpha_3)}, \ldots A_g = \frac{\varphi(\alpha_g)}{F'(\alpha_g)}. \quad (1)$$

Man erhält also irgend einen der Zähler, wenn man in dem Bruche $\frac{\varphi(x)}{F'(x)}$ für $x$ jenen Werth substituirt, welcher den Nenner des gesuchten Zählers auf 0 reducirt.*) Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn einige der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2$, u. s. w., oder alle imaginär sind; hat man auf diesem Wege die complexen Zähler bestimmt, so können je zwei conjugirte Partialbrüche in einen reellen vereiniget werden.

II. Um die Zähler jener Partialbrüche zu finden, welche in Folge einer wiederholten Wurzel erscheinen, z. B. die Zähler $B_1, B_2, \ldots B_b$ in Gl. (2) [§. 419], von der $b$ mal wiederholten Wurzel $\beta$ herrührend, multiplicire man die ganze Gleichung mit $F(x)$, so kommt:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = B_1 \psi(x) + B_2 (x-\beta) \psi(x) + B_3 (x-\beta)^2 \psi(x) + \ldots \\ \ldots + B_b (x-\beta)^{b-1} \psi(x) + S(x-\beta)^b \psi(x),\end{aligned} \quad (2)$$

wo $\psi(x)$ das Produkt sämmtlicher Wurzelfaktoren des Nenners $F(x)$ mit Ausnahme des Faktors $(x-\beta)^b$, also $F(x) = (x-\beta)^b \psi(x)$ ist, und $S$ das Aggregat aller übrigen Partialbrüche bedeutet, welche den Faktor $x-\beta$ im Nenner nicht enthalten. Setzt man nun in obiger Gleichung $x=\beta$, so verschwinden im 2ten Theile sämmtliche Glieder mit Ausnahme des ersten, und man hat $B_1 = \frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)}$. Um aber die folgenden Coefficienten $B$ zu bestimmen, differenziren wir die Gleichung $b-1$ mal; der Erfolg dieser Operation ist, wie man leicht sieht, dass in den so gewonnenen aufeinanderfolgenden Gleichungen immer je ein weiterer der Coefficienten $B$ von dem, für $x=\beta$ verschwindenden, Faktor $x-\beta$ befreit erscheint. Setzt man nun in diesen sämmtlichen Gleichungen $x=\beta$, so erhält man folgendes System, aus welchem sämmtliche $B$ der Reihe nach erhalten werden:

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta) &= B_1 \psi(\beta), \\
\varphi'(\beta) &= B_1 \psi'(\beta) + B_2 \psi(\beta), \\
\varphi''(\beta) &= B_1 \psi''(\beta) + 1!\tbinom{2}{1} B_2 \psi'(\beta) + 2!\, B_3 \psi(\beta), \\
\varphi'''(\beta) &= B_1 \psi'''(\beta) + 1!\tbinom{3}{1} B_2 \psi''(\beta) + 2!\tbinom{3}{2} B_3 \psi'(\beta) + 3!\, B_4 \psi(\beta), \\
\varphi^{IV}(\beta) &= B_1 \psi^{IV}(\beta) + 1!\tbinom{4}{1} B_2 \psi'''(\beta) + 2!\tbinom{4}{2} B_3 \psi''(\beta) + 3!\tbinom{4}{3} B_4 \psi'(\beta) \\
&\quad + 4!\, B_5 \psi(\beta), \text{ u. s. w.}^{**})
\end{aligned} \quad (3)$$

*) Die Substitution $x=\alpha$ in die Polynome $\varphi(x)$ und $F'(x)$ wird am einfachsten ausgeführt, wenn man die Polynome durch $x-\alpha$ dividirt und hiebei von dem Horner'schen Divisionsverfahren [§. 84] Gebrauch macht; der bei der Division verbleibende Rest ist das gesuchte Substitutionsresultat.

**) Man erhält diese Gleichungen leicht aus der obigen durch succesive Diffe-

Die Berechnung der in diesen Gleichungen erscheinenden Funktionen $\psi(\beta)$, $\psi'(\beta)$ etc., kann auf jene der höheren Differenzialquotienten der gegebenen Funktion $F(x)$ zurückgeführt werden, was dann von Nutzen ist, wenn $\beta$ irrational und in Folge dessen auch $\psi(x)$ mit irrationalen Coefficienten selbst in dem Falle versehen ist, wenn in $F(x)$ nur rationale Coefficienten erscheinen. Entwickelt man nämlich den $\mu^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten des Produktes $F(x) = (x-\beta)^b . \psi(x)$ nach Anleitung der Formel $d^\mu . uv = ud^\mu v + \binom{\mu}{1} du\, d^{\mu-1}v + \ldots + vd^\mu u$ [§. 325], indem man $u = \psi(x)$, $v = (x-\beta)^b$ setzt, so kommt:

$$\begin{aligned} F^{(\mu)}(x) = &\quad b(b-1)\ldots(b-\mu+1)(x-\beta)^{b-\mu}\psi(x) \\ &+ \tbinom{\mu}{1} b(b-1)\ldots(b-\mu+2)(x-\beta)^{b-\mu+1}\psi'(x) \\ &+ \tbinom{\mu}{2} b(b-1)\ldots(b-\mu+3)(x-\beta)^{b-\mu+2}\psi''(x) \\ &+ \tbinom{\mu}{3} b(b-1)\ldots(b-\mu+4)(x-\beta)^{b-\mu+3}\psi'''(x) \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + (x-\beta)^b \psi^{(\mu)}(x). \end{aligned}$$

Lässt man nun der Reihe nach $\mu = b,\ b+1,\ b+2$, u. s. w. sein, und setzt schliesslich $x = \beta$, so gewinnt man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} F^{(b)}(\beta) &= b!\,\psi(\beta), \\ 1!\,F^{(b+1)}(\beta) &= (b+1)!\,\psi'(\beta), \\ 2!\,F^{(b+2)}(\beta) &= (b+2)!\,\psi''(\beta), \\ 3!\,F^{(b+3)}(\beta) &= (b+3)!\,\psi'''(\beta), \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \tag{4}$$

mittelst welcher die Grössen $\psi(\beta)$, $\psi'(\beta)$, etc. aus den Differenzialquotienten der Funktion $F(x)$, von jenem der $b^{\text{ten}}$ Ordnung an, erhalten werden.

Dieses Verfahren zur Bestimmung der Zähler $B_1$, $B_2$, ... erleidet selbstverständlich keine Veränderung, wenn $\beta$ imaginär ist; man hat dann die Rechnung nur für die eine der beiden conjugirten Wurzeln durchzuführen; aus den für diese erhaltenen Partialbrüchen ergeben sich jene von der conjugirten Wurzel herrührenden einfach durch

---

renziation; man kann aber zur unmittelbaren Bildung derselben auch von der bekannten Gleichung [§. 325]:

$$d^\mu . uv = ud^\mu v + \binom{\mu}{1} dud^{\mu-1} v + \binom{\mu}{2} d^2 u d^{\mu-2} v + \ldots + vd^\mu u$$

Gebrauch machen; setzt man nämlich $u = (x-\beta)^r$, $v = \psi(x)$, und substituirt in der Entwickelung $x = \beta$, so folgt:

$$\left\{\frac{d^\mu}{dx}(x-\beta)^r \psi(x)\right\}_{x=\beta} = r!\binom{\mu}{r} d^{\mu-r}\psi(\beta),$$

eine Relation, mittelst welcher sich jedes Glied der Gleichungen (3) aus dem entsprechenden (mit demselben $B$ behafteten) Gliede der Gl. (2) ergibt.

Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-1}$; schliesslich werden je zwei conjugirte Partialbrüche in einen reellen von der Form

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]^m}$$

vereiniget.

Um auch dieses Verfahren an einem Beispiele zu erläutern, sei der Bruch:

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{x+3}{(x-1)(x^3+1)^2}$$

in Partialbrüche zu zerlegen. Man findet leicht:

$$F(x) = (x-1)(x^3+1)^2 = (x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)^2$$
$$= (x-1)(x+1)^2\left(x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2\left(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2,$$

und setzt demnach:

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1} + \frac{C_1}{\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2}$$
$$+ \frac{C_2}{x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{D_1}{\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2} + \frac{D_2}{\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)}.$$

Um nun $A$ zu finden, hat man

$$\frac{\varphi(x)}{F'(x)} = \frac{x+3}{(x^3+1)^2 + 6(x-1)(x^3+1)x^2},$$

somit, $x=1$ setzend,

$$A = \frac{\varphi(1)}{F'(1)} = 1.$$

Zur Bestimmung der Zähler $B_1$, $B_2$ hat man:

$$\varphi(x) = x+3,\quad \varphi'(x) = 1,\ \text{somit}\ \varphi(-1) = 2,\quad \varphi'(-1) = 1,$$
$$\psi(x) = \frac{F(x)}{(x+1)^2} = (x-1)(x^2-x+1)^2,$$
$$\psi'(x) = (x^2-x+1)^2 + 2(x-1)(x^2-x+1)(2x-1);$$

folglich $\psi(-1) = -18,\quad \psi'(-1) = +45.$

Die Gleichungen (3) [§. 421] werden daher:

$$2 = -18B_1,\quad 1 = 45B_1 - 18B_2,$$

aus welchen

$$B_1 = -\frac{1}{9},\quad B_2 = -\frac{1}{3}$$

folgt. — Um die Zähler $C_1$ und $C_2$ zu erhalten, hat man:

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2} = (x-1)(x+1)^2\left(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2,$$
$$\psi'(x) = (x+1)^2\left(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2 + 2(x-1)(x+1)\left(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2$$
$$+ 2(x-1)(x+1)^2\left(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right).$$

Setzt man in diesen Ausdrücken, so wie in $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \beta$, so wird:

$$\varphi(\beta) = \tfrac{1}{2}(7 + \sqrt{-3}), \quad \varphi'(\beta) = 1; \quad \psi(\beta) = 9,$$
$$\psi'(\beta) = \tfrac{9}{2}(1 - 3\sqrt{-3}),$$

und man hat zur Bestimmung von $C_1$ und $C_2$ folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}(7 + \sqrt{-3}) = 9C_1; \quad 1 = \tfrac{9}{2}(1 - 3\sqrt{-3})\,C_1 + 9C_2,$$

woraus folgt:

$$C_1 = \frac{1}{18}(7 + \sqrt{-3}), \quad C_2 = -\frac{1}{9}(3 - 5\sqrt{-3}).$$

Endlich ergibt sich durch Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-3}$ in diesen Ausdrücken:

$$D_1 = \frac{1}{18}(7 - \sqrt{-3}), \quad D_2 = -\frac{1}{9}(3 + 5\sqrt{-3}).$$

Es ist folglich

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x-1)(x^3+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{9(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} \\ + \frac{7+\sqrt{-3}}{18\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2} - \frac{3-5\sqrt{-3}}{9\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)} \\ + \frac{7-\sqrt{-3}}{18\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2} - \frac{3+5\sqrt{-3}}{9\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)},\end{aligned}$$

oder nach Vereinigung der conjugirten Partialbrüche:

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{9(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{7x^2 - 10x - 2}{9(x^2-x+1)^2} - \frac{2(x+2)}{3(x^2-x+1)}.$$

**423.** Die vorhergehenden Betrachtungen führen zu dem Schlusse, dass jedes Integral $\int \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx$, wo $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ ein rationaler echter Bruch ist, auf Integrale der folgenden vier Formen zurückgeführt werden kann:

$$\int \frac{A\,dx}{x+a}, \quad \int \frac{A\,dx}{(x+a)^m}, \quad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m},$$

zu welchen sich noch eine fünfte:

$$\int \frac{(Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + M)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$$

gesellt, wenn man, im Falle der Anwesenheit wiederholter imaginärer Wurzeln, die Vereinigung der conjugirten Bestandbrüche in reelle

erst nach Bestimmung der Zähler vornimmt. Mit der Entwickelung dieser Integrale wollen wir uns nunmehr beschäftigen.

Die beiden ersten Integrale ergeben sich unmittelbar mittelst der Substitution $x + a = z$, aus den in §. 414 angeführten Grundformeln, oder durch Anwendung der Formeln (3) und (4) in §. 416; man findet:

$$\int \frac{A\,dx}{x + a} = A\,l\,(x + a)\,, \tag{1}$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x + a)^m} = -\frac{A}{(m - 1)\,(x + a)^{m-1}}. \tag{2}$$

Ferner wird, wenn man $x - \alpha = z$, also $x = \alpha + z$, $dx = dz$ setzt:

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = A \int \frac{z\,dz}{z^2 + \beta^2} + (A\alpha + B) \int \frac{dz}{z^2 + \beta^2}$$
$$= \frac{A}{2}\,l\,(z^2 + \beta^2) + \frac{A\alpha + B}{\beta}\,\text{arc tg}\,\frac{z}{\beta},$$

[§. 415 u. 416], folglich:

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A}{2}\,l\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right] + \frac{A\alpha + B}{\beta}\,\text{arc tg}\,\frac{x - \alpha}{\beta}. \tag{3}$$

Das vierte der obigen Integrale zerfällt zunächst durch die Substitution: $x - \alpha = \beta z$, $x = \beta z + \alpha$, $dx = \beta dz$ in folgende zwei Theile:

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right]^m} = \frac{A}{\beta^{2m-2}} \int \frac{z\,dz}{(z^2 + 1)^m} + \frac{A\alpha + B}{\beta^{2m-1}} \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^m};$$

es ist aber [§. 416]:

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2 + 1)^m} = -\frac{1}{2\,(m - 1)\,(z^2 + 1)^{m-1}},$$

somit der 1te Theil des gesuchten Integrals:

$$-\frac{A}{2\,(m - 1)\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right]^{m-1}}.$$

Um das folgende Integral $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^m}$ zu erhalten, beachte man, dass

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^m} = \frac{(z^2 + 1) - z^2}{(z^2 + 1)^m} = \frac{1}{(z^2 + 1)^{m-1}} - \frac{z^2}{(z^2 + 1)^m},$$

somit

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^m}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{m-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^m}$$

ist. Wendet man nun auf das letzte dieser Integrale die Methode der theilweisen Integration nach der Formel:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

an, $u = z$ und $dv = \frac{z\,dz}{(z^2+1)^m}$ setzend, so folgt:

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^{m-1}} = -\frac{z}{2\,(m-1)\,(z^2+1)^{m-1}} + \frac{1}{2\,(m-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{m-1}},$$

somit, wenn man diesen Werth in die vorige Gleichung substituirt:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^m} = \frac{z}{2\,(m-1)\,(z^2+1)^{m-1}} + \frac{2\,m-3}{2\,(m-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{m-1}}.$$

Durch diese Gleichung wird das gesuchte Integral von einem anderen ähnlichen abhängig gemacht, in welchem der Exponent im Nenner um eine Einheit kleiner ist; durch wiederholte Anwendung derselben gelangt man daher schliesslich zu dem bekannten Integrale:

$$\int\frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arc\,tg} z.$$

Wird endlich in dem Aggregate sämmtlicher aus dem Integrale $\int\frac{dz}{(z^2+1)^m}$ hervorgehenden Glieder der Werth von $z = \frac{x-\alpha}{\beta}$ wiederhergestellt und dasselbe mit $\frac{A\alpha+B}{\beta^{2m-1}}$ multiplicirt, so hat man den 2ten Theil des gesuchten Integrals.

Zur Entwickelung des letzten der obigen fünf Integrale werden die folgenden Paragraphe Mittel darbieten. Wenden wir beispielsweise die vorstehenden Formeln auf die in §. 421 in Partialbrüche zerlegte Differenzialfunktion an, so erhalten wir:

$$\int\frac{(11\,x^5+23\,x^4+12\,x^3+100\,x^2+105\,x+149)\,dx}{x^6+x^5-4\,x^4+10\,x^3+x^2-43\,x-30}$$

$$=\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{7\,dx}{x-2}-\int\frac{3\,dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{(2\,x+1)\,dx}{x^2-2\,x+5}$$

$$= l\,(x+3)+7\,l\,(x-2)+\frac{3}{x+1}+l\,(x+1)+l\,(x^2-2x+5)$$
$$+\,3\operatorname{arc\,tg}(x-1).$$

**424.** Die im vorigen §. entwickelten Integrale mit quadratischem Nenner lassen sich noch unter einer anderen Form darstellen. Betrachten wir zunächst das Integral

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2},$$

und geben wir ihm die Form:

$$\frac{1}{c}\int \frac{dx}{\frac{a}{c} - \frac{b^2}{4c^2} + \left(\frac{b}{2c} + x\right)^2},$$

so erhalten wir sogleich, durch Vergleichung mit dem, aus (3) im vorigen §. für $A = 0$, $B = 1$ hervorgehenden Integral:

$$\int \frac{dx}{\beta^2 + (x - \alpha)^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \alpha}{\beta},$$

indem wir $\beta^2 = \frac{4ac - b^2}{4c^2}$, $\alpha = -\frac{b}{2c}$ setzen:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C. \quad (1)$$

Dieses Integral erscheint unter imaginärer Form, wenn $4ac - b^2$ negativ ist; schreibt man dasselbe aber in folgender Gestalt:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cx + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \sqrt{-1} + C, \quad (2)$$

und erinnert sich der bekannten Relation [§. 80, Gl. 27]:

$$\operatorname{arc\,tg} y \sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l \frac{1 - y}{1 + y},$$

so erhält man:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\, l \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b - 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac} + b + 2cx} + C, \quad (2)$$

welche Form reell ist, wenn jene (1) imaginär, und umgekehrt. Dem letzteren Integrale kann man auch noch folgende Gestalt geben:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\, l \frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C, \quad (3)$$

da es vermöge der Unbestimmtheit der willkürlichen Constante gestattet ist, zu dem Integralausdrucke die constante Grösse $\frac{l(-1)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$ zu addiren.

Ist $4ac - b^2 = 0$, so werden diese Formeln sämmtlich unbrauchbar, zum Beweise, dass dann das Integral weder durch Logarithmen

noch durch Kreisbogen ausgedrückt werden kann; in der That ist es in diesem Falle algebraisch; denn da nun $b = \pm 2\sqrt{ac}$ ist, so wird $a + bx + cx^2 = a \pm 2\sqrt{ac}.x + cx^2 = (\sqrt{a} \pm x\sqrt{c})^2$, und das Integral geht über in:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{a} \pm x\sqrt{c})^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{c}(\sqrt{a} \pm x\sqrt{c})} + C.$$

Es ist ferner:

$$d.l(a + bx + cx^2) = \frac{(b + 2cx)\,dx}{a + bx + cx^2},$$

folglich durch Umkehrung:

$$\int \frac{(b + 2cx)\,dx}{a + bx + cx^2} = l(a + bx + cx^2),$$

oder

$$b\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} + 2c\int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2} = l(a + bx + cx^2),$$

somit

$$\int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{2c}\,l(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}, \quad (4)$$

wodurch das links stehende Integral auf das oben entwickelte zurückgeführt ist. Multiplicirt man (4) mit $A$, und addirt beiderseits $\int \frac{B\,dx}{a + bx + cx^2}$, so kommt

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{a + bx + cx^2} = \frac{A}{2c}\,l(a + bx + cx^2) + \frac{2Bc - Ab}{2c}\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}. \quad (5)$$

**425.** Setzt man der Kürze wegen das Trinom $a + bx + cx^2 = X$, so findet man:

$$d\cdot\frac{x^{n-1}}{X^{m-1}} = \frac{(n-1)x^{n-2}X^{m-1}dx - (m-1)x^{n-1}X^{m-2}(b + 2cx)dx}{X^{2(m-1)}}$$

$$= \frac{(n-1)x^{n-2}X\,dx - (m-1)x^{n-1}(b + 2cx)\,dx}{X^m},$$

d. i. wenn man im Zähler $a + bx + cx^2$ statt $X$ schreibt, und die mit gleichen Potenzen von $x$ versehenen Glieder zusammenfasst:

$$d\cdot\frac{x^{n-1}}{X^{m-1}} = a(n-1)\frac{x^{n-2}\,dx}{X^m} - b(m-n)\frac{x^{n-1}\,dx}{X^m}$$

$$- c(2m - n - 1)\frac{x^n\,dx}{X^m}.$$

Integrirt man diese Gleichung Glied für Glied und bestimmt daraus das letzte Integral rechter Hand, so gelangt man zu folgender Reductionsformel:

$$\int \frac{x^n\,dx}{X^m} = -\frac{x^{n-1}}{c\,(2m-n-1)\,X^{m-1}} - \frac{b\,(m-n)}{c\,(2m-n-1)} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{X^m}$$
$$+ \frac{a\,(n-1)}{c\,(2m-n-1)} \int \frac{x^{n-2}\,dx}{X^m}, \qquad (1)$$

welche durch wiederholte Anwendung, indem man successive $n-1$, $n-2, \ldots 3, 2, 1$ an die Stelle von $n$ treten lässt, das Integral $\int \frac{x^n\,dx}{X^m}$ von jenem $\int \frac{dx}{X^m}$ abhängig macht. Um dieses letztere zu bestimmen, kann man von der Gleichung:

$$d \cdot \frac{x}{X^{m-1}} = \frac{dx}{X^{m-1}} - \frac{(m-1)\,(bx + 2\,cx^2)\,dx}{X^m}$$

ausgehen; setzt man im Zähler für $bx + 2\,cx^2$ den identischen Ausdruck $2\,X - 2\,a - bx$, so wird

$$d \cdot \frac{x}{X^{m-1}} = (3 - 2\,m)\frac{dx}{X^{m-1}} + 2\,a\,(m-1)\frac{dx}{X^m}$$
$$+ b\,(m-1)\frac{x\,dx}{X^m},$$

woraus durch gliedweise Integration:

$$\frac{x}{X^{m-1}} = (3-2\,m)\int \frac{dx}{X^{m-1}} + 2\,a\,(m-1)\int \frac{dx}{X^m}$$
$$+ b\,(m-1)\int \frac{x\,dx}{X^m}$$

folgt. Führt man endlich in diese Gleichung für das letzte Integral rechts den für $n = 1$ aus (1) folgenden Werth:

$$\int \frac{x\,dx}{X^m} = -\frac{1}{2\,(m-1)\,cX^{m-1}} - \frac{b}{2\,c}\int \frac{dx}{X^m}$$

ein, so erhält man, die gleichartigen Glieder zusammenfassend:

$$\int \frac{dx}{X^m} = \frac{b + 2\,cx}{(m-1)\,(4\,ac - b^2)\,X^{m-1}} + \frac{2\,c\,(2\,m-3)}{(m-1)\,(4\,ac - b^2)}\int \frac{dx}{X^{m-1}}, \qquad (2)$$

eine Reductionsformel, deren wiederholte Anwendung das linker Hand stehende Integral schliesslich auf das im vorigen §. entwickelte Integral $\int \frac{dx}{X}$ zurückführt.

Die Formeln (1) und (2) bieten, in Verbindung mit jenen des vorigen Paragraphes, die Mittel dar, um jeden Ausdruck von der Form

$$\int \frac{(Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + M)\,dx}{(a + bx + cx^2)^m}$$

zu integriren. Hiemit ist die fünfte der im §. 423 betrachteten Formen von Differenzialausdrücken, welche bei der Zerlegung in Partialbrüche entstehen können, erledigt.

Die Formel (1) verwandelt sich, wenn man $-n+2$ an die Stelle von $n$ treten lässt, in folgende:

$$\int \frac{dx}{x^{n-2}X^m} = -\frac{1}{x^{n-1}c(2m+n-3)X^{m-1}} - \frac{b(m+n-2)}{c(2m+n-3)}\int \frac{dx}{x^{n-1}X^m}$$
$$- \frac{a(n-1)}{c(2m+n-3)}\int \frac{dx}{x^n X^m};$$

bestimmt man hieraus das letzte Integral rechter Hand, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{x^n X^m} = -\frac{1}{a(n-1)\,x^{n-1}X^{m-1}} - \frac{b(m+n-2)}{a(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}X^m}$$
$$- \frac{c(2m+n-3)}{a(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-2}X^m}; \qquad (3)$$

durch wiederholte Anwendung dieser Formel wird das Integral linker Hand von den beiden Integralen

$$\int \frac{dx}{X^m}, \quad \int \frac{dx}{x X^m}$$

abhängig gemacht; das erstere ist durch Gl. (2) gegeben; das letztere lässt sich aber aus Gl. (3) nicht ableiten, da diese für $n = 1$ unbrauchbar wird; setzt man aber $x = \frac{1}{y}$, so wird

$$\int \frac{dx}{x(a + bx + cx^2)^m} = -\int \frac{y^{2m-1}\,dy}{(c + by + ay^2)^m},$$

welches letztere Integral mit Hülfe der Gl. (1) und (2) gefunden werden kann; zuletzt hat man wieder $1 : x$ statt $y$ zu setzen.

Um die in den beiden letzten Paragraphen entwickelten Formeln auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Integration der in §. 422 in Partialbrüche zerlegten Differenzialfunktion ausführen. Wir fanden:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x+1)(x^3+1)^2} = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$+ \frac{1}{9}\int \frac{(7x^2-10x-2)\,dx}{(x^2-x+1)^2} - \frac{2}{3}\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-x+1}.$$

Die drei ersten Integrale ergeben sich sogleich mittelst der Formeln (1) und (2) in §. 423, und sind:

$$l(x-1) + \frac{1}{9(x+1)} - \frac{1}{3}\,l(x+1).$$

Setzt man der Kürze halber $x^2 - x + 1 = X$, so wird:

$$\int \frac{(7x^2-10x-2)\,dx}{(x^2-x+1)^2} = 7\int \frac{x^2\,dx}{X^2} - 10\int \frac{x\,dx}{X^2} - 2\int \frac{dx}{X^2},$$

und wir erhalten mittelst der Formel (1) in diesem §., der Reihe nach $n = 1$ und $n = 2$ setzend:

$$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2X} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{X^2},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = -\frac{x}{X} + \int \frac{dx}{X^2};$$

führt man diese Werthe in obige Gleichung ein, so kommt, da sich die mit $\int \frac{dx}{X^2}$ behafteten Glieder aufheben:

$$\int \frac{(7x^2-10x-2)\,dx}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{7x-5}{x^2-x+1}.$$

Die Formel (5) im vorigen §. gibt ferner:

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,l(x^2-x+1) + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1},$$

woraus mit Hülfe der Formel (1) desselben §. (da hier $4ac - b^2 = 3$ positiv ist):

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,l(x^2-x+1) + \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

folgt. Somit ist:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x-1)(x^3+1)^2} = l\,(x-1) + \frac{1}{9\,(x+1)} - \frac{1}{3}\,l\,(x+1)$$
$$- \frac{7x-5}{9\,(x^2-x+1)} - \frac{1}{3}\,l\,(x^2-x+1)$$
$$- \frac{10\sqrt{3}}{9}\,\text{arc tg}\,\frac{(2x-1)\sqrt{3}}{3} + C,$$
$$= - \frac{62x^2+19x-46}{9\,(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{3}\,l\,\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$- \frac{10\sqrt{3}}{9}\,\text{arc tg}\,\frac{(2x-1)\sqrt{3}}{3} + C.$$

Aus den vorhergehenden Betrachtungen erhellt, dass jedes Differenzial $f(x)\,dx$, in welchem $f(x)$ eine rationale algebraische Funktion ist, durch algebraische Funktionen oder durch Logarithmen oder Kreisbogen integrirt werden kann, ohne weitere Schwierigkeiten, als jene, welche etwa die Auflösung einer algebraischen Gleichung zum Behufe der Zerlegung in Partialbrüche mit sich bringt.

## III. Integration der algebraischen irrationalen Differenziale.

**426.** Zur Integration der irrationalen Differenziale besitzen wir keine allgemeinen Methoden; einzelne Fälle ausgenommen, gelingt die Integration nur dann, wenn man dieselben auf eine rationale Form zu bringen, oder auf eines der Fundamentalintegrale zu reduciren vermag.

Enthält das vorgelegte Differenzial nur die Wurzelgrösse $\sqrt[n]{a+bx}$, so wird dasselbe durch die Substitution:

$$\sqrt[n]{a+bx} = z$$

rational; denn mittelst der aus dieser Relation folgenden Gleichungen:

$$x = \frac{z^n - a}{b}, \quad dx = \frac{nz^{n-1}\,dz}{b}$$

wird auch $x$ und $dx$ rational durch $z$ ausgedrückt.

Auch in dem allgemeineren Falle, wenn die Differenzialformel nur irrationale Potenzen des Bruches $\frac{a+bx}{g+hx}$ enthält, also von der Form:

$$f\left\{x,\ \left(\frac{a+bx}{g+hx}\right)^{\frac{p}{q}},\ \left(\frac{a+bx}{g+hx}\right)^{\frac{r}{s}},\ \ldots\right\} dx$$

ist, erhält dieselbe eine rationale Form, indem man

$$\frac{a + bx}{g + hx} = z^{\mu}$$

setzt, wo $\mu$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner $q, s, \ldots$ bezeichnet; denn diese Substitution schafft offenbar die irrationalen Brüche weg, und führt keine neuen Irrationalitäten ein, da aus derselben für $x$ und $dx$ die rationalen Werthe

$$x = \frac{gz^{\mu} - a}{b - hz^{m}}, \quad dz = \frac{m(bg - ah)}{(b - hz^{m})^2}$$

folgen.

Um z. B. das Integral

$$J = \int \frac{dx}{x^2} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

zu entwickeln, setzen wir

$$\frac{1 + x}{1 - x} = y^2,$$

so wird

$$x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad dx = \frac{4\, y\, dy}{(y^2 + 1)^2},$$

und die Substitution dieser Werthe verwandelt unser Integral in das folgende:

$$J = 4 \int \frac{y^2\, dy}{(y^2 - 1)^2},$$

welches durch Zerlegung in Partialbrüche, oder mittelst der in §. 424 und 425 entwickelten Formeln sich leicht bestimmen lässt. Man findet:

$$J = -\frac{2\, y}{y^2 - 1} + l \frac{y - 1}{y + 1} + C;$$

stellt man in diesem Ausdrucke den Werth von $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ wieder her, so wird das gesuchte Integral:

$$J = -\frac{\sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{1 - x}}{x} + l \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{1 - x}}{x} + l \frac{1 - \sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{1 - x}}{x} + C.$$

**427.** Jede Differenzialfunktion, deren Irrationalität nur an der Anwesenheit der Wurzelgrösse $\sqrt{a + bx + cx^2}$ haftet, also von der Form

$$f\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2}\right) dx$$

ist, kann durch geeignete Substitutionen rational gemacht werden. Man wählt hiezu, je nach Umständen, einen der folgenden Wege.

1) Ist $c$ positiv, so setze man:

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = z - x\sqrt{c};$$

hieraus folgt:

$$x = \frac{z^2 - a}{2z\sqrt{c} + b}, \quad dx = \frac{2(z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c})\,dz}{(2z\sqrt{c} + b)^2},$$

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c}}{2z\sqrt{c} + b},$$

und die Substitution dieser Werthe macht das vorgelegte Differenzial offenbar rational.

2) Ist $c$ negativ, also das Radical von der Form $\sqrt{a + bx - cx^2}$, so kann man, wenn $a$ positiv ist,

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = xz - \sqrt{a}$$

setzen, wodurch

$$x = \frac{2z\sqrt{a} + b}{z^2 + c}, \quad dx = \frac{2(c\sqrt{a} - bz - z^2\sqrt{a})\,dz}{(z^2 + c)^2},$$

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = -\frac{c\sqrt{a} - bz - z^2\sqrt{a}}{z^2 + c}$$

wird.

3) Diese letztere Substitution ertheilt dem Integral eine scheinbar imaginäre Form, wenn $a$ negativ ist. In diesem Falle seien $\alpha_1$, $\alpha_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$c\left(x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c}\right) = 0,$$

so dass

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = \sqrt{c(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)};$$

diese Wurzeln werden in praktischen Fällen immer reell sein; denn wären sie imaginär, so würde das Gleichungspolynom $x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c}$ für jeden reellen Werth von $x$ positiv [§. 89, c)], somit das Trinom $a + bx - cx^2$ negativ, die Wurzelgrösse $\sqrt{a + bx - cx^2}$ und mit dieser auch das vorgelegte Differenzial, folglich auch dessen Integral imaginär werden für jeden reellen Werth von $x$. Soll das Integral also überhaupt eines reellen Werthes fähig sein, so müssen die Wurzeln $\alpha_1$, $\alpha_2$ nothwendig reell sein.

Setzt man nun

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = \sqrt{c(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)} = (x - \alpha_1)z\sqrt{c},$$

oder

$$\alpha_2 - x = (x - \alpha_1)z^2,$$

so wird

$$x = \frac{\alpha_1 z^2 + \alpha_2}{z^2 + 1}, \quad dx = \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2) z\, dz}{(z^2 + 1)^2},$$

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2) z \sqrt{c}}{z^2 + 1}.$$

**428.** Wenden wir die eben vorgetragenen Methoden auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

an, so erhalten wir im Falle eines positiven $c$ mittelst der 1ten Transformation:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = 2 \int \frac{dz}{2z\sqrt{c} + b} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(2z\sqrt{c} + b\right) + C,$$

somit nach Wiederherstellung des Werthes von $z$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}\right) + C, \quad (1)$$

oder, wenn man den Factor $2\sqrt{c}$ aus der Klammer nimmt und die constante Grösse $\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\, 2\sqrt{c}$ mit der willkürlichen Constante vereinigt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + x\sqrt{c} + \sqrt{a + bx + cx^2}\right) + C. \quad (1^*)$$

Durch Anwendung der 2ten Transformation ergibt sich:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -2 \int \frac{dz}{z^2 + c} = C - \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{c},$$

folglich, wenn man den Werth von $z$ wieder einführt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = C - \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + bx - cx^2}}{x\sqrt{c}}. \quad (2)$$

Dieses Integral kann übrigens noch unter verschiedenen Formen dargestellt werden. Behandelt man dasselbe z. B. nach der 3ten Transformation, so erhält man:

$$J = -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} z;$$

setzt man nun für $z$ seinen Werth $= \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}$, und beachtet, dass $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = 0$ sind, so kommt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = C - \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + 4ac} + 2cx - b}{\sqrt{b^2 + 4ac} - 2cx + b}}. \quad (3)$$

Einfacher wird dieser Ausdruck, wenn man 2 arc tg in arc sin umsetzt; kürzer ist jedoch folgender Weg. Es ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c} + 4c^2 - \left(x - \frac{b}{2c}\right)^2}},$$

oder, wenn man Kürze halber $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2}} = \lambda$ setzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{\frac{dx}{\lambda}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{b}{2c}}{\lambda}\right)^2}}.$$

Dieses Integral geht aber aus der Grundformel $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$ hervor, indem man $\frac{x - \frac{b}{2c}}{\lambda}$ an die Stelle von $x$ treten lässt; man hat also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{x - \frac{b}{2c}}{\lambda}, \text{ d. i.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}} + C. \quad (4)$$

Setzt man in (1) $b = 0$ und schreibt sodann $b$ statt $c$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\left(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}\right) + C, \quad (5)$$

und hieraus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C, \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = l\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C. \quad (7)$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus (4):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x \sqrt{\frac{b}{a}} + C. \tag{8}$$

Aus (1) und (4) folgt ferner, wenn man $-\frac{1}{x}$ statt $x$, also auch $\frac{dx}{x^2}$ statt $x$ setzt, und schliesslich $a$, $-b$, $c$ statt $c$, $b$, $a$ schreibt:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a}}\, l\left(\frac{2\sqrt{a}\sqrt{a + bx + cx^2} - (bx + 2a)}{x}\right) + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{bx - 2a}{x\sqrt{4ac + b^2}} + C. \tag{10}$$

Für $a = c = 1$, $b = 0$ folgt aus der letzten Gleichung:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = C - \arcsin \frac{1}{x} = C - \operatorname{arc\,cosec} x,$$

oder da $\operatorname{arc\,cosec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sec} x$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C. \tag{11}$$

**429.** Die in §. 425 entwickelten Reductionsformeln für Integrale, welche Potenzen des Trinoms $(a + bx + cx^2)$ enthalten, sind — vermöge ihrer Ableitung mittelst für jeden Werth von $m$ und $n$ gültiger Differenziationen — gleichfalls für jeden Werth dieser Exponenten gültig, jedoch nur dann von Nutzen, wenn sie zuletzt auf bestimmbare Integrale führen. Dies findet statt, wenn $m$ und $n$ positive ganze Zahlen sind, wie in §. 425 vorausgesetzt wurde; aber auch dann, wenn der Exponent $m$ des Trinoms $X = a + bx + cx^2$ die Form $p + \frac{1}{2}$ annimmt, wo $p$ eine ganze Zahl bedeutet, weil in diesem Falle schliesslich eines der im vorigen Paragraphe betrachteten Integrale zum Vorschein kommt.

Lassen wir also $n$ eine ganze positive Zahl bedeuten, setzen $m = p + \frac{1}{2}$, und der Kürze wegen

$$X = a + bx + cx^2,$$

so gehen die Formeln (2), (1) und (3) des §. 425 in folgende über:

$$\int \frac{dx}{X^p \sqrt{X}} = \frac{2(b + 2cx)\sqrt{X}}{(2p - 1)(4ac - b^2)X^p} + \frac{8c(p - 1)}{(2p - 1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{X^{p-1}\sqrt{X}}, \tag{1}$$

$$\int \frac{x^n\,dx}{X^p\sqrt{X}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{X}}{c\,(2p-n)\,X^p} - \frac{b\,(2p-2n+1)}{2c\,(2p-n)}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{X^p\sqrt{X}} + \frac{a\,(n-1)}{c\,(2p-n)}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{X^p\sqrt{X}}, \qquad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^n X^p\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a\,(n-1)\,x^{n-1}X^p} - \frac{b\,(2p+2n-3)}{2a\,(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}X^p\sqrt{X}} - \frac{c\,(2p+n-2)}{a\,(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-2}X^p\sqrt{X}}. \qquad (3)$$

Der Gebrauch dieser Formeln ist für sich klar. Für $n = 1$ wird die Formel (3) unbrauchbar; man wird in diesem Falle $x = \frac{1}{y}$ setzen, wodurch

$$\int \frac{dx}{x\,X^p\sqrt{X}} = -\int \frac{y^{2p}\,dy}{(c+by+ay^2)^p\sqrt{c+by+ay^2}}$$

wird, welches Integral nach (2) zu behandeln ist. Mittelst dieser Formeln werden die Integrale linker Hand zuletzt auf das Integral

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2\,(b+2cx)}{(4ac-b^2)\sqrt{X}} + C$$

zurückgeführt, welches sich aus (1) für $p = 1$ unmittelbar ergibt.

Setzt man in obigen Formeln $-p-1$ an die Stelle von $p$, so gelangt man zu folgenden:

$$\int X^p\sqrt{X}\,dx = \frac{(b+2cx)\,X^p\sqrt{X}}{4c\,(p+1)} + \frac{(2p+1)(4ac-b^2)}{8c\,(p+1)}\int X^{p-1}\sqrt{X}\,dx, \qquad (4)$$

$$\int x^n X^p\sqrt{X}\,dx = \frac{x^{n-1}X^{p+1}\sqrt{X}}{c\,(2p+n+2)} - \frac{b\,(2p+2n+1)}{2c\,(2p+n+2)}\int x^{n-1}X^p\sqrt{X}\,dx - \frac{a\,(n-1)}{c\,(2p+n+2)}\int x^{n-2}X^p\sqrt{X}\,dx, \qquad (5)$$

$$\int \frac{X^p\sqrt{X}\,dx}{x^n} = -\frac{X^{p+1}\sqrt{X}}{a\,(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{b\,(2p-2n+5)}{2a\,(n-1)}\int \frac{X^p\sqrt{X}\,dx}{x^{n-1}} + \frac{c\,(2p-n+4)}{a\,(n-1)}\int \frac{X^p\sqrt{X}\,dx}{x^{n-2}}. \qquad (6)$$

Die letzte Formel wird für $n = 1$ unbrauchbar; es ist aber

$$\int \frac{X^p\sqrt{X}\,dx}{x} = \int \frac{X^p X\,dx}{\sqrt{X}} = a\int \frac{X^p\,dx}{x\sqrt{X}} + b\int \frac{X^p\,dx}{\sqrt{X}} + c\int \frac{x\,X^p\,dx}{\sqrt{X}}$$

$$= b\int X^{p-1}\sqrt{X}\,dx + c\int x\,X^{p-1}\sqrt{X}\,dx + a\int \frac{X^{p-1}\sqrt{X}\,dx}{x},$$

somit, wenn man für das 2[te] Integral die Formel (5) in Anspruch nimmt, $n = 1$ setzend:

$$\int \frac{X^p \sqrt{X}\, dx}{x} = \frac{X^p \sqrt{X}}{2p+1} + \frac{b}{2}\int X^{p-1}\sqrt{X}\, dx + a\int \frac{X^{p-1}\sqrt{X}\, dx}{x}. \quad (7)$$

Von den beiden Integralen im 2[ten] Theile der Gleichung kann das erstere nach (4) entwickelt werden; das zweite führt zuletzt auf das, aus (7) für $p = 0$ sich bestimmende Integral:

$$\int \frac{\sqrt{X}\, dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}, \quad (8)$$

wo die Integrale im 2[ten] Theile aus dem vorigen §. bekannt sind.

Für den speciellen Fall $p = 0$ gehen diese Formeln in folgende über:

$$\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{X}}{cn} - \frac{b(2n-1)}{2cn}\int \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{X}} - \frac{a(n-1)}{cn}\int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{X}}, \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a(n-1)x^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}$$
$$- \frac{c(n-2)}{a(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{X}}, \quad (10)$$

$$\int \sqrt{X}\, dx = \frac{(b + 2cx)\sqrt{X}}{4c} + \frac{4ac - b^2}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad (11)$$

$$\int x^n \sqrt{X}\, dx = \frac{x^{n-1} X\sqrt{X}}{c(n+2)} - \frac{b(2n+1)}{2c(n+2)}\int x^{n-1}\sqrt{X}\, dx$$
$$- \frac{a(n-1)}{c(n+2)}\int x^{n-2}\sqrt{X}\, dx, \quad (12)$$

$$\int \frac{\sqrt{X}.dx}{x^n} = -\frac{X\sqrt{X}}{a(n-1)x^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{X}\, dx}{x^{n-1}}$$
$$- \frac{c(n-4)}{a(n-1)}\int \frac{\sqrt{X}\, dx}{x^{n-2}}, \quad (13)$$

von welchen Formeln die letzte schliesslich das durch Gl. (8) gegebene Integral in Anspruch nimmt.

**430.** Sehr häufig erscheinen in den Anwendungen der Mathematik die sogenannten binomischen Differenziale von der Form:

$$dy = x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}\, dx,$$

und verdienen daher eine besondere Betrachtung. Hiebei bedeuten $m$ und $n$ beliebige, $p$ und $q$ jedoch ganze Zahlen; übrigens kann un-

beschadet der Allgemeinheit, $m$ als eine ganze, $n$ als eine ganze positive Zahl vorausgesetzt werden, da im Gegenfalle eine einfache Transformation genügt, um dem Ausdrucke diese Eigenschaften zu verleihen.

Zum Behufe der Integration kann man zunächst den Ausdruck auf eine rationale Form zu bringen suchen. Setzt man zu diesem Ende

$$a + bx^n = z^q,$$

so wird

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{q}{bn}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} z^{q-1}\, dz,$$

und hiemit

$$dy = \frac{q}{bn}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1}\, dz,$$

und dieser Ausdruck wird rational, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Setzt man aber

$$a + bx^n = x^n z^q,$$

so wird

$$x = \left(\frac{a}{z^q - b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{z^q - b}\right)^{\frac{1}{n}-1} d\left(\frac{a}{z^q - b}\right);$$

hiemit verwandelt sich das gegebene Differenzial in

$$dy = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{z^q - b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1} z^p\, d\left(\frac{a}{z^q - b}\right)$$

und wird rational, wenn $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Ist weder $\frac{m}{n}$ noch $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, so kann das binomische Differenzial im Allgemeinen nicht rational gemacht werden und man sucht dann dasselbe durch Reductionsformeln auf eine einfachere Form zu bringen, zu welchen man mit Hülfe der theilweisen Integration leicht auf folgende Weise gelangt.

Der Kürze halber sei $\frac{p}{q} = r$ und $a + bx^n = X$, so wird, wenn wir die Formel

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

in Anspruch nehmen, und $u = (a + bx^n)^r$, $dv = x^{m-1}\, dx$ setzen, wodurch $du = bnr\,(a + bx^n)^{r-1} x^{n-1}\, dx$, $v = \frac{x^m}{m}$ wird:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \frac{x^m X^r}{m} - \frac{bnr}{m} \int x^{m+n-1} X^{r-1} dx. \qquad \text{(I)}$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung das Integral rechter Hand, und schreibt $m - n$ statt $n$, und $r + 1$ statt $r$, so erhält man:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \frac{x^{m-n} X^{r+1}}{bn(r+1)} - \frac{m-n}{bn(r+1)} \int x^{m-n-1} X^{r+1} dx. \qquad \text{(II)}$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man im Integrale rechter Hand $X^{r+1} = X^r . X = X^r (a + bx^n)$ setzt, in folgende:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \frac{x^{m-n} X^{r+1}}{bn(r+1)} - \frac{a(m-n)}{bn(r+1)} \int x^{m-n-1} X^r dx$$
$$- \frac{b(m-n)}{bn(r+1)} \int x^{m-1} X^r dx,$$

aus welcher durch Zusammenfassung der beiden mit demselben Integrale behafteten Glieder folgt:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \frac{x^{m-n} X^{r+1}}{b(nr+m)} - \frac{a(m-n)}{b(nr+m)} \int x^{m-n-1} X^r dx. \qquad \text{(III)}$$

Diese Formel liefert wieder, durch Auflösung nach dem rechts stehenden Integrale, wenn man noch $m + n$ statt $n$ schreibt, die nachstehende:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \frac{x^m X^{r+1}}{am} - \frac{b(nr+n+m)}{am} \int x^{m+n-1} X^r dx. \qquad \text{(IV)}$$

Wenn man endlich auf das letzte Integral der identischen Gleichung:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \int x^{m-1} X^{r-1} (a + bx^n) dx$$
$$= a \int x^{m-1} X^{r-1} dx + b \int x^{m+n-1} X^{r-1} dx$$

die Formel (III) in Anwendung bringt, so ergibt sich:

$$\int x^{m-1} X^r dx = a \int x^{m-1} X^{r-1} dx$$
$$+ b \left\{ \frac{x^m X^r}{b(nr+m)} - \frac{am}{b(nr+m)} \int x^{m-1} X^{r-1} dx \right\},$$

somit nach Vereinigung der gleichartigen Integrale im 2ten Theile:

$$\int x^{m-1} X^r dx = \frac{x^m X^r}{nr+m} + \frac{anr}{nr+m} \int x^{m-1} X^{r-1} dx. \qquad \text{(V)}$$

Aus dieser Gleichung folgt schliesslich durch Umkehrung und Substitution von $r + 1$ statt $r$:

$$\int x^{m-1} X^r dx = - \frac{x^m X^{r+1}}{an(r+1)} + \frac{nr+n+m}{an(r+1)} \int x^{m-1} X^{r+1} dx. \qquad \text{(VI)}$$

Die Formeln (I) — (VI) sind nun die gesuchten Reductionsformeln. Man sieht, dass

die (I) ... $m$ vergrössert, $r$ vermindert;
die (II) ... $m$ vermindert, $r$ vergrössert;
die (III) ... $m$ vermindert } ohne Aenderung von $r$;
die (IV) ... $m$ vergrössert }
die (V) ... $r$ vermindert } ohne Aenderung von $m$;
die (VI) ... $r$ vergrössert }

und es hängt in jedem speciellen Falle von der Beschaffenheit der Exponenten $m$, $n$, $r$ ab, welche dieser Formeln eine Vereinfachung des vorliegenden Integrals zur Folge hat. Verschwindet der Nenner in einer dieser Formeln, so wird dieselbe unbrauchbar; in solchen Fällen lässt sich aber das Integral immer auf Monome oder rationale Brüche zurückführen und sind daher Reductionsformeln entbehrlich. Zur Erläuterung ihres Gebrauches wollen wir dieselben auf einige häufiger vorkommende Integrale anwenden.

**431.** Um das Integral $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^p}$ zu entwickeln, machen wir von der Formel (VI) Gebrauch, und erhalten, $m=1$, $n=2$, $r=-p$ setzend:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^p} = \frac{x}{2a(p-1)(a+bx^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2a(p-1)}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{p-1}}. \quad (1)$$

Ist $p$ eine ganze Zahl, so wird man durch wiederholte Anwendung dieser Formel zuletzt zu dem Integrale:

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}} + C$$

gelangen, welches aus §. 415 bekannt ist. Uebrigens kann man in diesem Falle, wie leicht einzusehen, auch durch Zerlegung in Partialbrüche zum Ziele kommen, doch ist der Gebrauch der Reductionsformel einfacher.

Ist $p$ von der Form $\frac{q}{2}$, so führt die wiederholte Anwendung der obigen Formel das vorgelegte Integral schliesslich auf das aus §. 428, Gl. (5) bekannte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\left(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}\right) + C \text{ zurück.}$$

Mit Hülfe der Formel (III) findet man ferner, $m+1$ statt $m$, $n=2$, $r=-\frac{1}{2}$ setzend:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{a+bx^2}}{bm} - \frac{a\,(m-1)}{bm}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}, \tag{2}$$

eine Formel, welche — wenn $m$ eine ganze Zahl ist — das vorgelegte Integral auf eines der Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}, \quad \text{oder} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}$$

reducirt, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist.

Lässt man $a = 1$, $b = -1$ sein, so folgt aus der obigen Gl. (2):

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{3}$$

und man erhält durch wiederholte Anwendung dieser Formel die folgenden Ausdrücke:

Wenn $m$ ungerade:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left\{x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5} + \ldots \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\right\} + C; \tag{4}$$

wenn $m$ gerade:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left\{x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \ldots \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 2}x\right\} + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 2}\arcsin x + C. \tag{5}$$

Setzt man in (IV) $-m+1$ an die Stelle von $m$, ferner $n = 2$, $r = -\frac{1}{2}$, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{a\,(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{b\,(m-2)}{a\,(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+bx^2}}, \tag{6}$$

durch welche Formel das vorgelegte Integral, je nachdem $m$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, zuletzt auf eines der beiden Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}}$$

zurückgeführt wird, welche man mittelst der Formeln in §. 428 findet, indem man dort $b = 0$ setzt und dann $b$ statt $c$ schreibt.

Um das Integral $\int x^m \sqrt{a + bx^2}\, dx$ zu entwickeln, wird man zuvörderst mittelst der Reductionsformel (V) das Radical in den Nenner hinabdrücken; man erhält, $m + 1$ statt $m$, $n = 2$ und $r = \frac{1}{2}$ setzend:

$$\int x^m \sqrt{a + bx^2}\, dx = \frac{x^{m+1}\sqrt{a + bx^2}}{m + 2} + \frac{a}{m + 2}\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a + bx^2}}, \tag{7}$$

wo nun das Integral rechter Hand nach den Formeln (2) oder (6) dieses §. weiter behandelt wird, je nachdem $m$ eine positive oder negative Zahl ist.

Zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \int \frac{x^{m-\frac{1}{2}}\, dx}{\sqrt{a + bx}}$$

wird man in der Reductionsformel (III) $m + \frac{1}{2}$ statt $m$, $n = 1$, $r = -\frac{1}{2}$ setzen und hiedurch zur folgenden Formel gelangen:

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{ax + bx^2}}{bm} - \frac{a(2m - 1)}{2bm}\int \frac{x^{m-1}\, dx}{\sqrt{ax + bx^2}}, \tag{8}$$

durch deren wiederholte Anwendung das gesuchte Integral, je nachdem $b$ positiv oder negativ, schliesslich auf eines der Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\left(a + 2bx + 2\sqrt{b}\sqrt{ax + bx^2}\right) + C \tag{9}$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{2bx - a}{a} + C \tag{10}$$

zurückgeführt wird, welche unmittelbar aus den Formeln (1) und (4) des §. 428 hervorgehen, wenn man das constante Glied unter dem Wurzelzeichen $= 0$ setzt. Das letztere Integral ist, wie jedes, welches durch einen Kreisbogen ausgedrückt wird, mannigfaltiger Formen fähig, unter welchen die folgenden, als die einfachsten, bemerkt werden können:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - bx^2}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \arcsin \sqrt{\frac{bx}{a}} + C = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sin\,vers} \frac{2bx}{a} + C, \tag{11}$$

welche sich sämmtlich nur durch die willkürliche Constante unterscheiden. *)

---

*) Es ist, wie man leicht findet: $\arcsin \frac{2bx - a}{a} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{bx}{a}} - \frac{\pi}{2}$ $= \operatorname{arc\,sin\,vers} \frac{2bx}{a} - \frac{\pi}{2}$.

Mittelst der Reductionsformel (V) erhält man ferner, indem man $n = 1$, $r = \frac{1}{2}$ und $m + \frac{3}{2}$ statt $m$ setzt:

$$\int x^m \sqrt{ax + bx^2}\, dx = \frac{x^{m+1}\sqrt{ax + bx^2}}{m + 2} + \frac{a}{2(m+2)}\int \frac{x^{m+1}\, dx}{\sqrt{ax + bx^2}}, \quad (12)$$

wo nun das Integral rechter Hand nach Formel (8) in diesem §. weiter behandelt werden kann.

Setzt man in (12) $m = 0$, so folgt, wenn man zugleich die Gl. (8) für $m = 1$ in Anspruch nimmt:

$$\int \sqrt{ax + bx^2}\, dx = \frac{2bx + a}{4b}\sqrt{ax + bx^2} - \frac{a^2}{8b}\int \frac{dx}{\sqrt{ax + bx^2}}; \quad (13)$$

für $a = 2\alpha$, $b = -1$ ergibt sich hieraus, mit Rücksicht auf (10):

$$\int \sqrt{2\alpha x - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}(x - \alpha)\sqrt{2\alpha x - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\arcsin\frac{x - \alpha}{\alpha} + C. \quad (14)$$

**432.** Fällt ein irrationales Differenzial nicht unter eine der in in den vorhergehenden §§. betrachteten Formen, so kann dasselbe — einzelne Fälle ausgenommen — nur durch Reihen integrirt werden.

Zur Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

Um das Integral $\int \sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}}\, dx$ zu bestimmen, hat man, unter der Voraussetzung, dass $e$ und $x$ echte Brüche:

$$\sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}} = (1 - e^2x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{1 - \tfrac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \ldots\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\right\},$$

d. i.

$$\sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}} = 1 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \ldots$$

wo

$$A_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2,$$

$$A_2 = \frac{1.3}{2.4} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4},$$

$$A_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3}{2.4.6},$$

u. s. w.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $dx$ und integrirt, so erhält man

$$\int\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\,dx = x + \frac{1}{3}A_1x^3 + \frac{1}{5}A_2x^5 + \frac{1}{7}A_3x^7 + \ldots + C.$$

Es ist übrigens nicht eben nothwendig, die Funktion in eine nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe zu entwickeln, wenn nur überhaupt die Glieder eine integrable Form erhalten. So kann man im obigen Beispiele die Wurzelgrösse $\sqrt{1-x^2}$ im Nenner unverändert beibehalten, und erhält dann:

$$\int\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \tfrac{1}{2}e^2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1.1}{2.4}e^4\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots,$$

welche Integrale nach Formel (5) des vorigen §. gefunden werden können.

Auf ähnliche Weise erhält man das Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}} = \int dx\,(1-e^2x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-\varepsilon^2x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

entwickelt man die Potenzen der Binome, unter der Voraussetzung, dass $x$, $e$ und $\varepsilon$ ächte Brüche, und multiplicirt die beiden Reihen, so kommt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}} = \int dx\,(1 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \ldots)$$

$$= x + \frac{1}{3}A_1x^3 + \frac{1}{5}A_2x^5 + \frac{1}{7}A_3x^7 + \ldots + C,$$

wo

$$A_1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

$$A_2 = \frac{1.3}{2.4}e^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^4,$$

$$A_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2}e^4\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}e^2\varepsilon^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^6,$$

u. s. w.

Auch kann man, den einen Wurzelfactor beibehaltend, setzen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}} + \frac{1}{2}e^2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}e^4\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}} + \ldots,$$

welche Integrale sofort mittelst der Formel (2) im vorigen §. entwickelt werden können.

## IV. Integration der transcendenten Differenziale.

### a) Differenziale mit Exponentialgrössen.

**433.** Wenn ein Differenzial transcendente Funktionen enthält, so ist die Integration nur in besonderen Fällen in endlicher oder geschlossener Form ausführbar, wenn es nämlich gelingt, das Differenzial durch Substitution einer neuen Variablen auf eine algebraische integrable Form zu bringen oder durch geeignete Reductionsformeln auf ein bereits bekanntes einfaches Integral zurückzuführen.

Erscheint das vorgelegte Differenzial als algebraische Funktion der Exponentielle $e^{ax}$, so wird dasselbe durch die Substitution: $e^{ax} = z$, $x = \frac{lz}{a}$, $dx = \frac{1}{a}\frac{dz}{z}$ algebraisch und kann sofort nach den Methoden der vorhergehenden Abschnitte behandelt werden. So wird z. B. mittelst dieser Substitution:

$$\int\frac{e^{ax}\,dx}{(e^{ax}+1)\sqrt{e^{2ax}-1}} = \frac{1}{a}\int\frac{dz}{(z+1)\sqrt{z^2-1}}.$$

Setzt man nun $\sqrt{z^2-1} = z - y$, woraus $z = \frac{1+y^2}{2y}$, $dz = \frac{y^2-1}{2y^2}\,dy$ folgt, so verwandelt sich das letzte Integral in

$$-\frac{2}{a}\int\frac{dy}{(1+y)^2} = \frac{2}{a}\,\frac{1}{1+y} = \frac{2}{a}\,\frac{1}{1+z-\sqrt{z^2-1}}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}};$$

es ist somit, wenn man das constante Glied mit der willkürlichen Constante vereinigt, und den Werth von $z = e^{ax}$ wiederherstellt:

$$\int\frac{e^{ax}\,dx}{(e^{ax}+1)\sqrt{e^{2ax}-1}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}} + C.$$

Wenden wir auf das Integral $\int x^m e^{ax}\,dx$ die Regel der theilweisen Integration an, indem wir in der Gleichung $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, $u = x^m$, $dv = e^{ax}\,dx$ setzen und beachten, dass

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

ist, so erhalten wir die Reductionsformel:

$$\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax}\,dx. \qquad (1)$$

Ist nun $m$ eine positive ganze Zahl, so gelangt man durch wiederholte Anwendung dieser Formel zuletzt auf das bekannte Integral $\int e^{ax}dx$, und erhält sofort:

$$\int x^m e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{x^m}{a} - \frac{mx^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^3} - \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^m \cdot \frac{m(m-1)\dots 2.1}{a^{m+1}}\right] + C. \quad (2)$$

Bestimmt man ferner aus Gl. (1) das rechter Hand stehende Integral und setzt $-m+1$ an die Stelle von $m$, so folgt:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x^m} = -\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\int \frac{e^{ax}dx}{x^{m-1}}, \quad (3)$$

und man erhält durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x^m} = -\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}}\left[1 + \frac{ax}{(m-2)} + \frac{a^2x^2}{(m-2)(m-3)} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{a^{m-2}x^{m-2}}{(m-2)(m-3)\dots 2}\right] + \frac{a^{m-1}}{(m-1)(m-2)\dots 2.1}\int \frac{e^{ax}dx}{x}. \quad (4)$$

Das Integral $\int \frac{e^{ax}dx}{x}$ ist einer weiteren Reduction nicht fähig und man muss zur Bestimmung desselben zur Reihenentwickelung seine Zuflucht nehmen. Da für jeden Werth von $x$:

$$\frac{e^{ax}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{1} + \frac{a^2x}{1.2} + \frac{a^3x^2}{1.2.3} + \dots,$$

so hat man

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = C + lx + \frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots \quad (5)$$

In allen anderen Fällen, wenn $m$ eine gebrochene Zahl ist, oder die Exponentielle $e^{ax}$ in anderer als der oben betrachteten Weise mit $x$ verknüpft erscheint, muss gleichfalls zur Reihenentwickelung geschritten werden. Zur Vereinfachung kann man sich aber häufig der Regel der theilweisen Integration mit Vortheil bedienen.

Ist nämlich das Integral von der Form $\int f(x)e^{ax}dx$, so hat man vermöge der erwähnten Regel:

$$\int f(x)e^{ax}dx = \frac{f(x)e^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int f'(x)e^{ax}dx.$$

Ist nun z. B. $f(x)$ ein Logarithmus, so wird $f'(x)$ algebraisch und das Integral rechter Hand nur mehr eine Tanscendente enthalten; dasselbe ist der Fall, wenn $f(x)$ ein Kreisbogen ist.

Ist aber $f(x)$ ein rationaler Bruch, so kommt man unmittelbar durch Auflösung in Partialbrüche auf Integrale von der Form

$$\int \frac{A e^{ax}\, dx}{(x-\alpha)^m} = A e^{a\alpha} \int \frac{e^{az}\, dz}{z^m},$$

wenn man nämlich $x - \alpha = z$ setzt, wo das Integral nach (4) weiter behandelt werden kann.

b) Logarithmische Differenziale.

**434.** Betrachten wir das Integral $\int x^m (lx)^n\, dx$, so erhalten wir durch Anwendung der Regel der theilweisen Integration:

$$\int x^m (lx)^n\, dx = \frac{x^{m+1}(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (lx)^{n-1}\, dx. \quad (1)$$

Ist $n$ eine positive ganze Zahl, so kommt man durch wiederholte Anwendung dieser Formel zuletzt auf das bekannte Integral $\int x^m\, dx$ und man erhält somit:

$$\int x^m (lx)^n\, dx = x^{m+1} \left[ \frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(m+1)^{n+1}} \right] + C. \quad (2)$$

Aus (1) folgt ferner, durch Reduction auf das rechter Hand stehende Integral und Substitution von $-n+1$ an die Stelle von $n$·

$$\int \frac{x^n\, dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^n} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m\, dx}{(lx)^{n-1}}, \quad (3)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$\int \frac{x^m\, dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{n-1} \left[ \frac{1}{(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-2)(lx)^{n-2}} \right.$$
$$\left. + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} + \cdots + \frac{(m+1)^{n-2}}{(n-2)(n-3)\ldots 2.1\, lx} \right]$$
$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{x^m\, dx}{lx} + C. \quad (4)$$

Das Integral $\int \frac{x^m\, dx}{lx}$ kann in endlicher Form nicht dargestellt werden. Setzt man $lx = y$ (also $x = e^y$, $x^m = e^{my}$, $dx = e^y dy$), so wird:

$$\int \frac{x^m\,dx}{lx} = \int \frac{e^{(m+1)y}\,dy}{y},$$

wodurch dieses Integral auf das im vorigen §. in Gleichung (5) betrachtete zurückgeführt ist. Man findet hiernach:

$$\int \frac{e^{(m+1)y}\,dy}{y} = C + ly + \frac{(m+1)y}{1} + \frac{1}{2}\frac{(m+1)^2 y^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(m+1)^3 y^3}{1.2.3} + \ldots,$$

somit, wenn man den Werth von $y = lx$ wiederherstellt:

$$\int \frac{x^m\,dx}{lx} = C + l(lx) + \frac{(m+1)\,lx}{1} + \frac{1}{2}\frac{(m+1)^2 (lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(m+1)^3 (lx)^3}{1.2.3} + \ldots \quad (5)$$

Für $m = 0$ erhält man aus (2), (4) und (5):

$$\int (lx)^n dx = x\left[(lx)^n - n(lx)^{n-1} + n(n-1)(lx)^{n-2} - \ldots \pm n!\right] + C, \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{(lx)^n} = -\frac{x}{n-1}\left[\frac{1}{(lx)^{n-1}} + \frac{1}{(n-2)(lx)^{n-2}} + \frac{1}{(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!\,lx}\right] + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}\int \frac{dx}{lx} + C, \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{lx} = C + l(lx) + \frac{1}{1}\,lx + \frac{1}{2}\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots \quad (8)$$

Für $m = -1$ kann wohl die Formel (4), nicht aber jene (2) benützt werden; man hat aber, $lx = z$ setzend:

$$\int \frac{(lx)^n dx}{x} = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C, \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{x\,(lx)^n} = \int \frac{dz}{z^n} = -\frac{1}{(n-1)\,z^{n-1}} = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}} + C, \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = \int \frac{dz}{z} = lz = l(lx) + C. \quad (11)$$

Man sieht übrigens leicht, dass jedes Differenzial von der Form $f(lx)\cdot\frac{dx}{x}$, unter $f(lx)$ eine algebraische Funktion der Grösse $l(x)$ verstanden, durch die Substitution $lx = z$ algebraisch wird. Logarithmische Differenziale von der Form $f(x, lx)\,dx$ werden durch die

Substitution $lx = z$ in die Exponentialform $f(e^z, z)\, e^z\, dz$ umgewandelt und können dann nach dem vorigen §. behandelt werden. Auf diesem Wege hätten wir ebenfalls zu den Formeln (1) bis (8) gelangen können.

### Goniometrische und cyclometrische Differenziale.

**435.** Da alle goniometrischen Funktionen sich durch irgend eine derselben algebraisch ausdrücken lassen, so wird ein Differenzial, welches nur solche Funktionen enthält, eine algebraische Form annehmen, wenn man eine der darin erscheinenden Funktionen einer neuen Veränderlichen $z$ gleich setzt. So wird z. B. mittelst der Substitution $\sin x = z$, $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, das Integral:

$$J = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2},$$

und kann nun leicht bestimmt werden; denn setzt man, um rational zu machen, $\sqrt{1-z^2} = 1 - yz$, so verwandelt sich dasselbe in

$$J = 2\int \frac{dy}{1 + 2y - y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{2} - 1 + y}{\sqrt{2} + 1 - y} + C$$

und man hat somit, wenn man den Werth von

$$y = \frac{1 - \sqrt{1-z^2}}{z} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x \text{ wiederherstellt:}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{2} - 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{\sqrt{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} x} + C.$$

Wendet man dieselbe Substitution: $\sin x = z$, $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ auf das allgemeinere, eine häufige Anwendung findende, Integral

$$\int \sin x^m \cos x^n\, dx$$

an, so erhält dasselbe die Form $\int z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz$, in welcher man das binomische Integral erkennt; man kann daher für dasselbe die in §. 430 entwickelten Reductionsformeln in Anspruch nehmen. Einfacher ist jedoch die unmittelbare Entwickelung. Setzt man nämlich in der Gleichung: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$,

$$u = \sin x^{m-1}, \quad dv = \cos x^n \sin x\, dx,$$

somit

$$du = (m - 1)\sin x^{m-2}\cos x\,dx, \quad v = -\frac{\cos x^{n+1}}{n+1},$$

so erhält man:

$$\int \sin x^m \cos x^n\,dx = -\frac{\sin x^{m-1}\cos x^{n+1}}{n+1}$$
$$+\frac{m-1}{n+1}\int \sin x^{m-2}\cos x^{n+2}dx. \quad (1)$$

Hieraus folgt, wenn man $\frac{1}{2}\pi - x$ an die Stelle von $x$ treten lässt, und $m$ mit $n$ vertauscht:

$$\int \sin x^m \cos x^n\,dx = \frac{\sin x^{m+1}\cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin x^{m+2}\cos x^{n-2}dx. \quad (2)$$

Setzt man im Integrale rechter Hand der Gl. (1) $\sin x^{m-2}\cos x^{n+2} = \sin x^{m-2}\cos x^n(1 - \sin x^2) = \sin x^{m-2}\cos x^n - \sin x^m \cos x^n$, so zerfällt dasselbe in zwei Theile, und die Formel (1) verwandelt sich durch Vereinigung der gleichartigen Integrale in folgende:

$$\int \sin x^m \cos x^n\,dx = -\frac{\sin x^{m-1}\cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin x^{m-2}\cos x^n dx, \quad (3)$$

aus welcher man, $m + 2$ statt $m$ schreibend, die nachstehende gewinnt:

$$\int \sin x^m \cos x^n\,dx = \frac{\sin x^{m+1}\cos x^{n+1}}{m+1}$$
$$+\frac{m+n+2}{m+1}\int \sin x^{m+2}\cos x^n\,dx. \quad (4)$$

Setzt man endlich in den zwei letzten Formeln $\frac{1}{2}\pi - x$ statt $x$ und vertauscht $m$ mit $n$, so ergibt sich:

$$\int \sin x^m \cos x^n\,dx = \frac{\sin x^{m+1}\cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin x^m \cos x^{n-2}dx, \quad (5)$$

$$\int \sin x^m \cos x^n\,dx = -\frac{\sin x^{m+1}\cos x^{n+1}}{n+1}$$
$$+\frac{m+n+2}{n+1}\int \sin x^m \cos x^{n+2}\,dx. \quad (6)$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln auf ein Integral der in Rede stehenden Form wird dasselbe schliesslich auf ein Integral zurückgeführt, in welchem der Zahlenwerth der Exponenten von $\sin x$ und $\cos x$ die Einheit nicht überschreitet, und welches, wenn $m$ und $n$ ganze Zahlen sind, unter den folgenden neun Integralen sich vorfinden muss, wobei, der Kürze wegen, die Constante allenthalben weggelassen ist:

$$\int dx = x; \quad \int \cos x\, dx = \sin x; \quad \int \sin x\, dx = -\cos x;$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\sin x^2; \quad \int \frac{dx}{\sin x} = l\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x; \quad \int \frac{dx}{\cos x} = l\,\mathrm{tg}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}x);$$

$$\int \mathrm{tg}\,x\, dx = -\,l\cos x; \quad \int \mathrm{cotg}\,x\, dx = l\sin x; \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l\,\mathrm{tg}\,x.$$

Die drei ersten dieser Integrale sind unmittelbar bekannt; die folgenden erhält man leicht auf dem im Eingange dieses §. angedeuteten Wege, oder kürzer durch einfache Umformungen. Es ist nämlich:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\,.\,d\sin x = \tfrac{1}{2}\sin x^2 + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\tfrac{1}{2}\,dx}{\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x} = \int \frac{\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,d.\tfrac{1}{2}x}{\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x^2} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x}{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x} = l\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\,(90+x)}{\sin\,(90+x)} = l\,\mathrm{tg}\,(45 + \tfrac{1}{2}x) + C,$$

$$\int \mathrm{tg}\,x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d\,.\cos x}{\cos x} = -\,l\cos x + C,$$

$$\int \mathrm{cotg}\,x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d\,.\sin x}{\sin x} = l\sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos x^2}}{\mathrm{tg}\,x} = \int \frac{d\,.\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x} = l\,\mathrm{tg}\,x + C.$$

Als besondere Fälle der obigen allgemeinen Formeln verdienen folgende bemerkt zu werden:

$$\int \sin x^m\, dx = -\frac{\sin x^{m-1}\cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin x^{m-2}\, dx, \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin x^{m-2}}, \tag{8}$$

$$\int \cos x^n\, dx = \frac{\sin x\cos x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos x^{n-2}\, dx, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x^n} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos x^{n-2}}, \tag{10}$$

$$\int \mathrm{tg}\,x^m\, dx = \frac{\mathrm{tg}\,x^{m-1}}{m-1} - \int \mathrm{tg}\,x^{m-2}\, dx, \tag{11}$$

$$\int \mathrm{cotg}\,x^n\, dx = -\frac{\mathrm{cotg}\,x^{n-1}}{n-1} - \int \mathrm{cotg}\,x^{n-2}\, dx. \tag{12}$$

**436.** Die Potenzen $\sin x^m$, $\cos x^n$ können bekanntlich, wenn $m$ und $n$ ganze, positive Zahlen sind, durch Sinusse oder Cosinusse der Vielfachen des Bogens $x$ ausgedrückt werden [§. 75, I. Bd.]; hiedurch ist ein anderes Mittel zur Entwickelung der Integrale $\int \sin x^m\, dx$, $\int \cos x^n\, dx$, $\int \sin x^m \cos x^n\, dx$ unter der Voraussetzung positiver, ganzer Exponenten dargeboten. Dieses Verfahren nimmt, wie leicht zu übersehen, die folgenden Integrale in Anspruch:

$$\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C, \quad \int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m} + C,$$

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C,$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C,$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C,$$

von welchen die beiden ersten sich unmittelbar aus den Formeln $\int \sin x\, dx = -\cos x$, $\int \cos x\, dx = \sin x$ ergeben, wenn man $mx$ an die Stelle von $x$ treten lässt; die drei folgenden erhält man leicht, wenn man in den bekannten goniometrischen Formeln:

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b),$$
$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$
$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$a = mx$, $b = nx$ setzt, mit $dx$ multiplicirt und sodann, mit Hülfe der zwei ersten Formeln integrirt.

So ist z. B. $8 \cos x^4 = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3$, somit

$$\int \cos x^4\, dx = \tfrac{1}{8}\int \cos 4x\, dx + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \tfrac{3}{8}\int dx$$
$$= \tfrac{1}{32} \sin 4x + \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{3}{8} x + C.$$

Eine zweimalige Anwendung der Formel (9) im vorigen §. gibt:

$$\int \cos x^4\, dx = \sin x\left(\tfrac{1}{4} \cos x^3 + \tfrac{3}{8} \cos x\right) + \tfrac{3}{8} x + C,$$

welcher Ausdruck mit dem obigen identisch ist.

Ebenso hat man, wegen $\sin x^3 = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$ und $\cos x^2 = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$, durch Multiplication dieser Ausdrücke:

$$\int \sin x^3 \cos x^2\, dx = -\tfrac{1}{8}\int \sin 3x \cos 2x\, dx + \tfrac{3}{8}\int \sin x \cos 2x\, dx$$
$$-\tfrac{1}{8}\int \sin 3x\, dx + \tfrac{3}{8}\int \sin x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{10} \cos 5x - \tfrac{1}{6} \cos 3x - \cos x\right) + C.$$

Dasselbe Integral würde man mit Hülfe der Reductionsformeln (3) und (5) des vorigen §., jede einmal in Anspruch nehmend, in folgender Form finden:

$$\int \sin x^3 \cos x^2\, dx = \tfrac{1}{5}(\sin x^4 - \tfrac{1}{3}\sin x^2 - \tfrac{2}{3})\cos x + C.$$

Es verdient übrigens noch bemerkt zu werden, dass in dem Falle, wenn in dem Integrale $\int \sin x^m \cos x^n\, dx$ einer der beiden Exponenten positiv und ungerade ist, die Reductionsformeln entbehrt werden können. Das Verfahren erhellt sogleich aus folgendem Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \sin x^3 \cos x^2 dx &= \int \sin x^2 \cos x^2 . \sin x\, dx = -\int (1-\cos x^2)\cos x^2 . d\cos x\\ &= \int \cos x^4 . \, d\cos x - \int \cos x^2 . d\cos x\\ &= \tfrac{1}{5}\cos x^5 - \tfrac{1}{3}\cos x^3 + C,\end{aligned}$$

welche Form des Integrals mit der früheren wieder identisch ist.

**437.** Mittelst der Regel der theilweisen Integration erhält man für die Integrale $\int x^m \sin x\, dx$ und $\int x^m \cos x\, dx$ leicht folgende Reductionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}\int x^m \sin x\, dx &= -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x\, dx,\\ \int x^m \cos x\, dx &= x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\, dx,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

durch welche immer das eine Integral auf das andere reducirt und dabei der Exponent $m$ um eine Einheit herabgedrückt wird. Zuletzt gelangt man zu einem der bekannten Integrale $\int \sin x\, dx$, $\int \cos x\, dx$. Setzt man $-m+1$ an die Stelle von $m$ und reducirt auf die Integrale rechter Hand, so ergeben sich die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\cos x\, dx}{x^m} &= -\frac{\cos x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{\sin x\, dx}{x^{m-1}},\\ \int \frac{\sin x\, dx}{x^m} &= -\frac{\sin x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)}\int \frac{\cos x\, dx}{x^{m-1}},\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

deren wiederholte Anwendung schliesslich auf eines der beiden Integrale:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x}, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{x},$$

führt, welche in endlicher Form nicht angegeben werden können. Durch Benützung der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ erhält man:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x} = C + \frac{1}{1}\frac{x}{1} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \ldots, \tag{3}$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{x} = C + lx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{4}$$

So findet man z. B.

$$\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x\, dx;$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx;$$

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

somit

$$\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$$

Betrachten wir noch die Integrale:

$$A = \int e^{ax} \cos bx^m\, dx \quad \text{und} \quad B = \int e^{ax} \sin bx^m\, dx,$$

und machen wieder von der theilweisen Integration Gebrauch, in der Gleichung $\int u\, dv = uv - \int v\, du$, $dv = e^{ax} dx$, also $v = \frac{1}{a} e^{ax}$, und beziehungsweise

$$u = \begin{cases} \cos bx^m \\ \sin bx^m \end{cases}, \text{ somit } du = \begin{cases} -bm \cos bx^{m-1} \sin bx\, dx \\ \phantom{-}bm \sin bx^{m-1} \cos bx\, dx \end{cases}$$

setzend, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{e^{ax}\cos bx^m}{a} + \frac{bm}{a}\int e^{ax} \cos bx^{m-1} \sin bx\, dx, \\ B &= \frac{e^{ax}\sin bx^m}{a} - \frac{bm}{a}\int e^{ax} \sin bx^{m-1} \cos bx\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

Bezeichnen wir die Integrale rechter Hand mit $A'$ und $B'$, so ergibt sich, wenn wir dieselben abermals integriren, und zu diesem Ende $dv = e^{ax} dx$, also $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ und beziehungsweise

$$u = \begin{cases} \cos bx^{m-1} \sin bx \\ \sin bx^{m-1} \cos bx, \end{cases}$$

somit

$$du = \begin{cases} [-b(m-1) \cos bx^{m-2} \sin bx^2 + b \cos bx^m]\, dx \\ [b(m-1) \sin bx^{m-2} \cos bx^2 - b \sin bx^m]\, dx, \end{cases}$$

d. i. vermöge der Relation $\sin bx^2 + \cos bx^2 = 1$:

$$du = \begin{cases} [-b(m-1) \cos bx^{m-2} + bm \cos bx^m]\, dx \\ [b(m-1) \sin bx^{m-2} - bm \sin bx^m]\, dx \end{cases}$$

setzen:

$$A' = \frac{e^{ax} \cos bx^{m-1} \sin bx}{a} - \frac{bm}{a} A + \frac{b(m-1)}{a} \int e^{ax} \sin bx^{m-2}\, dx,$$

$$B' = \frac{e^{ax} \sin bx^{m-1} \cos bx}{a} + \frac{bm}{a} B - \frac{b(m-1)}{a} \int e^{ax} \sin bx^{m-2}\, dx.$$

Substituiren wir endlich diese Werthe in die Gl. ($m$) und vereinigen die beiden, die gesuchten Integrale $A$ und $B$ enthaltenden Glieder, so erhalten wir:

$$\int e^{ax} \cos bx^m\, dx = \frac{e^{ax} \cos bx^{m-1} (a \cos bx + bm \sin bx)}{a^2 + b^2 m^2}$$
$$+ \frac{m(m-1) b^2}{a^2 + b^2 m^2} \int e^{ax} \cos bx^{m-2}\, dx, \tag{5}$$

$$\int e^{ax} \sin bx^m\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx^{m-1} (a \sin bx - bm \cos bx)}{a^2 + b^2 m^2}$$
$$+ \frac{m(m-1) b^2}{a^2 + b^2 m^2} \int e^{ax} \sin bx^{m-2}\, dx. \tag{6}$$

Je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, werden durch wiederholte Anwendung dieser Formeln die in Rede stehenden Integrale auf eines der folgenden reducirt:

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C, \tag{7}$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C, \tag{8}$$

von welchen die beiden letzteren aus (5) und (6) für $m = 1$ folgen. Mit Hülfe der beiden letzten Formeln (7) und (8) kann auch das Integral $\int e^{ax} \sin x^m \cos x^n\, dx$ gefunden werden, wenn man das Product $\sin x^m \cos x^n$ nach Vielfachen des Bogens $x$ entwickelt, wodurch das fragliche Integral in solche von der Form $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ und $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ zerfällt.

Lässt man in (5) und (6) $-m + 2$ an die Stelle von $m$ treten, so erhält man Reductionsformeln für die Integrale

$$\int \frac{e^{ax}\, dx}{\cos bx^m} \text{ und } \int \frac{e^{ax}\, dx}{\sin bx^m},$$

mittelst deren man bis zu den entsprechenden Integralen mit dem Exponenten $m = 2$ oder 1 (je nachdem $m$ gerade oder ungerade) herabkommen kann, welche letztere nicht weiter angegeben werden können, und eine Reihenentwickelung nothwendig machen.

**384.** Beschäftigen wir uns noch mit dem Integrale

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$$

Setzt man $\cos x = y$, also $\sin x = \sqrt{1-y^2}$, $dx = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, so verwandelt sich dasselbe in

$$-\int \frac{dy}{(a+by)\sqrt{1-y^2}},$$

und kann nunmehr nach den Vorschriften des §. 427 rational gemacht und sodann mittelst der in §. 424 entwickelten Formeln integrirt werden. Man gelangt jedoch kürzer unmittelbar zu einer rationalen Form mittelst der Substitution:

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

woraus $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ und $dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$ folgt. Hiemit wird

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = 2\int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2}.$$

Dieses Integral wird mittelst der Formeln (2) und (4) in §. 415 erhalten, je nachdem $a-b$ positiv oder negativ ist. Setzt man nach verrichteter Integration für $z$ seinen aus obiger Relation folgenden Werth:

$$z = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{2\cos\frac{1}{2}x^2}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x$$

wieder ein, so kommt für $a > b$:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right) + C, \tag{1}$$

für $a < b$:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right) + C. \tag{2}$$

Für $a = b$ werden diese Formeln unbrauchbar; in diesem Falle ist aber unser Integral:

$$\int \frac{dx}{a(1+\cos x)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{2\cos\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x + C. \tag{3}$$

Man hat nun auch:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b}\int \frac{(a + b\cos x - a)\, dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b}\int \left(1 - \frac{a}{a + b\cos x}\right) dx,$$

d. i.

$$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a + b\cos x}; \tag{4}$$

und

$$\int \frac{(f + g\cos x)\, dx}{a + b\cos x} = f\int \frac{dx}{a + b\cos x} + g\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x},$$

d. i. vermöge der Gl. (4)

$$\int \frac{(f + g\cos x)\, dx}{a + b\cos x} = \frac{gx}{b} + \frac{bf - ag}{b}\int \frac{dx}{a + b\cos x}, \tag{5}$$

durch welche Formeln die links stehenden Integrale auf das durch die Gleichungen (1) und (2) bestimmte zurückgeführt sind.

Um endlich eine Reductionsformel für das allgemeinere Integral $\int \frac{(f + g\cos x)\, dx}{(a + b\cos x)^n}$ zu erhalten, setzen wir

$$\int \frac{(f + g\cos x)\, dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{(B + C\cos x)\, dx}{(a + b\cos x)^{n-1}}, \tag{6}$$

welche Annahme gerechtfertiget sein wird, wenn sich die noch unbestimmten Coefficienten $A$, $B$, $C$ so bestimmen lassen, dass sie dieser Gleichung Genüge leisten. Differenziren wir zu diesem Ende die Gleichung, so erhalten wir, nach Division durch $dx$ und Wegschaffung der Nenner:

$$\begin{aligned} f + g\cos x = A\cos x\,(a + b\cos x) &+ (n - 1)\, Ab\, (1 - \cos x^2) \\ &+ (B + C\cos x)(a + b\cos x), \end{aligned}$$

oder, nach Potenzen von $\cos x$ geordnet:

$$\begin{aligned} [(n - 2)\, A - C]\cos x^2 - [Aa + Bb + Ca - g]\cos x \\ - [(n - 1)\, Ab + Ba - f] = 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man also $A$, $B$, $C$ so, dass

$$\begin{aligned} (n - 2)\, A - C &= 0, \\ Aa + Bb + Ca - g &= 0, \\ (n - 1)\, Ab + Ba - f &= 0, \end{aligned}$$

wird, so ist die Gl. (6) identisch und somit richtig. Aus diesen Gleichungen zieht man aber die Werthe:

$$A=\frac{ag-bf}{(n-1)(a^2-b^2)},\quad B=\frac{af-bg}{a^2-b^2},\quad C=\frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b^2)},\tag{7}$$

welche, wie man sieht, immer reell und (mit Ausnahme der beiden Fälle: $n=1$ und $a=b$) endlich sind. Mittelst der Formel (6) wird nun das in Rede stehende Integral auf ein anderes ähnliches zurückgeführt, auf welches dieselbe Formel mit Benützung der Formeln (7), wieder angewendet werden kann.

Der Ausnahmefall $n=1$ ist bereits durch die Formel (5) in Verbindung mit jenen (1) und (2) erledigt. Ist aber $a=b$, so wird unser Integral

$$\int\frac{(f+g\cos x)\,dx}{a^n(1+\cos x)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{(f-g)+g(1+\cos x)}{(1+\cos x)^n}dx$$
$$=\frac{f-g}{a^n}\int\frac{dx}{(1+\cos x)^n}+\frac{g}{a^n}\int\frac{dx}{(1+\cos x)^{n-1}},$$

d. i. vermöge der Relation: $1+\cos x=2\cos\frac{1}{2}x^2$:

$$\int\frac{(f+g\cos x)\,dx}{a^n(1+\cos x)^n}=\frac{f-g}{2^{n-1}a^n}\int\frac{d\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x^{2n}}+\frac{g}{2^{n-2}a^n}\int\frac{d\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x^{2n-2}},$$

welche Integrale nach Formel (10), §. 435 entwickelt werden können.

**439.** Ein Integral von der Form $\int f(z)\,dx$, wo $z$ eine der cyclometrischen Functionen $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, etc. bezeichnet, lässt sich jederzeit auf ein goniometrisches zurückführen, wenn man $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$ u. s. w. einer neuen Veränderlichen gleich setzt. So wird mittelst der Substitution $\operatorname{arc}\sin x=z$, $x=\sin z$, $dx=\cos z\,dz$:

$$\int f(\operatorname{arc}\sin x)\,dx=\int f(z)\cos z\,dz;$$

für $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x=z$, $x=\operatorname{tg} z$, $dx=\sec z^2\,dz$ wird

$$\int f(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)\,dx=\int f(z)\sec z^2\,dz,\ \text{u. s. w.}$$

Hat das Integral die Form:

$$\int f(x)\operatorname{arc}\sin x\,dx,\quad \int f(x)\operatorname{arc}\cos x\,dx,\ \text{u. s. w.}$$

so kann der Bogen durch theilweise Integration weggeschafft werden, da bekanntlich das Differenzial desselben algebraisch ist.

Um z. B. das Integral $\int x^n\operatorname{arc}\sin x\,dx$ zu bestimmen, setze man in der Gl. $\int u\,dv=uv-\int v\,du$: $dv=x^n dx$, $u=\operatorname{arc}\sin x$, also $v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, so folgt:

$$\int x^n \arcsin x \, dx = \frac{x^{n+1} \arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo das Integral rechter Hand nach §. 431 entwickelt werden kann.

## V. Integration der höheren Differenzialausdrücke mit einer Veränderlichen und der partiellen Differenzialien von Funktionen mehrerer veränderlichen Grössen.

**440.** Wir haben bisher das 1te Differenzial $dy = f(x)\,dx$ einer Funktion als gegeben betrachtet und die Aufgabe verfolgt, von diesem zur ursprünglichen Funktion zurückzukehren. Es kann aber auch ein höheres, z. B. das $n^{te}$ Differenzial gegeben sein; die Wiederherstellung der ursprünglichen Funktion erfordert sodann, wie leicht einzusehen, eine $n$-malige Integration des vorgelegten Ausdruckes.

Es sei z. B. das 2te Differenzial $d^2y = f(x)\,dx^2$ gegeben, so hat man $\frac{d^2y}{dx} = f(x)\,dx$, somit, da $\frac{d^2y}{dx} = d\frac{dy}{dx}$ ist, wobei $dx$ als constant zu betrachten ist, durch Integration:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + C;$$

hieraus folgt durch Multiplication mit $dx$ : $dy = dx \int f(x)\,dx + C\,dx$, folglich, nochmals integrirend:

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C'.$$

Statt $\int dx \int f(x)\,dx$ schreibt man kürzer $\iint f(x)\,dx^2$ oder $\int^2 f(x)\,dx^2$.

Auf dieselbe Weise erhält man durch eine dreimalige Integration aus $d^3y = f(x)\,dx^3$:

$$y = \int dx \int dx \int f(x)\,dx + Cx^2 + C'x + C''$$
$$= \iiint f(x)\,dx^3 + Cx^2 + C'x + C''.$$

So findet man z. B.:

$$y = \iint \frac{dx^2}{1+x^2} = \int dx \int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx(\operatorname{arc\,tg} x + C) = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx + Cx;$$

durch theilweise Integration ergibt sich aber:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2) + C',$$

somit:

$$y = \iint \frac{dx^2}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2) + Cx + C'.$$

Es ist immer möglich, ein solches Integral höherer Ordnung auf einfache Integrale zurückzuführen. Denn mittelst theilweiser Integration erhält man:

$$\int^2 f(x)\,dx^2 = \int dx \int f(x)\,dx = x\int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx;$$

$$\int^3 f(x)\,dx^3 = \int dx \int^2 f(x)\,dx^2 = x\int^2 f(x)\,dx^2 - \int x\,dx \int f(x)\,dx$$

$$= x^2\int f(x)\,dx - x\int x f(x)\,dx - \frac{x^2}{2}\int f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{1.2}\left\{x^2\int f(x)\,dx - 2x\int x f(x)\,dx + \int x^2 f(x)\,dx\right\};$$

ebenso findet man:

$$\int^4 f(x)\,dx^4 = \frac{1}{1.2.3}\left\{x^3\int f(x)\,dx - 3x^2\int x f(x)\,dx \right.$$
$$\left. + 3x\int x^2 f(x)\,dx - \int x^3 f(x)\,dx\right\},$$

u. s. w. Das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke gebildet sind, fällt in die Augen und lässt sich leicht durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ verificiren. Die erscheinenden Coefficienten sind die Binomialcoefficienten. Aus der Form der Entwickelung erhellt nun sogleich, dass, wenn man jedem der $n$ einfachen Integrale, in welche das Integral $n^{\text{ter}}$ Ordnung: $\int^n f(x)\,dx$ zerfällt, eine willkürliche Constante hinzufügt, wie es sein muss, das Integral $\int^n f(x)\,dx$ von der Grösse: $C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + C_2 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1}$ begleitet sein wird, wo die willkürlichen Constanten $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$, $n$ an der Zahl, sich nicht mit einander verbinden lassen, da sie in verschiedene Potenzen von $x$ multiplicirt sind.

**441.** Betrachten wir noch den Fall, wenn ein partieller Differenzialquotient höherer Ordnung einer Function mehrer von einander unabhängiger Veränderlichen gegeben, und die Aufgabe gestellt ist, aus demselben die ursprüngliche Function wieder herzustellen. Die Aufgabe bietet keine Schwierigkeiten dar, da hiezu nur wiederholte immer nach je einer Veränderlichen auszuführende Integrationen erfordert werden.

In der That, der partielle Differenzialquotient $\frac{d^2u}{dx\,dy} = f(x, y)$ einer Function $u$ der zwei unabhängigen Variablen $x$ und $y$ entsteht bekanntlich, indem $u$ zuerst etwa nach $x$ differenzirt und hiebei $y$ als constant betrachtet, und die so erhaltene Grösse hierauf nach $y$ differenzirt wird, wobei wieder $x$ die Rolle einer Constanten spielt. Hieraus folgt, dass man umgekehrt von dem gegebenen Differenzial

durch eine doppelte Integration zur primitiven Function gelangen wird, indem man zuerst nach $y$ integrirt und hiebei $x$ als constant ansieht, und hierauf das gewonnene Resultat nach $x$ integrirt, dabei $y$ als constant betrachtend. Diese Operation wird dadurch angezeigt, dass man, wenn

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=f(x,y)$$

st, schreibt:

$$u=\iint f(x,y)\,dx\,dy.$$

Da in $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ die Ordnung der Differenziation beliebig ist [§. 326], so ist auch die Ordnung der Integration im Allgemeinen ganz willkürlich, und man hat daher:

$$u=\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int dx\int f(x,y)\,dy=\int dy\int f(x,y)\,dx.$$

Findet man durch Integration, etwa nach $y$, $\int f(x,y)\,dy=F(x,y)$, so hat man dem Integrale $F(x,y)$ noch eine Grösse hinzuzufügen, welche in Bezug auf die Integrationsveränderliche $y$ constant, d. i. von dieser unabhängig ist; dieser Bedingung entspricht aber nicht nur eine constante Grösse, sondern jede beliebige Function von $x$; um daher dem Integrale die nöthige Allgemeinheit zu verleihen, wird man setzen:

$$\int f(x,y)\,dy=F(x,y)+\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine ganz willkürliche Function von $x$. Multiplicirt man nun diese Gleichung mit $dx$, integrirt nach $x$, und beachtet, dass wegen der Unbestimmtheit von $\varphi(x)$ auch $\int\varphi(x)\,dx$ ganz willkürlich bleibt und somit hiefür $\psi(x)$ gesetzt werden kann, so erhält man:

$$u=\int dx\int f(x,y)\,dy=\int F(x,y)\,dx+\psi(x)+\psi_1(y),$$

wo wieder $\psi_1(y)$ eine willkürliche Funktion von $y$.

Bestimmen wir beispielsweise das Doppelintegral:

$$u=\iint\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy,$$

so erhalten wir, zuerst nach $y$ integrirend:

$$u=\int dx\int\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int dx.\frac{y}{x^2+y^2},$$

da, wie man leicht findet,

$$\int\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\frac{y}{x^2+y^2};$$

die Integration nach $x$ gibt nunmehr:

$$u = y \int \frac{dx}{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y},$$

und wenn wir die willkürlichen Functionen hinzufügen:

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + \psi(x) + \psi_1(y).$$

In gleicher Weise folgt aus $\frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz} = f(x, y, z)$:

$$u = \int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz + \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z),$$

wo wieder $\varphi$, $\psi$, $\chi$ willkürliche Functionen von je zweien der 3 unabhängig Veränderlichen sind, und die Ordnung der Integration bei dem dreifachen Integrale $\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ im Allgemeinen eine ganz willkürliche ist. Dass diese Betrachtung auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen ausgedehnt werden könne, ist für sich klar. Man nennt solche Integrale im Allgemeinen vielfache Integrale, und insbesondere doppelte, dreifache etc., je nach der Anzahl der auszuführenden Integrationen.

---

## ZWEITES KAPITEL.

### VON DEN BESTIMMTEN INTEGRALEN.

**442.** Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist, wie aus §. 413 bekannt, durch die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \delta\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(b-\delta)] \quad (1)$$

definirt, als die Grenze, gegen welche die Summe

$$\delta\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(b-\delta)]$$

bei dem unendlichen Abnehmen von $\delta$ convergirt; zugleich ist, wenn wir mit

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (2)$$

das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ bezeichnen,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad (3)$$

wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die Funktion $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleide.

Aus diesem Begriffe des bestimmten Integrals folgen sogleich mehrere Eigenschaften desselben, welche eine häufige Anwendung finden.

1) Zunächst ist klar, dass in einem bestimmten Integral der Name der Integrationsveränderlichen beliebig geändert werden kann; denn zufolge der Gleichungen (2) und (3) ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \int_a^b f(y)\,dy = F(b) - F(a),$$

somit auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy.$$

2) Da ferner, wenn $\int f(x)\,dx = F(x) + C$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b),$$

so ist immer:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Man kann demnach die Integrationsgrenzen mit einander vertauschen, wenn man gleichzeitig das Zeichen des bestimmten Integrals verändert.

3) Ein bestimmtes Integral kann immer in eine Summe von mehreren bestimmten Integralen, welche sich auf dieselbe Differenzialfunktion beziehen, verwandelt werden, indem man — zwischen die Integrationsgrenzen $a$, $b$ neue Werthe $\alpha, \beta, \ldots$ einschiebend — das Integrationsintervall $b - a$ in mehrere Intervalle zerlegt; es ist nämlich:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx; \text{ u. s. w.}$$

Denn da nach Obigem

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx = F(\alpha) - F(a), \quad \int_\alpha^b f(x)\,dx = F(b) - F(\alpha),$$

so hat man durch Addition dieser Gleichungen:

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Auf dieselbe Weise rechtfertiget sich der Satz für eine beliebige Anzahl eingeschobener Werthe, und man überzeugt sich leicht, dass derselbe auch für den Fall gilt, wenn einer oder mehrere dieser Werthe ausserhalb des Intervalls $a$ bis $b$ liegen.

4) Sind $u$, $v$ Funktionen von $x$, so ist bekanntlich

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

und hieraus folgt:

$$\int_a^b u\,dv = (uv)_b - (uv)_a - \int_a^b v\,du,$$

wenn mit $(uv)_a$, $(uv)_b$ die Werthe von $uv$ beziehungsweise für $x = a$ und $x = b$ bezeichnet werden. Denn setzt man $\int v\,du = \varphi(x)$, also $\int u\,dv = uv - \varphi(x)$, so hat man nach Gl. (3): $\int_a^b u\,dv = (uv)_b - (uv)_a - [\varphi(b) - \varphi(a)]$, wodurch die Behauptung gerechtfertiget ist, da $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b v\,du$.

5) Lassen wir in der Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx,$$

$\alpha = \frac{1}{2}(a + b)$, d. i. dem arithmetischen Mittel zwischen $a$ und $b$ gleich sein, und nehmen wir an, dass die Funktion $f(x)$ für je zwei Werthe von $x$: $\alpha - \mu$ und $\alpha + \mu$, welche zu beiden Seiten des Mittels in gleicher Entfernung von demselben liegen, der Zahl und dem Zeichen nach gleiche Werthe annehme, so sind die beiden Integrale:

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\,dx,$$

als Summen gleicher Grössen, einander gleich, und es ist dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,dx = 2\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\,dx.$$

So ist z. B.:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx; \quad \int_0^\pi \cos x^2\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2\,dx.$$

Sind aber die Werthe der Funktion $f(x)$, von $x = \frac{1}{2}(a + b)$ aus, zu beiden Seiten der Zahl nach gleich und von entgegengesetztem

Vorzeichen, so werden die obigen beiden Integrale ebenfalls gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sein, und es ist dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 .$$

Z. B. $$\int_0^\pi \cos x\,dx = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin x^3\,dx = 0 .$$

6) Setzt man $f(x) = \varphi(x) . \chi(x)$ und nimmt an, dass die Funktionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ beide stetig seien von $a$ bis $b$, so hat man, kraft der Gl. (1):

$$\int_a^b \varphi(x) . \chi(x)\,dx = \lim \delta \left[\varphi(a)\chi(a) + \varphi(a+\delta)\chi(a+\delta) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \varphi(b-\delta)\chi(b-\delta)\right] .$$

Setzt man nun noch voraus, dass die Funktion $\chi(x)$ ihr Zeichen nicht ändere von $x = a$ bis $x = b$, so dass also die Grössen $\chi(a)$, $\chi(a+\delta)$, ... $\chi(b-\delta)$ sämmtlich dasselbe Zeichen haben, und bezeichnet mit $K$ und $G$ den kleinsten und grössten Werth, welchen die Funktion $\varphi(x)$ innerhalb dieser Grenzen annimmt, so liegt der Werth des zweiten Theils der obigen Gleichung nothwendig zwischen den beiden Werthen, welche aus demselben hervorgehen, wenn man an die Stelle der Grössen $\varphi(a)$, $\varphi(a+\delta)$, ..., $\varphi(b-\delta)$ einmal den kleinsten Werth $K$, dann den grössten Werth $G$ substituirt, d. i. zwischen den Werthen:

$$K . \lim \delta \left[\chi(a) + \chi(a+\delta) + \dots + \chi(b-\delta)\right] = K\int_a^b \chi(x)\,dx ,$$

und

$$G . \lim \delta \left[\chi(a) + \chi(a+\delta) + \dots + \chi(b-\delta)\right] = G\int_a^b \chi(x)\,dx ,$$

so dass also unter obigen Voraussetzungen:

$$K\int_a^b \chi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x) . \chi(x)\,dx < G\int_a^b \chi(x)\,dx$$

ist. Von dieser Bemerkung kann man oft mit Nutzen Gebrauch machen, um für ein bestimmtes Integral, dessen Werth nicht genau angegeben werden kann, Grenzen aufzufinden, innerhalb welcher derselbe liegen muss.

Wünscht man obige Relation in Form einer Gleichung auszudrücken, so beachte man, dass — eben kraft dieser Relation — das Integral $\int_a^b \varphi(x) . \chi(x)\,dx$ gleich gesetzt werden kann dem Integral

$\int_a^b \chi(x)\,dx$, multiplicirt mit einem zwischen $K$ und $G$ liegenden Werthe von $\varphi(x)$, welchen man mit $\varphi[a+\theta(b-a)]$ bezeichnen kann, unter $\theta$ einen positiven echten Bruch verstanden. Man darf demnach unter der Voraussetzung, dass die Funktionen $\varphi(x)$, $\chi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig verlaufen, und die Funktion $\chi(x)$ innerhalb dieser Grenzen ihr Vorzeichen nicht ändere, setzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\cdot\chi(x)\,dx = \varphi[a+\theta(b-a)]\int_a^b \chi(x)\,dx. \qquad (4)$$

Für $\chi(x)=1$ geht diese Gleichung in folgende über:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f[a+\theta(b-a)], \qquad (5)$$

welche Gleichung leicht geometrisch zu deuten, und mit Gl. (7), §. 338, identisch ist.

**443.** Die Ausmittelung bestimmter Integrale wird oft dadurch erleichtert, dass man statt der ursprünglichen Variablen eine neue Veränderliche einführt, wobei im Allgemeinen auch die Grenzen eine Aenderung erleiden werden. Ist nämlich $\int_a^b f(x)\,dx$ das vorgelegte Integral und man setzt: $\psi(x)=z$, so folgt hieraus: $x=\varphi(z)$, $dx=\varphi'(z)\,dz$, somit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \chi(z)\,dz,$$

wo die neuen Grenzen $\alpha$ und $\beta$ jene Werthe von $z$ sein werden, welche den Werthen $a$ und $b$ von $x$ entsprechen, also:

$$\alpha=\psi(a),\quad \beta=\psi(b).$$

Einige allgemeine Transformationsformeln, welche sich durch Anwendung dieses Verfahrens leicht ergeben, sind folgende:

Setzt man in dem Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, $x=z+h$, so wird für $x=a$: $z=a-h$, für $x=b$: $z=b-h$, somit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} f(z+h)\,dz, \qquad (1)$$

oder wenn man $b+h$ statt $b$, $a+h$ statt $a$ schreibt und umkehrt:

$$\int_a^b f(z+h)\,dz = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Für $h = a$ verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{b-a} f(a+z)\,dz, \tag{3}$$

eine Formel, mittelst welcher die untere Grenze auf Null gebracht wird.

Setzt man ferner in dem Integrale rechter Hand in Gl. (3), $z = y(b-a)$, so wird für $z = 0$: $y = 0$; für $z = b - a$: $y = 1$, somit, wegen $dz = (b-a)\,dy$:

$$\int_0^{b-a} f(a+z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f\big[a + (b-a)\,y\big]\,dy,$$

d. i. mit Rücksicht auf Gl. (3):

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f\big[a + (b-a)\,y\big]\,dy, \tag{4}$$

mittelst welcher Formel ein Integral mit beliebigen Grenzen in ein anderes mit den Grenzen 0 und 1 verwandelt wird.

Setzt man endlich in dem Integrale rechter Hand in Gleichung (4) $\frac{y}{1-y} = z$, woraus für $y = 0$: $z = 0$, für $y = 1$: $z = \infty$ folgt, so erhält man, da $y = \frac{z}{1+z}$, $dy = \frac{dz}{(1+z)^2}$:

$$\int_0^1 f\big[a + (b-a)\,y\big]\,dy = \int_0^\infty f\left[a + \frac{(b-a)\,z}{1+z}\right] \cdot \frac{dz}{(1+z)^2},$$

folglich, mit Rücksicht auf Gl. (4):

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^\infty f\left[\frac{a+bz}{1+z}\right] \cdot \frac{dz}{(1+z)^2}. \tag{5}$$

Hiedurch ist ein Integral mit beliebigen Grenzen in ein solches mit den Grenzen 0 und $\infty$ umgestaltet.

Einige Vorsicht wird bei derartigen Transformationen in dem Falle erfordert, wenn die Auflösung der Gleichung $\psi(x) = z$ mehrere Werthe für $x$ darbietet, da nun die Frage entsteht, welcher dieser Werthe in das vorgelegte Integral zu substituiren sei. Betrachten wir, um den in diesem Falle einzuschlagenden Weg deutlich zu übersehen, $z = \psi(x)$ als Gleichung einer ebenen Curve, und seien $x = \varphi_1(z)$, $x = \varphi_2(z)$, $x = \varphi_3(z)$, ... die durch Umkehrung dieser Gleichung erhaltenen Werthe von $x$ in Funktion der Ordinate $z$, so ist zunächst klar, dass, wenn die Curve von $x = a$ bis $x = b$ nur steigt, oder nur fällt (in welchem Falle $\psi'(x)$ innerhalb dieser Grenzwerthe von $x$ sein Zeichen nicht ändert), einem jeden zwischen $z_1 = \psi(a)$ und $z_2 = \psi(b)$ liegenden Werthe von $z$ nur ein reeller Werth von $x$

entsprechen könne, und dieser ist dann in das Integral zu substituiren. Hat aber die Funktion $z = \psi(x)$ für einen zwischen $x = a = OA$ (Fig. 52) und $x = b = OB$ liegenden Werth von $x$, z. B. $x = \alpha = OC$ ein Maximum oder Minimum, $CD = \psi(\alpha)$, so wird es zwischen $AM = z_1 = \psi(a)$ und $BN = z_2 = \psi(b)$ liegende Werthe von $z$ geben, z. B. $z = OP$, welchen zwei reelle Werthe von $x$, $Pm$ und $Pn$, ent sprechen. Sind nun diese beiden Werthe, wie dieselben aus der Auflösung der Gleichung $z = \psi(x)$ folgen, $x = \varphi_1(z)$, $x = \varphi_2(z)$, von denen der erste von $z = AM$ bis $z = CD$, der zweite von $z = CD$ bis $z = BN$ gelten mag (welche Unterscheidung in jedem einzelnen Falle keinen Schwierigkeiten unterliegt) und zerlegt man das vorliegende Integral folgendermaassen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx,$$

so wird man in dem ersten $x = \varphi_1(z)$, in dem zweiten $x = \varphi_2(z)$ zu substituiren haben, und hat dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(\alpha)} f\left[\varphi_1(z)\right] \varphi'_1(z)\,dz + \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(b)} f\left[\varphi_2(z)\right] \varphi'_2(z)\,dz.$$

Der Vorgang, wenn die Funktion $z = \psi(x)$ mehr als ein Maximum oder Minimum innerhalb der Integrationsgrenzen darbietet, besteht nur in einer Wiederholung des eben dargestellten Verfahrens und bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens wollen wir das Integral:

$$J = \int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

mittelst der Substitution:

$$ax + \frac{b}{x} = z$$

transformiren. Man findet leicht, dass für $x = +\sqrt{\frac{b}{a}}$, $z$ ein Minimum, $= 2\sqrt{ab}$, wird; der einem Maximum entsprechende Werth $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ kommt hier nicht in Betracht, da sich das Integrationsintervall nur auf positive Werthe von $x$ erstreckt. Wir haben demnach:

$$J = \int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx + \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

zu setzen und erhalten durch Auflösung obiger Gleichung für $x$ die beiden Werthe

$$x = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4ab}}{2a}.$$

Nun wird für $x = 0$: $z = \infty$; für $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$: $z = 2\sqrt{ab}$; für $x = \infty$: $z = \infty$, und es muss somit in dem 1^ten^ Integral dem Werthe $z = \infty$ der Werth $x = 0$, im 2^ten^ Integral dem Werthe $z = \infty$ der Werth $x = \infty$ entsprechen, was nur dann der Fall sein wird, wenn wir in das 1^te^ Integral den Werth von $x$ mit dem oberen Zeichen, in das 2^te^ jenen mit dem unteren Zeichen einführen. Es wird sonach:

$$J = \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{2\sqrt{ab}} f(z)\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4ab}}\right) dz + \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(z)\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4ab}}\right) dz,$$

oder nach Vertauschung der Grenzen in dem ersten Integrale und gehöriger Reduction:

$$J = \int_0^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(z)\, \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2 - 4ab}}. \tag{6}$$

Dem letzteren Integral kann man noch eine andere Form geben, indem man $\sqrt{z^2 - 4ab} = y$, also $\frac{z\, dz}{\sqrt{z^2 - 4ab}} = dy$, $z = \sqrt{y^2 + 4ab}$ setzt; die Grenzen in Bezug auf $y$ verwandeln sich dadurch in 0 und $\infty$, und man erhält:

$$\int_0^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{y^2 + 4ab}\right) dy. \tag{7}$$

Setzt man in dieser Gleichung $f\left(ax + \frac{b}{x}\right) = F\left[\left(ax + \frac{b}{x}\right)^2 - 2ab\right] = F\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)$, so geht im 2^ten^ Theile $f\left(\sqrt{y^2 + 4ab}\right)$ über in $F\left[\left(\sqrt{y^2 + 4ab}\right)^2 - 2ab\right] = F(y^2 + 2ab)$, und man erhält daher:

$$\int_0^{\infty} F\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} F(y^2 + 2ab)\, dy. \tag{8}$$

Betrachten wir, als zweites Beispiel, das Integral:

$$J = \int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\, dx,$$

und setzen zum Behufe der Umformung:

$$a\cos x + b\sin x = z,$$

so ergibt sich hieraus als Bedingung des Maximums oder Minimums: $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$, welcher Gleichung, wenn wir mit $\lambda$ den kleinsten Bogen bezeichnen, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist, die Werthe $x = \lambda, \lambda + \pi, \lambda + 2\pi$, etc. entsprechen, von welchen jedoch nur die beiden ersten, als innerhalb der Integrationsgrenzen liegend, in Betracht kommen; für den $1^{ten}$ wird $z$ ein Maximum $= a\cos\lambda + b\sin\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} = k$, für den $2^{ten}$ ein Minimum $= -(a\cos\lambda + b\sin\lambda) = -\sqrt{a^2 + b^2} = -k$. Wir setzen demnach:

$$J = \int_0^{\lambda} f(z)\,dx + \int_{\lambda}^{\lambda+\pi} f(z)\,dx + \int_{\lambda+\pi}^{2\pi} f(z)\,dx.$$

Um noch $dx$ durch $z$ auszudrücken, ziehen wir aus obiger Gleichung für $z$, indem wir durch $a$ dividiren, und $\operatorname{tg}\lambda$ statt $\frac{b}{a}$ schreiben, die Gleichung:

$$\cos(\lambda - x) = \frac{z\cos\lambda}{a} = \frac{z}{k},$$

und hieraus:

$$\sin(\lambda - x) = \pm\frac{1}{k}\sqrt{k^2 - z^2}, \quad dx = \frac{dz}{k\sin(\lambda - x)} = \pm\frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}}.$$

Da nun $\sin(\lambda - x)$ von $x = 0$ bis $x = \lambda$ positiv, von $x = \lambda$ bis $x = \lambda + \pi$ negativ, von $x = \lambda + \pi$ bis $x = 2\pi$ wieder positiv ist, so hat man für das $1^{te}$ und $3^{te}$ Intervall das obere, für das $2^{te}$ das untere Zeichen zu nehmen, und erhält sofort, weil für $x = 0$ und $= 2\pi$: $z = a$, für $x = \lambda$: $z = k$, für $x = \lambda + \pi$: $z = -k$ wird:

$$J = \int_a^k \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{k^2 - z^2}} - \int_k^{-k} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{k^2 - z^2}} + \int_{-k}^{a} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{k^2 - z^2}},$$

somit, wenn man in dem mittleren Integral die Grenzen vertauscht, und die beiden äusseren Integrale in eines mit den Grenzen $-k$, $+k$ vereinigt, und schliesslich addirt:

$$J = \int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{-k}^{+k} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{k^2 - z^2}}.$$

Man kann diesem Integral noch eine andere Form geben, indem man $z = k\sin\varphi$ setzt, wodurch sich die Grenzen nach $\varphi$ in $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ verwandeln; man erhält dadurch:

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(k\sin\varphi)\,d\varphi, \tag{9}$$

wo $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**444.** Bei der Entwickelung des Begriffes des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$, so wie bei den bisherigen Erörterungen über dasselbe, wurde vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb der Grenzen $a$ und $b$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleide. Nur unter dieser Bedingung hat das bestimmte Integral in jedem Falle einen bestimmten Werth und ist derselbe durch die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

gegeben, wenn $F(x) + C = \int f(x)\,dx$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$. Wird aber $f(x)$ für irgend einen zwischen $a$ und $b$ liegenden Werth von $x$ unendlich, so gilt obige Gleichung nicht mehr unbedingt. Nehmen wir beispielsweise das Integral $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$, in welchem die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für den zwischen $-1$ und $+1$ liegenden Werth von $x = 0$ unendlich wird, so gibt obige Gleichung:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = l(+1) - l(-1),$$

welcher Ausdruck unbestimmt ist [vergl. §. 78, I. Bd.]; dieselbe Unbestimmtheit würde zum Vorschein kommen, wenn man etwa das Integral zerlegen und setzen wollte:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_0^{+1}\frac{dx}{x} = -\infty + \infty.$$

Man kann jedoch von dieser Zerlegung in etwas modificirter Weise mit Vortheil Gebrauch machen, um über die Natur eines solchen Integrals Aufschluss zu erhalten.

Ist nämlich $\alpha$ der besondere, zwischen $a$ und $b$ liegende Werth von $x$, für welchen $f(\alpha)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, und bezeichnet man mit $\varepsilon$ eine unendlich kleine Zahl, mit $\mu$ und $\nu$ zwei positive, willkürliche Constanten, so kann man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\left\{\int_a^{\alpha-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\alpha+\nu\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right\} \tag{2}$$

setzen, jedes der beiden Integrale nach obiger Gleichung entwickeln und die Grenze suchen, gegen welche die Summe derselben bei unendlich abnehmendem $\varepsilon$ convergirt. Diese Grenze kann, je nach der Beschaffenheit der Funktion $f(x)$, eine endliche bestimmte Grösse sein, welche letztere dann auch den Werth des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ darstellt; sie kann aber auch unendlich oder unbestimmt sein, wo dann auch der Werth des Integrals unendlich ist oder unbestimmt bleibt; in letzterem Falle pflegt man jenen besonderen Werth, welchen das Integral annimmt, wenn man die unbestimmten Constanten $\mu$, $\nu$ der Einheit gleich macht, den Hauptwerth zu nennen. Demzufolge hat man z. B.:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\lim\left\{\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\nu\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$=\lim\left[l(-\mu\varepsilon)-l(-1)+l(+1)-l(\nu\varepsilon)\right]$$

$$=\lim\left[l\frac{\mu\varepsilon}{1}+l\frac{1}{\nu\varepsilon}\right]=l\frac{\mu}{\nu},$$

woraus folgt, dass — wegen der Willkürlichkeit der Grössen $\mu$, $\nu$ — der Werth dieses Integrals unbestimmt ist. Setzt man $\mu=\nu=1$ so ergibt sich 0 als Hauptwerth dieses Integrals.

**445.** Was die Ausmittelung des Werthes eines vorgelegten bestimmten Integrals betrifft, so hat dieselbe im Allgemeinen keine Schwierigkeit, wenn die unbestimmte Integration der unter dem Zeichen $\int$ stehenden Differenzialfunktion ausgeführt werden kann. Ist nämlich $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, so hat man bekanntlich

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung des Verfahrens dienen und zugleich einige bemerkenswerthe bestimmte Integrale kennen lehren.

Man hat bekanntlich:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a},\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a},$$

somit:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a}\ldots(1);\quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}\ldots(2);$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\ldots(3).$$

Es ist ferner [Gl. (3), §. 431]:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich, da das erste Glied im 2ten Theile für $x=0$, und für $x=1$ verschwindet:

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{m-1}{m}\int_0^1\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel gelangt man schliesslich, je nachdem $m$ gerade oder ungerade, auf eines der beiden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$

von welchen das erste oben schon angeführt ist, das zweite aus dem unbestimmten Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}$ sich ergibt. Schreibt man daher in obiger Gleichung, um die beiden Fälle zu trennen, einmal $2n$, das andere mal $2n+1$ statt $m$, und setzt der Reihe nach $n-1, n-2, n-3, \ldots$ an die Stelle von $n$, so erhält man, die so erhaltenen Gleichungen in einander substituirend:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)\,2n}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8\ldots(2n-2)\,2n}{3.5.7.9\ldots(2n-1)(2n+1)}. \tag{5}$$

Bezeichnet man das 1te dieser beiden Integrale mit $J_{2n}$, das 2te mit $J_{2n+1}$, so erhält man durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]\,[3.5.7\ldots(2n+1)]}{[2.4.6\ldots\quad 2n\;]\,[2.4.6\ldots\quad 2n\;]}=\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}},\ \text{oder}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots\ldots\ldots\ldots 2n\,.\,2n}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}.$$

Der Bruch $\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}$ hat beim unendlichen Wachsen von $n$ die Einheit zur Grenze. Denn man hat, mit $J_{2n-1}$ das ähnliche Integral mit der Potenz $x^{2n-1}$ im Zähler bezeichnend,

$$\frac{J_{2n+1}}{J_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}, \text{ somit } \lim \frac{J_{2n+1}}{J_{2n-1}} = 1.$$

Betrachtet man nun diese Integrale als Summen und erwägt, dass in sämmtlichen Elementen derselben (wegen $0 < x < 1$) $x^{2n+1} < x^{2n} < x^{2n-1}$ ist, so ist nothwendig $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$, somit $1 < \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} < \frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}}$, folglich, da $\lim \frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = 1$, auch $\lim \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1$.

Aus dem obigen Ausdrucke von $\frac{\pi}{2}$ folgt daher, wenn man $n$ unendlich zunehmen lässt:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots},$$

der bekannte Wallis'sche Ausdruck, welcher bereits in §. 153, I. Bd., auf anderem Wege gefunden wurde.

Setzt man in den zuletzt entwickelten zwei bestimmten Integralen (4) und (5) einmal $\sin x$, dann $\cos x$ an die Stelle von $x$, wodurch sich die Grenzen für die erstere Substitution in 0 und $\frac{\pi}{2}$, für die zweite in $\frac{\pi}{2}$ und 0 verwandeln, so erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n} dx = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)\,2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2n+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n+1} dx = \frac{2.4.6.8\ldots(2n-2)2n}{3.5.7.9\ldots(2n-1)(2n+1)}, \quad (7)$$

Ausdrücke, welche man übrigens auch aus den unbestimmten Integralen $\int \sin x^m dx$, $\int \cos x^m dx$ [Formel (7) und (9), §. 435], unmittelbar ableiten könnte.

Für $n = 1$ erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2 dx = \frac{\pi}{4}. \quad (8)$$

Mittelst der theilweisen Integration findet man:

$$\int x^n e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} x^n e^{-ax} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{-ax} dx; \quad (m)$$

nimmt man dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und $\infty$, so verschwindet das 1te Glied im 2ten Theile der Gleichung, da es sowohl für $x=0$ als auch für $x=\infty$ sich auf 0 reducirt (vergl. §. 349 und 350); man hat daher:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\,dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel gelangt man zuletzt, wenn $n$ eine ganze positive Zahl, zu dem Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \tag{9}$$

und hat daher

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{1.2.3.4\ldots.n}{a^{n+1}}, \tag{10}$$

und hieraus für $a=1$:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = 1.2.3.4\ldots n. \tag{11}$$

Setzt man in diesem letzten Integral $e^{-x}=z$, wodurch $x = l\frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z}$ wird, und die Grenzen 0 und $\infty$ sich beziehungsweise in 1 und 0 verwandeln, so hat man auch:

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{z}\right)^n dz = 1.2.3.4\ldots n. \tag{12}$$

Schreibt man aber in dem obigen Integral (10) $a+bi$ statt $a$, wo $i=\sqrt{-1}$, so folgt:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} e^{-bxi}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+bi)^{n+1}},$$

d. i., weil $e^{-bxi} = \cos bx - i\sin bx$:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\,dx - i\int_0^\infty x^n e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+bi)^{n+1}}.$$

Es ist aber, wenn $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\frac{1}{(a+bi)^{n+1}} = \frac{1}{r^{n+1}\left[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi\right]}$$
$$= \frac{\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}},$$

d. i., weil $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$:

$$\frac{1}{(a+bi)^{n+1}} = \frac{1}{r^{n+1}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right] - \frac{i}{r^{n+1}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right].$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält man durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Bestandtheile:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right], \quad (13)$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right]. \quad (14)$$

Für $n=0$ reducirt sich die Faktorielle $1.2.3\ldots n$ in den zweiten Theilen dieser Formeln auf die Einheit, und da:

$$\cos\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right] = \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right] = \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad (15)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}. \quad (16)$$

Zu diesen Formeln gelangt man auch, wenn man in dem Integral, Formel (9), $a + b\sqrt{-1}$ an die Stelle von $a$ treten lässt, oder unmittelbar mittelst der unbestimmten Integrale, Gl. (7) und (8), §. 437. Uebrigens darf in denselben $a$ nicht $=0$ gesetzt werden, da schon die Gl. ($m$), von welcher wir bei der Ableitung ausgingen, diese Annahme ausschliesst.

Aus der Gl. (1), §. 434, folgt:

$$\int x^m lx\, dx = \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^m dx;$$

nun ist für $x=1$: $x^{m+1} lx = 0$; für $x=0$: $x^{m+1} lx = 0$, wie man mit Hülfe der im §. 350 gelehrten Methode leicht findet; man hat somit

$$\int_0^1 x^m lx\, dx = -\frac{1}{m+1}\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{(m+1)^2}. \quad (17)$$

In §. 427 fanden wir:

für $a > b$:

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right),$$

für $a < b$:

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right),$$

für $a = b$:

$$\int \frac{dx}{a(1+\cos x)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \qquad a > b, \qquad (18)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}}, \qquad a < b, \qquad (19)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a(1+\cos x)} = \frac{1}{a}, \qquad a = b. \qquad (20)$$

Man kann in diesen Formeln $a$ immer als positiv betrachten, weil im Gegenfalle diese Eigenschaft durch Aenderung des Zeichens des ganzen Integrals herbeigeführt werden könnte; ist nun $b$ negativ, so wird für den Werth $\cos x = \frac{a}{b}$ der Nenner $a - b\cos x = 0$, d. h. es tritt innerhalb der Integrationsgrenzen eine Unterbrechung der Stetigkeit ein, wenn ein Werth von $x$ existirt, welcher obiger Gleichung Genüge leistet; ein solcher Werth findet offenbar, aber auch nur dann Statt, wenn $a < b$; hieraus folgt, dass für ein negatives $b$ das zweite Integral unzulässig wird, während das erste in Kraft bleibt.

**446.** Die Ausmittelung des genauen Werthes eines bestimmten Integrals gelingt auch sehr häufig in dem Falle, wenn die unbestimmte Integration nicht ausführbar ist; im Allgemeinen müssen aber dann die Integrationsgrenzen bestimmte Werthe haben, welche eben der Form der Funktion unter dem Integralzeichen besonders entsprechen. Die vorzüglichsten zu diesem Zwecke zu Gebote stehenden Hülfsmittel wollen wir im Folgenden kennen lernen.

Eine der fruchtbarsten Methoden zur Auswerthung bestimmter Integrale ist die Differenziation unter dem Integralzeichen. Der Werth eines bestimmten Integals $\int_a^b f(x)\,dx$ hängt bekanntlich nur von den Werthen der Integrationsgrenzen, und den etwa in $f(x)$ vorkommenden Constanten ab, und kann mithin als Funktion dieser Grössen betrachtet, und nach einer oder der andern derselben differenzirt werden.

Ist demnach $\alpha$ eine in $f(x)$ erscheinende unbestimmte Constante und

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \varphi(\alpha),$$

wobei wir zunächst voraussetzen wollen, dass die Grenzen $a$ und $b$ von $\alpha$ unabhängig seien, so können wir, da die Gleichung für jeden Werth von $\alpha$ oder wenigstens für alle Werthe innerhalb gewisser Grenzen besteht, $\alpha + \Delta\alpha$ statt $\alpha$ setzen und erhalten hiedurch:

$$\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx = \varphi(\alpha + \Delta\alpha),$$

und durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$\int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx = \varphi(\alpha + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha).$$

woraus durch Division mit $\Delta\alpha$ die Gleichung:

$$\int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx = \frac{\varphi(\alpha + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}$$

sich ergibt. Lassen wir nun $\Delta\alpha$ unendlich klein werden, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx = \frac{d.\varphi(\alpha)}{d\alpha},$$

d. h. um ein bestimmtes Integral, welches eine unbestimmte Constante $\alpha$ enthält, nach dieser Constante zu differenziren, genügt es, die Funktion unter dem Integralzeichen nach dieser Constante zu differenziren. Man sieht leicht ein, dass eine solche Differenziation im Allgemeinen beliebig oft wiederholt werden darf, dass also allgemein

$$\int_a^b \frac{d^n f(x, \alpha)}{d\alpha^n}\, d\alpha = \frac{d^n \varphi(\alpha)}{d\alpha^n}.$$

Wendet man nun dieses Verfahren, welches man mit dem Namen: Differenziation unter dem Integralzeichen, bezeichnet, auf ein bereits bekanntes Integral an, so ist klar, dass jede neue Differenziation desselben in Bezug auf eine darin vorkommende willkürliche Constante, den Werth eines neuen bestimmten Integrals liefert, welcher auf anderem Wege vielleicht nur schwierig zu erhalten wäre.

Die Formel (1) erfordert eine Ergänzung in dem Falle, wenn die Grenzen $a$ und $b$ Funktionen von $\alpha$ sind. Setzt man das unbestimmte Integral: $\int f(x)\, dx = F(x, \alpha)$, so hat man:

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = F(b, \alpha) - F(a, \alpha),$$

somit, wenn $a$ und $b$ von $\alpha$ abhängig sind:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \frac{dF(b,\alpha)}{d\alpha} + \frac{dF(b,\alpha)}{db}\cdot\frac{db}{d\alpha} - \frac{dF(a,\alpha)}{d\alpha} - \frac{dF(a,\alpha)}{da}\,\frac{da}{d\alpha};$$

es ist aber $\frac{dF(b,\alpha)}{d\alpha} - \frac{dF(a,\alpha)}{d\alpha}$ offenbar das Differenzial unseres Integrals, nach $\alpha$ so genommen, als ob $a$ und $b$ von dieser Grösse unabhängig wären; mithin zufolge der Gl. (1):

$$\frac{dF(b,\alpha)}{d\alpha} - \frac{dF(a,\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx;$$

ferner hat man wegen $\frac{dF(x,\alpha)}{dx} = f(x,\alpha)$: $\frac{dF(b,\alpha)}{db} = f(b,\alpha)$, $\frac{dF(a,\alpha)}{da} = f(a,\alpha)$, folglich:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}. \qquad (3)$$

Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Man findet leicht auf gewöhnlichem Wege:

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a},$$

und hieraus, indem man beiderseits $n$-mal hintereinander in Bezug auf $a$ differenzirt [vergl. §. 323]:

$$\int_0^1 x^{a-1}(lx)^n\,dx = (-1)^n\,\frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}. \qquad (4)$$

Da ferner $\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, und [§. 323]:

$$\frac{d^n}{da^n}\left(\frac{1}{a+x^2}\right) = (-1)^n\,\frac{1.2.3\ldots n}{(a+x^2)^{n+1}},$$

$$\frac{d^n}{da^n}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = (-1)^n\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^n\sqrt{a}},$$

so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots\;n}\cdot\frac{1}{2^n a^n\sqrt{a}}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;2n}\cdot\frac{\pi}{2\,a^n\sqrt{a}}. \qquad (5)$$

Aus der Gleichung: $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a}$ folgt:

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a};$$

differenziren wir nach $a$, wobei von der Gl. (3) Gebrauch zu machen ist, da die obere Grenze von $a$ abhängt, so kommt:

$$-\int_0^a \frac{2a\,dx}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi}{4a^2}, \quad \text{d. i.} \quad \int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\pi + 2}{8a^3}.$$

Wir sind in diesen Beispielen, welche zu vermehren unnöthig ist, von bereits bekannten Integralen ausgegangen und durch Differenziation zu neuen Integralen gelangt.

Die Operation kann aber auch auf ein vorgelegtes noch unbekanntes Integral mit Erfolg angewendet werden, wenn die Differenziation unter dem Zeichen $\int$ auf ein bekanntes Integral führt. Um z. B. das Integral

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx$$

zu finden, differenziren wir nach $a$, und erhalten:

$$\frac{dJ}{da} = -\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2 + b^2} \text{ [Gl. 16, §. 445]};$$

$$dJ = -\frac{b\,da}{a^2 + b^2}, \quad J = -b\int \frac{da}{a^2 + b^2} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + C.$$

Zur Kenntniss der Constanten $C$ verhilft die Bemerkung, dass das Integral $J$ für $b = 0$ verschwindet; mithin folgt aus der letzten Gleichung $0 = -\operatorname{arc\,tg} \infty + C$, somit $C = \frac{\pi}{2}$, und $J = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ $= \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$; es ist also

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Es sei

$$J = \int_0^1 \frac{(x^n - 1)\,dx}{lx}$$

zu bestimmen, so erhält man, nach $n$ differenzirend:

$$\frac{dJ}{dn} = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}, \text{ also } dJ = \frac{dn}{n+1}, \; J = l(n+1),$$

wo keine Constante beizufügen ist, weil $J$ für $n = 0$ verschwindet. Es ist also

$$\int_0^1 \frac{(x^n - 1)\,dx}{lx} = l(n+1). \tag{7}$$

Setzt man noch $x^{m+1} = y, \frac{n}{m+1} = \alpha$, so wird

$$\int_0^1 \frac{(x^n - 1)\, x^m\, dx}{lx} = \int_0^1 \frac{(y^\alpha - 1)\, dy}{ly} = l\,(\alpha + 1),$$

folglich

$$\int \frac{(x^n - 1)\, x^m\, dx}{lx} = l\, \frac{m + n + 1}{m + 1}. \tag{8}$$

Betrachten wir noch das Integral:

$$J = \int_0^\pi l\,(1 + 2\, a \cos x + a^2)\, dx;$$

durch Differenziation nach $a$ ergibt sich:

$$\frac{dJ}{da} = 2 \int_0^\pi \frac{\cos x + a}{1 + 2\, a \cos x + a^2}\, dx;$$

nun hat man, die Formeln (5) und (1) in §. 438 in Anspruch nehmend:

$$\int \frac{\cos x + a}{1 + 2\, a \cos x + a^2}\, dx = \frac{x}{2a} + \frac{a^2 - 1}{2a} \int \frac{dx}{1 + 2\, a \cos x + a^2}$$

$$= \frac{x}{2a} + \frac{a^2 - 1}{2\, a} \cdot \frac{2}{\sqrt{(1 + a^2)^2 - 4\, a^2}} \operatorname{arc\,tg} \left[ \sqrt{\frac{1 + a^2 - 2\, a}{1 + a^2 + 2\, a}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right];$$

es ist aber:

$$\sqrt{(1 + a^2)^2 - 4\, a^2} = \sqrt{(1 - a^2)^2} = \pm\, (1 - a^2),$$

$$\sqrt{\frac{1 + a^2 - 2\, a}{1 + a^2 + 2\, a}} = \sqrt{\frac{(1 - a)^2}{(1 + a)^2}} = \pm \left(\frac{1 - a}{1 + a}\right),$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn $a < 1$, das untere, wenn $a > 1$, weil die Formel die Substitution der positiven Werthe dieser Wurzelgrössen erheischt; wir erhalten also für den ersteren Fall:

$$\int \frac{\cos x + a}{1 + 2\, a \cos x + a^2}\, dx = \frac{x}{2\, a} - \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right), \quad a < 1,$$

und hieraus:

$$\int_0^\pi \frac{a + \cos x}{1 + 2\, a \cos x + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2\, a} - \frac{\pi}{2\, a} = 0, \quad a < 1;$$

es ist daher $\frac{dJ}{da} = 0$, oder $J = Const.$, d. h. der Werth unseres Integrals von $a$ unabhängig. Für $a = 0$ wird aber $J = 0$, folglich ist:

$$\int_0^\pi l\,(1 + 2\, a \cos x + a^2)\, dx = 0, \quad a < 1. \tag{9}$$

Ist $a > 1$, so setze man $a = \frac{1}{\alpha}$, wo $\alpha < 1$, und es wird

$$J = \int_0^\pi l\left(1 + \frac{2\cos x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) dx = \int_0^\pi l\left(\frac{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}{\alpha^2}\right) dx$$

$$= \int_0^\pi l(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx - l(\alpha^2)\int_0^\pi dx,$$

mithin, da zufolge der Gl. (7):

$$\int_0^\pi l(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = 0, \text{ und } l(\alpha^2)\int_0^\pi dx = \pi\, l(\alpha^2) = -\pi\, l(a^2)$$

ist,

$$\int_0^\pi l(1 + 2a\cos x + a^2)\,dx = \pi\, l(a^2), \quad a > 1. \tag{10}$$

Setzt man $\pi - x$ an die Stelle von $x$, so folgt:

$$\int_0^\pi l(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 0, \quad a < 1, \tag{11}$$

$$\int_0^\pi l(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = \pi\, l(a^2), \quad a > 1. \tag{12}$$

Für $a = 1$ erhält man aus allen diesen Formeln:

$$\int_0^\pi l(1 + \cos x)\,dx = \int_0^\pi l(1 - \cos x)\,dx = -\pi\, l\,2, \tag{13}$$

oder wenn man $2x$ statt $x$ schreibt, wodurch die Grenzen in 0 und $\frac{1}{2}\pi$ sich verwandeln, und beachtet, dass $1 + \cos 2x = 2\cos x^2$ $1 - \cos 2x = 2\sin x^2$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\sin x)\,dx = -\frac{1}{2}\pi\, l\,2. \tag{14}$$

Die hier behandelten Beispiele stellen übrigens nur den einfachsten Fall dar, welcher bei diesem Verfahren eintreten kann, wo man durch einmalige Differenziation sogleich zu einem schon bekannten Integrale gelangt; weit häufiger wird man im Stande sein, durch wiederholte Differenziation eine Relation zwischen dem Integral und seinen Differenzialquotienten d. i. eine sogenannte Differenzialgleichung zu bilden, deren Integration, wenn sie ausführbar ist, sofort den Werth des vorgelegten Integrals kennen lehrt.

**447.** Eine nicht minder ergiebige Quelle bestimmter Integrale ist die Methode der Integration unter dem Integralzeichen. Ist nämlich:

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \varphi(\alpha), \qquad (m)$$

so hat man, beiderseits mit $d\alpha$ multiplicirend und integrirend:

$$\int \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int f(x, \alpha)\, d\alpha. \qquad (n)$$

Von der Richtigkeit der Gleichung ($n$) überzeugt man sich leicht, indem man dieselbe nach Vorschrift des vorigen §. nach $\alpha$ differenzirt, wodurch man wieder zur vorhergehenden Gleichung ($m$) gelangt; vorausgesetzt, dass die Integrationgrenzen von $\alpha$ unabhängig sind. Ist man nun im Stande, das Integral $\int \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ sowohl, als auch das Integral $\int f(x, \alpha)\, d\alpha$ herzustellen, so hat man damit auch den Werth eines neuen bestimmten Integrals: $\int_a^b dx \int f(x, \alpha)\, d\alpha$ gewonnen.

Die Integration nach $\alpha$ wird man zwischen schicklichen Grenzen $\lambda$, $\mu$ bewerkstelligen, und erhält dann:

$$\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_\lambda^\mu d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_\lambda^\mu f(x, \alpha)\, d\alpha. \qquad (p)$$

Beispiele: Man hat für $a > 1$:

$$\int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a};$$

multiplicirt man beiderseits mit $da$ und integrirt nach $a$ von $a = c$ angefangen, so kommt:

$$\int_0^1 dx \int_c^a x^{a-1}\, da = \int_c^a \frac{da}{a},$$

folglich, da $\int x^{a-1}\, da = \frac{x^{a-1}}{lx}$, also $\int_c^a x^{a-1}\, da = \frac{x^{a-1} - x^{c-1}}{lx}$ ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{c-1}}{lx}\, dx = l\,\frac{a}{c}. \qquad (1)$$

Aus der Gl. $\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$, folgt auf dieselbe Weise, indem man mit $da$ multiplicirt und von $a = c$ angefangen integrirt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\, dx = l\,\frac{a}{c}. \qquad (2)$$

Die Substitution $x = -lz$ verwandelt übrigens, wie man leicht findet, dieses Integral in das obige (1).

Ebenso erhält man aus den Formeln:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

durch Multiplication mit $da$ und Integration nach $a$, von $a = c$ angefangen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\,l\,\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{b}. \tag{4}$$

Hieraus folgt für $a = \infty$, $c = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\,dx = \infty,\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Der Werth des letzten Integrals ist, wie man sieht, von $b$ unabhängig; setzt man $bx = z$, so wird auch:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Setzt man in (2) $c = 1$, in (3) $b = 1$, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx = la = \frac{1}{2}\,l\,(a^2),$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,l\,\frac{a^2+1}{c^2+1},$$

und durch Subtraktion dieser Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}-(e^{-cx}-e^{-ax})\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,l\,\frac{a^2(c^2+1)}{a^2+1},$$

und hieraus für $a = \infty$, $c = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-\cos x}{x}\,dx = 0. \tag{7}$$

Bei einiger Aufmerksamkeit auf die Gl. ($p$) wird man leicht erkennen, dass diese Methode der Auswerthung bestimmter Integrale eigentlich nichts anderes ist, als die Anwendung eines aus §. 441 bekannten Satzes, welchem zufolge die Ordnung der Integration in einem Doppelintegrale: $\iint f(x, \alpha)\,dx\,d\alpha$ im Allgemeinen willkürlich, und somit

$$\int d\alpha \int f(x, \alpha)\,dx = \int dx \int f(x, \alpha)\,d\alpha$$

ist. Hieraus entsteht, wenn wir die Integrationen zwischen bestimmten

Grenzen bewerkstelligen, etwa von $\alpha = \lambda$ bis $\alpha = \mu$, und von $x = a$ bis $x = b$, die obige Gl. ($p$):

$$\int_\lambda^\mu d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_\lambda^\mu f\cdot(x, \alpha)\, d\alpha;$$

und man sieht, dass ein bestimmtes Doppelintegral — vorausgesetzt, dass die Umkehrung der Integrationsordnung gestattet ist — jederzeit zur Kenntniss des Werthes eines einfachen bestimmten Integrals führt, sobald bei der einen Anordnung nur eine Integration, bei der andern Anordnung aber beide Integrationen ausführbar sind. Von dieser Voraussetzung sind wir aber eben im Eingange dieses §. ausgegangen.

Ueber die Zulässigkeit der Umkehrung der Integrationsordnung werden die folgenden allgemeinen Bemerkungen über bestimmte Doppelintegrale Aufschluss geben.

**448.** Ist $f(x, y)$ eine Funktion zweier von einander unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$, so hat man nach §. 413, wenn $\delta$ eine unendlich abnehmende Zahl:

$$\int_a^b f(x, y)\, dx =$$

$$\lim \delta \left\{ f(a,y) + f(a+\delta,y) + f(a+2\delta,y) + \cdots + f(b-\delta,y) \right\};$$

diese Grösse wird nunmehr blos eine Funktion von $y$ sein; bezeichnen wir dieselbe mit $\varphi(y)$, multipliciren sie mit $dy$ und integriren von $\alpha$ bis $\beta$, so erhalten wir, unter $\varepsilon$ wieder eine unendlich kleine Zahl verstanden:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx =$$

$$\lim \varepsilon \left\{ \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha+\varepsilon) + \varphi(\alpha + 2\varepsilon) + \cdots + \varphi(\beta - \varepsilon) \right\},$$

d. i., wenn wir für $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha+\varepsilon)$, etc. die Werthe, nämlich:

$$\varphi(\alpha) = \lim \delta \left\{ f(a, \alpha) + f(a+\delta, \alpha) + \ldots + f(b-\delta, \alpha) \right\},$$

$$\varphi(\alpha+\varepsilon) = \lim \delta \left\{ f(a, \alpha+\varepsilon) + f(a+\delta, \alpha+\varepsilon) + \ldots + f(b-\delta, \alpha+\varepsilon) \right\},$$

u. s. w., einsetzen:

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx =$$

$$\lim \delta\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} f(a, \alpha) + f(a+\delta, \alpha) + \ldots + f(b-\delta, \alpha) \\ + f(a, \alpha+\varepsilon) + f(a+\delta, \alpha+\varepsilon) + \ldots + f(b-\delta, \alpha+\varepsilon) \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(a, \beta-\varepsilon) + f(a+\delta, \beta-\varepsilon) + \ldots + f(b-\delta, \beta-\varepsilon). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Das bestimmte Doppelintegral ist daher der Grenzwerth der Summe sämmtlicher (unendlich vielen) Werthe, welche die Grösse $f(x,y)\,dx\,dy$ annimmt, wenn man für $x$ und $y$ alle Combinationen von Werthen einsetzt, welche diese Grössen zwischen den Integrationsgrenzen durchlaufen, und unter $dx$ und $dy$ die constanten unendlich kleinen Unterschiede dieser Werthe versteht.

Wir haben im Obigen zuerst nach $x$, dann nach $y$ integrirt; wären wir in umgekehrter Ordnung vorgegangen, so hätten wir in Gleichung (1) links das Integral $\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy$ erhalten, rechter Hand aber dieselbe Summe wie in Gl. (1), nur mit dem Unterschiede, dass die vertical unter einander stehenden Glieder die horizontalen Reihen gebildet hätten, wodurch aber der Werth der Summe offenbar nicht geändert wird; es ist demnach

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

und diese Gleichung spricht, wie man sieht, die Zulässigkeit der Umkehrung der Integrationsordnung in einem bestimmten Doppelintegral aus.

Der Satz erleidet jedoch eine Ausnahme, wenn entweder die Integrationsgrenzen nicht constant, sondern Funktionen von $x$ oder $y$ sind, oder wenn die Funktion $f(x, y)$ für ein zwischen den Integrationsgrenzen liegendes System von Werthen der Veränderlichen $x$, $y$ discontinuirlich wird; in beiden Fällen ist die Umkehrung der Integrationsordnung im Allgemeinen nicht gestattet.

In Bezug auf den ersteren Punkt bedarf es keines weiteren Beweises; denn man sieht auf der Stelle, dass, wenn etwa die auf $y$ sich beziehenden Grenzen $\alpha = u$, $\beta = v$ Funktionen von $x$ wären, in dem Doppelintegrale

$$\int_a^b dx \int_u^v f(x, y)\,dy$$

die Ordnung vorgeschrieben und zuerst nach $x$ zu integriren ist.

Uebrigens kann ein solches Doppelintegral mit veränderlichen Grenzen immer in ein anderes mit constanten Grenzen verwandelt werden [§. 443, Gl. (4)] Zu diesem Behufe setze man $y = u + (v - u)z$, $dy = (v - u)\,dz$, wo $z$ eine neue Veränderliche, so sind die Grenzen nach $z$: 0 und 1, somit

$$\int_u^v f(x, y)\,dy = (v - u) \int_0^1 f[x, u + (v - u)z]\,dz,$$

und folglich, wenn man statt $z$ wieder $y$ schreibt:

$$\int_a^b dx \int_u^v f(x, y)\, dy = \int_a^b (v - u)\, dx \int_0^1 f[x, u + (v - u) y]\, dy. \quad (3)$$

Erleidet aber die Funktion $f(x, y)$ für ein zwischen den Integrationsgrenzen liegendes System von Werthen von $x$ und $y$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, so ist die Gl. (2) ebenfalls unzulässig, wie aus folgender Betrachtung erhellt.

Es sei

$$\int f(x, y)\, dy = \varphi(x, y), \int f(x, y)\, dx = \psi(x, y),$$

so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy &= \varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha), \\ \int_a^b f(x, y)\, dx &= \psi(b, y) - \psi(a, y), \end{aligned}\right\} \quad (m)$$

und die Gleichung (2) nimmt durch Substitution dieser Ausdrücke folgende Form an:

$$\int_a^b dx\, [\varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha)] = \int_\alpha^\beta dy\, [\psi(b, y) - \psi(a, y)]. \quad (4)$$

Gesetzt nun, die Funktion $f(x, y)$ erleide eine Unterbrechung der Stetigkeit für das System der Werthe $x = c$, $y = \gamma$, so haben wir nach Vorschrift des §. 444 an die Stelle der Gl. (4) die folgende zu setzen:

$$\int_a^{c-\varepsilon} dx\, [\varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha)] + \int_{c+\varepsilon}^b dx\, [\varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha)]$$

$$= \int_\alpha^\beta dy\, [\psi(c - \varepsilon, y) - \psi(a, y) + \psi(b, y) - \psi(c + \varepsilon, y)],$$

in welcher die nach $x$ genommenen Integrale in je zwei zwischen den Grenzen $a$ und $c - \varepsilon$, $c + \varepsilon$ und $b$ zerfällt sind, was offenbar genügt, da nunmehr in keinem der Integrale der letzten Gleichung eine Unterbrechung der Stetigkeit eintreten kann, indem die Funktion $f(x, y)$ nur dann discontinuirlich wird, wenn gleichzeitig $x = c$ und $y = \gamma$ wird. Der zweite Theil der letzten Gleichung lässt sich nun in folgender Form schreiben:

$$\int_\alpha^\beta dy\, [\psi(b, y) - \psi(a, y)] + \int_\alpha^\beta dy\, [\psi(c - \varepsilon, y) - \psi(c + \varepsilon, y)],$$

und man erhält somit, wenn man $\varepsilon$ gegen die Grenze 0 convergiren lässt,

lässt, wodurch der 1. Theil der Gleichung sich auf $\int_a^b dx\,[\varphi(x,\beta)-\varphi(x,\alpha)]$ zusammenzieht:

$$\int_a^b dx\,[\varphi(x,\beta)-\varphi(x,\alpha)] =$$

$$\int_\alpha^\beta dy\,[\psi(b,y)-\psi(a,y)] + \lim \int_\alpha^\beta dy\,[\psi(c-\varepsilon,y)-\psi(c+\varepsilon,y)],$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung $(m)$:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy - \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx =$$

$$= \lim \int_\alpha^\beta dy\,[\psi(c-\varepsilon,y)-\psi(c+\varepsilon,y)]. \quad (5)$$

Hieraus folgt nun, dass im Falle einer innerhalb der Integrationsgrenzen eintretenden Discontinuität der Funktion $f(x,y)$ die beiden linker Hand stehenden Integrale nicht mehr gleichwerthig, sondern um die Grösse

$$\Delta = \lim \int_\alpha^\beta dy\,[\psi(c-\varepsilon,y)-\psi(c+\varepsilon,y)] \quad (6)$$

von einander verschieden sind.

Ein Beispiel hiezu bietet das Doppelintegral $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$, in welchem die Funktion $f(x,y)$ für das Werthepaar $x=0$, $y=0$ unendlich wird. Integriren wir zuerst nach $y$, so kommt [§. 441]:

$$\int\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \frac{y}{x^2+y^2}, \int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \frac{2}{1+x^2}, \text{ somit}$$

$$J = \int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = 2\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Integriren wir aber in umgekehrter Ordnung, zuerst nach $x$ beginnend, so haben wir

$$\int\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{x}{x^2+y^2}, \int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{2}{1+y^2}, \text{ folglich}$$

$$J' = \int_{-1}^{+1}dy\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -2\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2} = -\pi.$$

Beide Integrale sind also verschieden, und ihr Unterschied $J - J' = \Delta = 2\pi$. Denselben Werth für diese Differenz gibt die Formel (6);

denn da $\psi(x, y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ und $c = 0$, so hat man:

$$\Delta = \lim \int_{-1}^{+1} dy \left[ -\frac{-\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} \right] = \lim 2 \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon dy}{\varepsilon^2+y^2}$$

$$= \lim 2 \left[ \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\varepsilon} - \operatorname{arc\,tg} \frac{-1}{\varepsilon} \right] = 2\pi.$$

Das hier Gesagte gilt auch in Bezug auf drei- und mehrfache bestimmte Integrale. Das dreifache bestimmte Integral z. B.:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z,)\, dx\, dy\, dz$$

ist als die Grenze der Summe sämmtlicher Werthe zu betrachten, welche aus der Grösse $f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ hervorgehen, wenn man für $x, y, z$ alle Combinationen von Werthen innerhalb der Integrationsgrenzen eingesetzt denkt. So lange diese Grenzen constant sind, und innerhalb derselben die Funktion $f(x, y, z)$ nicht discontinuirlich wird, ist die Ordnung der Integration eine ganz willkürliche.

**449.** Betrachten wir nun das Integral

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

und multipliciren wir dasselbe mit einem anderen von derselben Form, in welchem nur $y$ statt $x$ gesetzt ist, so erhalten wir, da der Werth des Integrals von dem Namen der Veränderlichen unabhängig ist:

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx,$$

indem das Product zweier einfacher Integrale $\int_a^b f(x)\, dx, \int_\alpha^\beta \varphi(y)\, dy$ mit dem Doppelintegrale $\int_a^b \int_\alpha^\beta f(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$ gleichbedeutend ist, wenn die Grenzen des ersteren von $y$, jene des zweiten von $x$ unabhängig sind, wie man sich sogleich überzeugt, wenn man sich für jedes dieser drei Integrale den entsprechenden Summenausdruck gesetzt denkt.

Setzen wir nun in obiger Gleichung $y = xt$, wo $t$ eine neue Veränderliche bedeutet, in Bezug auf welche die Grenzen, wie man sieht, dieselben bleiben, so wird $dy = x\, dt$ und

$$J^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\, dt\, x\, dx = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)}\, x\, dx;$$

die Integration nach $x$ kann nun ausgeführt werden; es ist:

$$\int e^{-x^2(1+t^2)}\, x\, dx = -\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)},$$

welcher Ausdruck zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ genommen, in $\frac{1}{2(1+t^2)}$ sich verwandelt; hiemit wird:

$$J^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ somit}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \tag{1}$$

ein seiner häufigen Anwendungen wegen sehr wichtiges Integral. Mit Rücksicht auf §. 442, 5) folgt hieraus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}, \tag{2}$$

und wenn man $ax$ statt $x$ schreibt:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \tag{3}$$

Man sieht leicht, dass der eben betretene Weg nur bei den Grenzen 0 und $\infty$ zum Ziele führt; sind eine oder beide Grenzen von 0 verschiedene endliche Zahlen, so lässt sich der Werth des bestimmten Integrals nur in Form unendlicher Reihen gewinnen. Bei der Wichtigkeit dieses Integrals wollen wir einige derselben hier anführen.

Entwickelt man die Funktion $e^{-x^2}$ nach der Exponentialreihe, so erhält man:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \cdots,$$

und hieraus, von 0 bis $t$ integrirend:

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx = t - \frac{t^3}{1.3} + \frac{t^5}{2!5} - \frac{t^7}{3!7} + \frac{t^9}{4!9} - \cdots, \tag{4}$$

eine zwar jederzeit, aber nur für kleine Werthe von $t$ hinreichend rasch convergirende Reihe.

Nach der Regel der theilweisen Integration hat man:

$$\int e^{-x^2}\,dx = xe^{-x^2} + 2\int e^{-x^2}x^2\,dx,$$

$$\int e^{-x^2}x^2\,dx = \frac{x^3}{3}e^{-x^2} + \frac{2}{3}\int e^{-x^2}x^4\,dx,$$

$$\int e^{-x^2}x^4\,dx = \frac{x^5}{5}e^{-x^2} + \frac{2}{5}\int e^{-x^2}x^6\,dx,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int e^{-x^2}x^{2n-2}\,dx = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}e^{-x^2} + \frac{2}{(2n-1)}\int e^{-x^2}x^{2n}\,dx;$$

folglich, wenn man für jedes Integral rechter Hand seinen Werth aus der folgenden Gleichung substituirt, und schliesslich das Integral von 0 bis $t$ nimmt:

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = t\, e^{-t^2} \left[1 + \frac{2t^2}{1.3} + \frac{(2t^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(2t^2)^{n-1}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right] + \frac{2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^t e^{-x^2} x^{2n}\, dx. \quad (5)$$

Diese Reihe convergirt ebenfalls für jeden Werth von $x$, und rascher als die obige, ist jedoch auch nur für kleinere Werthe von $t$ brauchbar. Der hier betretene Weg, um zur Reihenentwickelung zu gelangen — nämlich durch successive theilweise Integration — bietet aber den Vortheil dar, dass man den Rest der Reihe kennen lernt, und dadurch ein Mittel zur Schätzung des Fehlers erhält, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht; dieser Rest ist hier

$$R_n = \frac{2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^t e^{-x^2} x^{2n}\, dx;$$

wendet man auf das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral den im §. 442, 6) ausgesprochenen Satz an, indem man $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $\chi(x) = x^{2n}$ setzt und beachtet, dass, innerhalb der Grenzen 0 und $t$, $e^{-t^2}$ der kleinste und 1 der grösste Werth der Funktion $\varphi(x)$ ist, so findet man sogleich, dass der Werth des in Rede stehenden Integrals zwischen den Grössen

$$\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \text{ und } \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, e^{-t^2}$$

liegt; es besteht daher, wenn die Reihe mit dem Gliede $\frac{(2t^2)^{n-1}}{1.3.5\ldots.(2n-1)}$ abgebrochen wird, für den begangenen Fehler $R_n$ die Relation:

$$\frac{2^n t^{2n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)}\, e^{-t^2} < R_n < \frac{2^n t^{2n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Zu einer für grössere Werthe von $t$ brauchbaren Entwickelung gelangt man auf folgende Weise. Man hat, gleichfalls nach dem Satze der theilweisen Integration:

$$\int e^{-x^2} dx = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^2},$$

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^3} \cdot e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2x^3} e^{-x^2} - \frac{3}{2} \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^4},$$

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{x^4} = \int \frac{1}{x^5} \cdot e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2x^5} e^{-x^2} - \frac{5}{2} \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^6},$$

u. s. w., somit:

$$\int e^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2x^2)^3} + \dots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{(2x^2)^{n-1}}\right] \mp \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n}\int \frac{e^{-x^2}\,dx}{x^{2n}}.$$

Nimmt man dieses Integral zwischen den Grenzen $x = t$ und $x = \infty$, so folgt:

$$\int_t^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \dots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{(2t^2)^{n-1}}\right] \mp R_n,$$

wo der Rest:

$$R_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n}\int_t^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{x^{2n}}.$$

Nun ist:

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \int_t^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_t^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

mithin:

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \dots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{(2t^2)^{n-1}}\right] \pm R_n. \qquad (6)$$

Was den Rest $R_n$ betrifft, so findet man auf dem oben betretenen Wege ohne Schwierigkeit:

$$0 < R_n < \frac{e^{-t^2}}{2t}\cdot\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{(2t^2)^{n-1}}; \qquad (m)$$

der Fehler, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht, ist also, wie man sieht, immer kleiner als das letzte mitgenommene Glied. Die Kenntniss der Fehlergrenzen gestattet nun, von obiger Reihe zur Berechnung des Integrals bei grösseren Werthen von $t$ Gebrauch zu machen.

Die Reihe divergirt nämlich, wie man leicht findet, für jeden Werth von $t$; allein wenn $t > 1$, so nehmen die Glieder Anfangs ab und zwar um so rascher, je grösser $t$, erreichen ein Minimum, und nehmen von da an fort und fort zu. Bricht man daher die Reihe — gemäss der obigen Bemerkung — mit dem kleinsten Gliede ab, so erhält man einen genäherten Werth des Integrals, dessen Fehler kleiner ist als dieses letzte noch mitgenommene Glied.

Man pflegt dergleichen Reihen halbconvergente Reihen zu nennen; ihr wesentlicher Charakter besteht darin, dass das Ergän-

zungsglied oder der Rest $R_n$, d. i. die Summe aller auf das $n^{te}$ Glied folgenden Glieder der Reihe mit zunehmendem $n$ Anfangs abnimmt, für einen gewissen Werth von $n$ ein Minimum erreicht, und von da an für grössere Werthe von $n$ fort und fort zunimmt. Kann man nun zeigen, dass dieses Minimum einen gewissen als unmerklich zu vernachlässigenden Betrag nicht überschreitet, so ist die Summe der Reihe bis zu dem entsprechenden Werthe von $n$ fortgesetzt, offenbar ein genäherter Werth der Funktion, deren Entwickelung sie darstellt. Man sieht leicht, dass der obige Ausdruck $(m)$ des Restes unserer Reihe für Werthe von $t > 1$ sich in diesem Falle befindet.

Für die numerische Berechnung ist es übrigens bequemer, die Reihe in (6) durch den gleichgeltenden Kettenbruch [Bd. I, Seite 256, 5)] zu ersetzen, wodurch man erhält:

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2t}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\cdots}}}}} \qquad q = \frac{1}{2t^2}. \tag{7}$$

Der Kettenbruch convergirt um so rascher, je kleiner $q$, d. i. je grösser $t$ ist, und der wahre Werth des Integrals liegt immer zwischen je zwei aufeinander folgenden reducirten Brüchen, da der Kettenbruch der Reihe Glied für Glied entspricht, und die Reihe die analoge Eigenschaft besitzt, wie aus dem regelmässigen Zeichenwechsel des Restes erhellt.

**450.** Setzt man in Gl. (2) des vorigen §. $x = ay + b$, so erhält man, da die Grenzen des Integrals durch diese Substitution unverändert bleiben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2-2aby-b^2}\,a\,dy = \sqrt{\pi},$$

mithin nach Absonderung des constanten Factors $a\,e^{-b^2}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2-2aby}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,e^{b^2}. \tag{1}$$

Die Formel (8) in §. 443 gibt ferner für $b^2 = a^2$:

$$\int_0^\infty F\left(a^2x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty F(y^2 + 2a^2)\,dy;$$

setzt man hier $F\left(a^2x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) = e^{-\left(a^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(y^2+2a^2)}\,dy = \frac{e^{-2a^2}}{a}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$

folglich mit Rücksicht auf Gl. (1) des vor. §.:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx = \frac{e^{-2a^2}\sqrt{\pi}}{2a}. \tag{2}$$

Auch von den imaginären Grössen kann man bei Auswerthung bestimmter Integrale häufig vortheilhaften Gebrauch machen.

Setzt man z. B. in der obigen Formel (1):

$$a^2 = k,\ -2ab = h\sqrt{-1},\ \text{also } a = \sqrt{k},\ b = -\frac{h\sqrt{-1}}{2\sqrt{k}},$$

so kommt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2 + hy\sqrt{-1}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{h^2}{4k}},$$

oder, wenn man für $e^{hy\sqrt{-1}}$ den bekannten Ausdruck $\cos hy + \sqrt{-1} \sin hy$ einführt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2} (\cos hy + \sqrt{-1} \sin hy)\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{h^2}{4k}};$$

durch Sonderung des Reellen vom Imaginären gewinnen wir hieraus folgende Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2} \cos hy\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{h^2}{4k}}, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2} \sin hy\, dy = 0. \tag{4}$$

Auch folgt aus (3), nach §. 442, 5):

$$\int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos hy\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{h^2}{4k}}. \tag{5}$$

Die Substitution $a = \frac{(1+\sqrt{-1})\,\alpha}{\sqrt{2}}$ verwandelt ferner die Gl. (3) des vorigen §. in folgende:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2 \sqrt{-1}}\, dx = \frac{1-\sqrt{-1}}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

setzt man nun für die Exponentielle $e^{-\alpha^2 x^2 \sqrt{-1}}$ den gleichgeltenden Ausdruck $\cos(\alpha^2 x^2) - \sqrt{-1} \sin(\alpha^2 x^2)$, so erhält man:

$$\int_0^{\infty} [\cos(\alpha^2 x^2) - \sqrt{-1} \sin(\alpha^2 x^2)]\, dx = \frac{1-\sqrt{-1}}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und hieraus durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

$$\int_0^{\infty} \cos(\alpha^2 x^2)\, dx = \int_0^{\infty} \sin(\alpha^2 x^2)\, dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{6}$$

Für $\alpha^2 x^2 = y$ folgt hieraus:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{y}} = \int_0^{\infty} \frac{\sin y\, dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{7}$$

Betrachten wir schliesslich noch das Doppelintegral:

$$J = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} 2\, e^{-y^2(1+x^2)} \cos bxy\, dy\, dx,$$

so erhalten wir, zuerst nach $y$ integrirend:

$$J = \int_0^\infty \cos bx\, dx \int_0^\infty 2e^{-y^2(1+x^2)} y\, dy = \int_0^\infty \frac{\cos bx\, dx}{1+x^2}. \qquad (m)$$

Die Integration nach $x$ liefert hingegen:

$$J = \int_0^\infty 2y\, dy \int_0^\infty e^{-y^2(1+x^2)} \cos bx\, dx = \int_0^\infty 2e^{-y^2} y\, dy \int_0^\infty e^{-y^2x^2} \cos bx\, dx,$$

d. i. mit Rücksicht auf die obige Formel (5):

$$J = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(y^2 + \frac{b^2}{4y^2}\right)} dy.$$

Zur Reduktion dieses Integrals nehmen wir die Gl. (8), §. 443 in Anspruch, und erhalten dadurch:

$$\int_0^\infty e^{-\left(y^2 + \frac{b^2}{4y^2}\right)} dy = \int_0^\infty e^{-(y^2+b)} dy = e^{-b} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b},$$

somit

$$J = \frac{1}{2} \pi e^{-b}. \qquad (n)$$

Da nun das Doppelintegral, von welchem wir ausgingen, die Umkehrung der Integrationsordnung gestattet, so ist vermöge der Glgn. ($m$) und ($n$):

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \pi e^{-b}, \qquad (8)$$

wo, wie aus der Ableitung erhellt, $b$ auch $= 0$, aber nicht negativ genommen werden darf.

Durch Differenziation nach $b$ ergibt sich aus (8):

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \pi e^{-b}, \qquad (9)$$

und wenn man in diesen beiden Formeln $\frac{x}{a}$ statt $x$ und $ab$ statt $b$ schreibt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\, dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, \qquad (10)$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx\, dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ab}. \qquad (11)$$

**451.** Mittelst der theilweisen Integration und der einfachsten Eigenschaften der bestimmten Integrale gelangt man auf sehr einfachem Wege zur Taylor'schen Reihe, wobei sich das Ergänzungsglied der Reihe in Form eines bestimmten Integrals darbietet.

Ist nämlich $f(x)$ eine von $x$ bis $x+h$ stetige Funktion von $x$ und bezeichnet man mit $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ die aufeinander folgenden Differenzialquotienten derselben, so hat man zunächst:

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} f'(x)\,dx=\int_x^{x+h} f'(y)\,dy,$$

oder wenn man eine neue Veränderliche $z$ mittelst der Substitution $y=x+h-z$, $dy=-dz$ einführt, wodurch sich die untere und obere Grenze beziehungsweise in $h$ und 0 verwandeln:

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^h f'(x+h-z)\,dz.$$

Durch theilweise Integration ergibt sich nun:

$$\int f'(x+h-z)\,dz=z\,f'(x+h-z)+\int f''(x+h-z)\,.\,z\,dz,$$

$$\int f''(x+h-z)\,.\,z\,dz=\frac{z^2}{2}f''(x+h-z)+\int f'''(x+h-z)\,.\,\frac{z^2}{2}\,dz,$$

$$\int f'''(x+h-z)\,.\,\frac{z^2}{2}\,dz=\frac{z^3}{2\,.\,3}f'''(x+h-z)+\int f''''(x+h-z)\,.\,\frac{z^3}{2\,.\,3}\,dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int f^{(n-1)}(x+h-z)\,.\,\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}\,dz=\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x+h-z)$$
$$+\int f^{(n)}(x+h-z)\,.\,\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,dz,$$

woraus man durch successive Substitution erhält:

$$\int f'(x+h-z)\,dz=z\,f'(x+h-z)+\frac{z^2}{2}f''(x+h-z)$$
$$+\frac{z^3}{2\,.\,3}f'''(x+h-z)+\ldots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x+h-z)$$
$$+\int f^{(n)}(x+h-z)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,dz.$$

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und $h$, und substituirt es in die obige Gleichung, so folgt die Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,dz.$$

Der hier in Form eines bestimmten Integrals erscheinende Rest der Reihe erhält mittelst der Substitution $z=h-t$ die in der Regel bequemere Form:

$$R=\int_0^h \frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+t)\,dt,$$

und kann mit Hülfe der Formel (4) §. 442 leicht wieder auf die Form $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$ gebracht werden, in welcher wir ihn in §. 339 kennen gelernt haben. Setzt man in der Taylor'schen Reihe $x = 0$, und schreibt sodann $x$ statt $h$, so hat man den Maclaurin'schen Lehrsatz:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt.$$

**452.** Wenn der Werth eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$ nach einer oder der andern der in den vorhergehenden Paragraphen vorgetragenen Methoden nicht direct ermittelt werden kann, so stehen uns noch zwei Mittel zu Gebote, durch welche sich der Zahlenwerth jedes bestimmten Integrals mit einem beliebigen Grade der Annäherung berechnen lässt, so dass jede Grösse als bekannt betrachtet werden kann, sobald es gelungen ist, sie durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Entweder verwandelt man nämlich die Funktion unter dem Integralzeichen in eine convergirende Reihe, ein bereits bekanntes Verfahren, welches mit Vortheil dann benutzt wird, wenn die Reihe rasch genug convergirt, um durch Addition einer mässigen Anzahl von Gliedern den Werth mit genügender Schärfe zu geben; oder man bedient sich der sogenannten Methode der näherungsweisen Quadratur, ein Verfahren, welches im Wesentlichen darin besteht, den Werth des bestimmten Integrals aus einer bestimmten, endlichen Anzahl von Werthen der Funktion $f(x)$ herzuleiten, und seinen Namen dem Umstande verdankt, dass das Integral $\int_a^b f(x) dx$ bekanntlich der Ausdruck der Fläche ist, welche von der Abscissenaxe, den beiden den Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Ordinaten und dem zwischenliegenden Bogen der Curve $y = f(x)$ begrenzt wird. Mit der Entwickelung einiger hieher gehöriger Formeln wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Zunächst bietet sich uns zu dem beabsichtigten Zwecke die bekannte Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \delta \left[ f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \ldots + f(b - \delta) \right]$$

dar; setzen wir nämlich:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)], \quad (1)$$

so wird der Ausdruck rechter Hand den Werth des Integrals um so genauer geben, je kleiner wir $h = \frac{b-a}{n}$ wählen.

Setzen wir ferner voraus, dass die Funktion $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ beständig wachse oder beständig abnehme, so liegt der Werth des Integrals nothwendig zwischen den beiden Grössen:

$$S = h\,[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)],$$

und

$$S' = h\,[f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \ldots + f(b)];$$

wir können daher als Werth des Integrals näherungsweise das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(S + S')$ annehmen und gewinnen dadurch folgende Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \right.$$
$$\left. + f(b-h) + \frac{1}{2}f(b)\right]; \quad (2)$$

der Fehler dieses Werthes wird offenbar kleiner sein als die halbe Differenz $S' - S$, also kleiner als

$$h\left[\frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a)\right].$$

Die für die Funktion $f(x)$ gemachte Voraussetzung beschränkt den Gebrauch der Formel (2) nicht wesentlich, da es im Gegenfalle immer möglich ist, das Integral durch Einschiebung von Grenzen zwischen $a$ und $b$ in mehrere andere zu zerlegen, in Bezug auf deren Grenzen die Funktion $f(x)$ die geforderte Eigenschaft besitzt, und deren jedes sodann den Gebrauch der Formel (2) gestattet.

Wenden wir beispielsweise die Formeln (1) und (2) auf die Berechnung des Integrals $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ an, $h = \frac{1}{10}$ setzend, so wird wegen $a = 1$ $b = 2$: $f(a) = 1$, $f(b) = 0{,}5$, und:

$$f(a+h) = \frac{10}{11} = 0{,}909091$$

$$f(a+2h) = \frac{10}{12} = 0{,}833333$$

$$f(a+3h) = \frac{10}{13} = 0{,}769232$$

$$f(a+4h) = \frac{10}{14} = 0{,}714286$$

$$f(a+5h) = \frac{10}{15} = 0,666667$$

$$f(a+6h) = \frac{10}{16} = 0,625000$$

$$f(a+7h) = \frac{10}{17} = 0,588235$$

$$f(a+8h) = \frac{10}{18} = 0,555556$$

$$f(a+9h) = \frac{10}{19} = 0,526315$$

$f(a+h) + \ldots + f(b-h) = 6,187715$; hiemit gibt:

die Formel (1): $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,72$,

die Formel (2): $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6938$, mit einem Fehler $< 0,025$;

der wahre Werth ist $log\ nat\ 2 = 0,6931472$.

Zu einer genaueren und sehr brauchbaren Formel gelangen wir am einfachsten auf folgende Weise. Sei (Fig 53) $MN$ die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist; $OC = a$, $OD = b$; so ist bekanntlich [§. 413]: $\int_a^b f(x)\, dx =$ Fläche $ABCD$. Theilen wir nun die Strecke $CD = b - a$ in eine gerade Anzahl $= 2n$ gleicher Theile: $Cp = pq = qr = \ldots = h = \frac{b-a}{2n}$, so ist:

$$\int_a^{a+2h} f(x)\, dx = \text{Fläche } ACbq.$$

Wie nun auch die Curve $y = f(x)$ beschaffen sein mag, so wird das Bogenstück $Ab$ derselben mit irgend einer durch die drei Punkte $A$, $a$, $b$ gelegten Curve um so näher zusammenfallen, je näher diese drei Punkte einander liegen, d. i. je kleiner $h$ ist, so dass der von letzterer Curve begrenzte Flächenstreifen als ein genäherter Werth der wahren Fläche $ACbq$ betrachtet werden kann. Wir wählen hiezu die Parabel, als die einfachste Curve; die Gleichung derselben sei:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2;$$

bestimmen wir nun die Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so, dass sie den Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha + \beta a + \gamma a^2, \\ f(a+h) &= \alpha + \beta(a+h) + \gamma(a+h)^2, \qquad (m) \\ f(a+2h) &= \alpha + \beta(a+2h) + \gamma(a+2h)^2, \end{aligned}$$

welche eben ausdrücken, dass die Parabel durch die drei Punkte $A$, $a$, $b$ gehe, Genüge leisten, so besteht näherungsweise die Gleichung:

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx$$

$$= \alpha[(a+2h)-a] + \frac{1}{2}\beta[(a+2h)^2 - a^2] + \frac{1}{3}\gamma[(a+2h)^3 - a^3]$$

$$= 2\alpha h + \frac{1}{2}\beta(4ah + 4h^2) + \frac{1}{3}\gamma(6a^2h + 12ah^2 + 8h^3)$$

$$= \frac{1}{3}h\left\{6\alpha + 6\beta a + 6\beta h + 6\gamma a^2 + 12\gamma a h + 8\gamma h^2\right\}$$

$$= \frac{1}{3}h\left\{[\alpha + \beta a + \gamma a^2] + 4[\alpha + \beta(a+h) + \gamma(a+h)^2] \right.$$
$$\left. + [\alpha + \beta(a+2h) + \gamma(a+2h)^2]\right\},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gleichungen $(m)$:

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx = \frac{1}{3}h[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)].$$

Ebenso ist:

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx = \frac{1}{3}h[f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)],$$

$$\int_{a+4h}^{a+6h} f(x)\,dx = \frac{1}{3}h[f(a+4h) + 4f(a+5h) + f(a+6h)];$$

$$\vdots$$

$$\int_{a+2(n-1)h}^{a+2nh} f(x)\,dx = \frac{1}{3}h[f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h)$$
$$+ f(a+2nh)];$$

durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich, da $a + 2nh = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h)$$
$$+ 2f(a+4h) + \ldots + 4f(b-h) + f(b)]. \qquad (3)$$

Diess ist die sogenannte Simpson'sche Formel zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale. Auf unser obiges Beispiel angewendet, findet man nach derselben, mit $h = \frac{1}{10}$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931503,$$

von dem wahren Werthe erst in der 6. Dezimalstelle um drei Einheiten abweichend.

Man bemerkt leicht den Unterschied in geometrischer Beziehung zwischen den Formeln (1), (2) und (3). Während die Formel (1) für

den Werth der Fläche $ABCD$ die Summe der Rechtecke $CAcp$, $pafq$, $qbgr$, u. s. w. gibt, stellt der Ausdruck in Formel (2) die Summe der Trapeze $CAap$, $pabq$, etc. dar, welche mittelst der Sehnen $Aa$, $ab$, $b\,c$, etc. gebildet werden, wogegen die Formel (3) auch noch die über diesen Sehnen stehenden Curvensegmente, als parabolische betrachtet, berücksichtiget.

Die Simpson'sche Formel hat den Vorzug, dass sie, ebenso wie die Formeln (1) und (2), die Kenntniss der Form der Funktion $f(x)$ nicht erfordert, sondern nur eine gewisse (ungerade) Anzahl äquidistanter, numerischer Werthe der Funktion $f(x)$ als gegeben voraussetzt; hingegen den Mangel, dass sie kein Mittel zur Schätzung des Fehlers darbietet; wir wollen daher im folgenden §. noch eine, auch in anderer Beziehung sehr brauchbare Formel kennen lernen, welche dieser Vorwurf nicht trifft.

**453.** Kraft des Taylor'schen Lehrsatzes [§. 451] hat man, $f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$ setzend:

$$\Delta f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{2n}}{2n!} f^{(2n)}(x) + \int_0^h \frac{(h-t)^{2n}}{2n!} f^{(2n+1)}(x+t)\,dt,$$

aus welcher Gleichung, wenn man statt $f(x)$ der Reihe nach $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(2n-1)}(x)$ setzt, und gleichzeitig in jeder folgenden Gleichung die Reihe um ein Glied früher abbricht, die folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$\Delta f'(x) = h f''(x) + \frac{h^2}{1.2} f'''(x) + \ldots + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n)}(x) + \int_0^h \frac{(h-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n+1)}(x+t)\,dt,$$

$$\Delta f''(x) = h f'''(x) + \frac{h^2}{1.2} f^{IV}(x) + \ldots + \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} f^{(2n)}(x) + \int_0^h \frac{(h-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} f^{(2n+1)}(x+t)\,dt,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Delta f^{(2n-1)}(x) = h f^{(2n)}(x) + \int_0^h \frac{h-t}{1} f^{(2n+1)}(x+t)\,dt.$$

Addirt man diese Gleichungen, $2n$ an der Zahl, nachdem zuvor die zweite mit $A_1 h$, die dritte mit $A_2 h^2$, ..., die $2n^{\text{te}}$ mit $A_{2n-1} h^{2n-1}$ multiplicirt worden, so erhält man:

$$\Delta f(x) + A_1 h . \Delta f'(x) + A_2 h^2 . \Delta f''(x) + \ldots$$
$$+ A_{2n-1} h^{2n-1} . \Delta f^{(2n-1)}(x) =$$
$$= h f'(x) + \left(\frac{1}{2!} + \frac{A_1}{1}\right) h^2 f''(x) + \left(\frac{1}{3!} + \frac{A_1}{2!} + \frac{A_2}{1}\right) h^3 f'''(x) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{2n!} + \frac{A_1}{(2n-1)!} + \ldots + \frac{A_{2n-1}}{1}\right) h^{2n} f^{(2n)}(x)$$
$$+ \int_0^h \left[\frac{(h-t)^{2n}}{2n!} + \frac{A_1 h (h-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{A_2 h^2 (h-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{A_{2n-1} h^{2n-1} (h-t)}{1}\right] f^{(2n+1)}(x+t)\, dt.$$

Die noch unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ bestimmen wir sofort aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{2!} + \frac{A_1}{1} = 0,$$
$$\frac{1}{3!} + \frac{A_1}{2!} + \frac{A_2}{1} = 0, \qquad (m)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{1}{2n!} + \frac{A_1}{(2n-1)!} + \frac{A_2}{(2n-2)!} + \ldots + \frac{A_{2n-1}}{1} = 0,$$

was immer möglich ist, da die Anzahl $(2n-1)$ der Gleichungen jener der zu bestimmenden Grössen gleich kommt, und erstere in Bezug auf letztere vom 1ten Grade sind; setzen wir noch der Kürze wegen:

$$Q = \frac{(h-t)^{2n}}{2n!} + \frac{A_1 h (h-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{A_2 h^2 (h-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$
$$+ \frac{A_{2n-1} h^{2n-1} (h-t)}{1},$$

so verwandelt sich obige Gleichung in folgende:

$$\Delta f(x) + A_1 h . \Delta f'(x) + A_2 h^2 . \Delta f''(x) + \ldots .$$
$$+ A_{2n-1} h^{2n-1} . \Delta f^{2n-1}(x) = \qquad (1)$$
$$= h f'(x) + \int_0^h Q f^{(2n+1)}(x+t)\, dt.$$

Die weitere Entwickelung kann, von dieser Gleichung ausgehend, auf mehrfache Weise fortgeführt werden, je nachdem man den Index $n$ unbestimmt lässt, oder demselben einen besonderen Werth ertheilt. Für unseren Zweck genügt die Annahme $n = 2$, wodurch sich die Gleichung (1) bedeutend vereinfacht. Für diesen Werth von $n$ findet man:

$$A_1 = -\frac{1}{2},\; A_2 = \frac{1}{12},\; A_3 = 0;\; Q = \frac{1}{24} t^2 (h-t)^2,$$

womit die Gleichung (1) in folgende übergeht:

$$\varDelta f(x) - \frac{h}{2} \cdot \varDelta f'(x) + \frac{h^2}{12} \cdot \varDelta f''(x) =$$

$$h f'(x) + \frac{1}{24} \int_0^h t^2 (h-t)^2 f^V(x+t)\, dt. \qquad (2)$$

Setzen wir nun voraus, dass die Funktion $f^V(x+t)$ stetig sei und ihr Zeichen nicht verändere von $t=0$ bis $t=h$, so liegt, dem in §. 442, 6) angeführten Satze zufolge, der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^h t^2 (h-t)^2 f^V(x+t)\, dt$$

zwischen den Werthen der Grössen:

$$A \int_0^h f^V(x+t)\, dt \text{ und } B \int_0^h f^V(x+t)\, dt,$$

wenn mit $A$ und $B$ der kleinste und grösste Werth bezeichnet wird, welchen die Funktion $t^2 (h-t)^2$ innerhalb der Grenzen $t=0$ und $t=h$ anzunehmen vermag. Nun sind, wie man leicht findet, diese beiden Werthe: $A=0$, $B=\frac{1}{16} h^4$; ferner ist $\int_0^h f^V(x+t)\, dt = f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)$, folglich liegt der Werth des in Rede stehenden Integrals zwischen 0 und $\frac{1}{16} h^4 [f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)]$, und kann demnach $= \theta \cdot \frac{1}{16} h^4 [f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)]$ gesetzt werden, unter $\theta$ einen positiven, echten Bruch verstanden. Die Gl. (2) wird hiedurch:

$$\varDelta f(x) = \frac{h}{2} \cdot \varDelta f'(x) + h f'(x) - \frac{h^2}{12} \cdot \varDelta f''(x)$$

$$+ \theta \frac{h^4}{16 . 24} [f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)],$$

d. i. mit Rücksicht auf die Bedeutung des Symbols $\varDelta$:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{2} [f'(x+h) - f'(x)] - \frac{h^2}{12} [f''(x+h) - f''(x)]$$

$$+ \theta \frac{h^4}{16 . 24} [f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)].$$

Setzen wir nun $f'(x) = F(x)$, wodurch

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int F(x)\, dx,\; f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} F(x)\, dx$$

wird, so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\int_x^{x+h} F(x)\, dx = \frac{h}{2} [F(x+h) + F(x)] - \frac{h^2}{12} [F'(x+h) - F'(x)]$$

$$+ \theta \frac{h^4}{16 . 24} [F'''(x+h) - F'''(x)],$$

deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass $F^{IV}(x)$ stetig und von gleichem Zeichen sei von $x$ bis $x+h$.

Lassen wir nun in dieser Gleichung an die Stelle von $x$ der Reihe nach $a$, $a + h$, $a + 2h$, ..., $a + (n-1)h$ treten, und addiren die so erhaltenen Gleichungen, $n$ an der Zahl, so ergiebt sich:

$$\int_a^{a+nh} F(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \dots \right.$$
$$\left. + F[a+(n-1)h] + \frac{1}{2}F(a+nh)\right]$$
$$- \frac{h^2}{12}[F'(a+nh) - F'(a)] + \frac{h^4}{16.24}.\Sigma,$$

wo

$$\Sigma = \theta_1 [F'''(a+h) - F'''(a)] + \theta_2 [F'''(a+2h) - F'''(a+h)] + \dots$$
$$+ \theta_n [F'''(a+nh) - F'''(a+(n-1)h)]$$

ist, und $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, ..., $\theta_n$ positive, echte Brüche bezeichnen. Diese Gleichung setzt nun voraus, dass die Funktion $F^{IV}(x)$ stetig sei und von gleichem Vorzeichen von $x = a$ bis $x = a + nh$; diess hat aber zur Folge, dass die Funktion $F'''(x)$ von $x = a$ bis $x = a + nh$ beständig wächst oder beständig abnimmt, daher die eingeklammerten Differenzen in dem Ausdrucke $\Sigma$ alle dasselbe Zeichen haben; in Folge dessen liegt aber der Werth der Grösse $\Sigma$ nothwendig zwischen den zwei Werthen 0 und $[F'''(a+nh) - F(a)]$, welche der Ausdruck rechter Hand annimmt, wenn man einmal für die Grössen $\theta$ den kleinsten Werth $= 0$, dann den grössten Werth $= +1$ substituirt, dessen diese Grössen fähig sind. Man kann daher $\Sigma = \theta\,[F'''(a+nh) - F'''(a)]$ setzen, wenn $\theta$ wieder einen positiven echten Bruch bezeichnet, und hat demnach, unter der Voraussetzung, dass $F^{IV}(x)$ stetig und von gleichem Vorzeichen sei von $x = a$ bis $x = a + nh$:

$$\int_a^{a+nh} F(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \dots \right.$$
$$\left. + F(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}F(a+nh)\right]$$
$$- \frac{h^2}{12}[F'(a+nh) - F'(a)] + \theta\,.\,\frac{h^4}{384}\,F'''(a+nh) - F'''(a)], \quad (3)$$

oder, wenn man $a + nh = b$, also $h = \dfrac{b-a}{n}$ setzt:

$$\int_a^b F(x)\,dx =$$
$$h\left[\frac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \dots + F(b-h) + \frac{1}{2}F(b)\right]$$
$$- \frac{h^2}{12}[F'(b) - F'(a)] + \theta\,\frac{h^4}{384}[F'''(b) - F'''(a)]. \quad (4)$$

Die Anwendung dieser Formel zur Berechnung bestimmter Integrale unterliegt keiner Schwierigkeit und erfährt durch die Bedingung, dass $F^{IV}(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen nicht ändern darf, keine wesentliche Einschränkung, da man nöthigenfalls das vorgelegte Integral durch Einschiebung neuer Grenzen in mehrere Integrale zerlegen kann, welche dieser Bedingung entsprechen. Der Ausdruck in der ersten Zeile rechter Hand ist, wie man sieht, der bereits im vorigen §., Gl. (2), erhaltene genäherte Werth des bestimmten Integrals; durch Hinzufügung des Gliedes $-\frac{1}{12}h^2[F'(b)-F'(a)]$ erhält man einen verbesserten Werth, dessen Fehler sofort kleiner ist als $+\frac{1}{384}h^4[F'''(b)-F'''(a)]$.

Das schon im vorigen §. benutzte Beispiel, nach dieser Formel mit $h=\frac{1}{10}$ berechnet, gibt: $\int_1^2\frac{dx}{x}=0,6931465$ mit einem Fehler $<+0,0000015$; er erreicht in der That nur die Hälfte dieses Betrages.

**454.** Schreibt man die soeben gewonnene Formel in folgender Form:

$$F(a)+F(a+h)+F(a+2h)+\ldots+F(a+nh)$$
$$=\frac{1}{h}\int_a^{a+nh}F(x)\,dx+\frac{1}{2}[F(a)+F(a+nh)]+\frac{1}{12}h[F'(a+nh)-F'(a)]$$
$$-\theta\frac{h^3}{384}[F'''(a+nh)-F'''(a)], \qquad (1)$$

so kann dieselbe, wie man sieht, zur näherungsweisen Berechnung der Summe: $F(a)+F(a+h)+\ldots+F(a+nh)$ mit Vortheil angewendet werden, wenn diese Summe aus sehr vielen Gliedern besteht, und das Integral $\int F(x)\,dx$ angegeben werden kann. Setzt man $a=h=1$, und schreibt $n-1$ statt $n$, so erhält obige Gleichung die Form:

$$F(1)+F(2)+F(3)+\ldots.+F(n)=$$
$$=\int_1^n F(x)\,dx+\frac{1}{2}[F(1)+F(n)]+\frac{1}{12}[F'(n)-F'(1)]$$
$$-\frac{\theta}{384}[F'''(n)-F'''(1)],$$

oder, wenn man das Aggregat der von $n$ unabhängigen constanten Glieder:

$$-\int_{x=1} F(x)\,dx + \frac{1}{2}F(1) - \frac{1}{12}F'(1) + \frac{\theta}{384}F'''(1) = C \qquad (2)$$

setzt:

$$F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n) =$$

$$= C + \int_{x=n} F(x)\,dx + \frac{1}{2}F(n) + \frac{1}{12}F'(n) - \frac{\theta}{384}F'''(n), \qquad (3)$$

wobei $F^{IV}(x)$ stetig und von gleichem Vorzeichen sein muss von $x=1$ bis $x=n$.

Um die Anwendung dieser Formel durch ein Beispiel zu erläutern, sei $F(x) = lx$, so wird $F'(x) = \frac{1}{x}$, $F'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $\int lx\,dx = x\,lx - x$, und die Gl. (3) gibt:

$$l1 + l2 + l3 + \ldots + ln = l(1.2.3\ldots\ldots n) =$$

$$= C + n\,l\,n - n + \frac{1}{2}\,l\,n + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n} - \frac{\theta}{192}\cdot\frac{1}{n^3}.$$

Es handelt sich nun noch um die Bestimmung der Constante $C$. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n} - \frac{\theta}{192}\cdot\frac{1}{n^3} = R_n,$$

so ist:

$$l(1.2.3\ldots.n) = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) l\,n - n + R_n,$$

und folglich auch:

$$l(1.2.3\ldots.2n) = C + \left(2n + \frac{1}{2}\right) l\,2n - 2n + R_{2n}$$

$$= C + \left(2n + \frac{1}{2}\right) l\,n + \left(2n + \frac{1}{2}\right) l\,2 - 2n + R_{2n}.$$

Es ist aber identisch:

$$1.2.3\ldots.2n = 2.4.6\ldots.2n.1.3.5\ldots..(2n-1)$$

$$= 2^n.1.2.3\ldots..n.1.3.5\ldots(2n-1),$$

d. i. zu den Logarithmen übergehend:

$$l(1.3.5\ldots..\overline{2n-1}) = l(1.2.3\ldots.2n) - l(1.2.3\ldots.n) - l\,2^n,$$

folglich mit Rücksicht auf die beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$l(1.3.5\ldots.\overline{2n-1}) = n\,l\,n + \left(n + \frac{1}{2}\right) l\,2 - n + R_{2n} - R_n.$$

Ferner hat man:

$$2.2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2).2n = [2.4.6\ldots.(2n-2)]^2.2n =$$

$$= [1.2.3\ldots.(n-1)\,2^{n-1}]^2.2n = \frac{[1.2.3\ldots.n.2^n]^2}{2n},$$

$$1.3.3.5.5\ldots.(2n-1)(2n-1) = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2,$$

somit durch Division und Uebergang zu den Logarithmen:

$$l\,\frac{2.2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2)2n}{1.3.3.5.5.7\ldots\ldots(2n-1)(2n-1)} = 2\,l(1.2.3\ldots.n)$$

$$+ 2n\,l\,2 - l\,2n - 2\,l(1.3.5\ldots.\overline{2n-1})$$

$$= 2\,C - 2\,l\,2 + 4\,R_n - 2\,R_{2n},$$

wenn man nämlich für die Logarithmen der beiden Faktoriellen die oben entwickelten Werthe einsetzt. Lässt man nun in dieser Gleichung $n$ unendlich gross werden, so nähert sich — dem Wallis'schen Theorem zufolge — die Grösse links vom Gleichheitszeichen der Grenze $l\,\frac{1}{2}\,\pi$, während die rechte Seite für $n = \infty$ auf $2\,C - 2\,l\,2$ sich reducirt. Man hat daher $l\,\frac{1}{2}\,\pi = 2\,C - 2\,l\,2$, woraus $C = \frac{1}{2}\,l\;2\pi$ folgt. Es ist demnach:

$$l(1.2.3\ldots.n) = \frac{1}{2}\,l\;2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) l\,n - n + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n} - \frac{\theta}{192}\cdot\frac{1}{n^3}, \quad (4)$$

oder für gemeine Logarithmen:

$$\log(1.2.3\ldots n) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - M\,n$$

$$+ \frac{M}{12}\cdot\frac{1}{n} - \frac{M\theta}{192}\cdot\frac{1}{n^3},$$

wo $M = 0,\,4342944819\ldots$ der Modulus.

Setzt man z. B. $n = 1000$, so erhält man mittelst dieser Formel den Werth von log (1.2.3... 1000) bis auf 11 Dezimalstellen genau, da die Grösse $\frac{M}{192\,.\,n^3}$ erst 2 Einheiten in der 12. Dezimalstelle beträgt. Man findet:

$$\log(1.2.3\ldots.1000) = 2567,\,60464422221\ldots,$$

woraus man erfährt, dass das Produkt: 1.2.3.... 1000 durch eine Zahl von 2568 Ziffern ausgedrückt wird, deren 7 erste Ziffern zur linken 4023872 sind, so dass $4023872.10^{2561}$ ein genäherter Werth dieses Produktes ist. In vielen Fällen, wo es sich um das Verhältniss sehr grosser Zahlen handelt, genügt die Kenntniss solcher genäherter Werthe der letzteren vollkommen, wie dies namentlich auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig vorkommt, wo dergleichen Zahlen sich in Form von Faktoriellen darbieten.

Mit Hinweglassung des Restgliedes kann die Gl. (4) folgendermaassen geschrieben werden:

$$l(1.2.3\ldots.n) = l\sqrt{2\pi} + l\,n^{n+\frac{1}{2}} - n + \frac{1}{12n} =$$

$$= l\,n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi} - n + \frac{1}{12n};$$

hieraus ergibt sich:

$$1.2.3\ldots.n = e^{l\left(n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\right) - n + \frac{1}{12n}} = e^{l\left(n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\right)}\,e^{-n+\frac{1}{12n}},$$

d. i.:

$$1.2.3\ldots.n = n^n\sqrt{2n\pi}\,.\,e^{-n}\,e^{\frac{1}{12n}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt einerseits, indem man $2n$ statt $n$ setzt:

$$1.2.3\ldots..2n = 2^{2n}\,n^{2n}\sqrt{4n\pi}\,.\,e^{-2n}\,e^{\frac{1}{24n}};$$

anderseits durch Multiplication mit $2^n$ zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens:

$$2.4.6\ldots.2n = 2^n\,.\,n^n\sqrt{2n\pi}\,.\,e^{-n}\,e^{\frac{1}{12n}};$$

durch Division dieser zwei letzten Gleichungen erhält man dann:

$$1.3.5.7\ldots.(2n-1) = 2^n\,n^n\sqrt{2}\,e^{-n}\,e^{-\frac{1}{24n}}.$$

Beachtet man noch, dass der $r^{\text{te}}$ Binomialcoefficient

$$\binom{m}{r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots..[m-(r-1)]}{1.2.3\ldots.r}$$

der $m^{\text{ten}}$ Potenz des Binoms auf die Form:

$$\binom{m}{r} = \frac{1.2.3\ldots..m}{1.2.3\ldots.(m-r).1.2.3\ldots r}$$

gebracht werden kann, so ergibt sich, $m$ als ganze positive Zahl vorausgesetzt, durch Substitution der obigen Werthe für die im Zähler und Nenner erscheinenden Faktoriellen, der folgende genäherte Ausdruck:

$$\binom{m}{r} = \frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{r^{r+\frac{1}{2}}(m-r)^{m-r+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}-\frac{1}{m-r}\right)},$$

welcher, sowie die obigen genäherten Ausdrücke der Faktoriellen, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung finden.

# DRITTES KAPITEL.

## ANWENDUNG DER INTEGRALRECHNUNG AUF DIE AUSMESSUNG DER LINIEN, FLAECHEN UND KOERPER.

### 1. Quadratur der ebenen Curven.

**455.** Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen ebenen Curve (Fig. 28) und $F$ die Fläche, welche von zwei Ordinaten $NQ$, $MP$, und den zwischen diesen liegenden Stücken der Curve und der Abscissenaxe begrenzt wird. Betrachtet man die erstere Ordinate $NQ$ als fest, so ist die Fläche $F$ eine Funktion der zur anderen Ordinate $PM = y$ gehörigen Abscisse $OP = x$, und das Differenziale dieser Fläche ist, zufolge §. 363:

$$dF = y\,dx = f(x)\,dx.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$F = \int y\,dx + C \tag{1}$$

als Ausdruck der Fläche selbst, in welchem die Anwesenheit der willkürlichen Constante $C$ von dem Umstande herrührt, dass die Lage der festen Ordinate $NQ$, von welcher aus die Fläche gezählt wird, noch unbestimmt ist. Ist $x = a$ die der Anfangsordinate $NQ$ entsprechende Abscisse, so muss der Ausdruck der Fläche für $x = a$ verschwinden, wodurch sich der Werth der Constante bestimmt; die Fläche ist, unter dieser Bedingung, kraft der in §. 413 aufgestellten Grundsätze, durch das Integral

$$F = \int_a^x y\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$$

gegeben, sowie endlich das Integral

$$F = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

die Fläche ausdrückt, welche von den beiden, den Abscissen $x = a$, $x = b$ entsprechenden Ordinaten, dem zwischenliegenden Bogen der Curve und der Abscissenaxe begrenzt wird.

Ist die Curve durch eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten $r$, $\theta$ gegeben, so hat man als Ausdruck des Differenzials der Fläche [§. 367]:

$$dF = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$

somit ist:

$$F = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\, d\theta \tag{2}$$

der Inhalt der Fläche, welche von zwei den Polarwinkeln $\theta_0$ und $\theta$ entsprechenden Radienvectoren und dem zwischenliegenden Bogen der Curve eingeschlossen wird.

Den Flächeninhalt einer Curve in dem hier angedeuteten Sinne bestimmen, heisst die Curve quadriren. Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung des Verfahrens dienen.

**456.** Die Parabel: $y^2 = p\,x$. Zählt man die Fläche vom Scheitel der Curve aus, für welchen $x = 0$ ist, so hat man:

$$F = \int_0^x \sqrt{px}\,.\,dx = \sqrt{p}\,.\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,x\sqrt{px} = \frac{2}{3}\,x\,y.$$

Die Fläche, welche von der Abscissenaxe, einem im Scheitel beginnenden Bogen der Parabel, und einer auf die Axe senkrechten Ordinate eingeschlossen wird, ist daher gleich $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechteckes.

2) Für die Ellipse, deren auf ihren Mittelpunkt bezogene Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ist, hat man, wenn die Fläche von der kleinen Axe aus gezählt wird:

$$F = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

d. i. vermöge Gl. (7), §. 431:

$$F = \frac{b}{a}\left\{\frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}\,a^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right\} =$$

$$= \frac{b}{a}\left\{\frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}\,a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right\},$$

oder

$$F = \frac{1}{2}\,x\,y + \frac{1}{2}\,a\,b \arcsin\frac{x}{a}.$$

Da $\frac{1}{2}\,x\,y$ die Fläche des mit den Coordinaten $x$, $y$ als Katheten construirten rechtwinkligen Dreiecks $CMP$ (Fig. 54) ist, so drückt das zweite Glied $\frac{1}{2}\,a\,b \arcsin\frac{x}{a}$ die Fläche des elliptischen Sectors $BCM$ aus, welcher von der halben kleinen Axe und dem Halbmesser begrenzt ist, dessen Endpunkte die Abscisse $x$ entspricht.

Für $x = a$, $y = 0$ folgt aus obiger Gleichung $F = \frac{1}{4}\, ab\pi$, als Ausdruck für die Fläche des elliptischen Quadranten, somit ist $\pi ab$ der Flächeninhalt der ganzen Ellipse.

Geht man von der, auf den Scheitel als Ursprung bezogenen Gleichung der Ellipse: $y = \frac{b}{a}\sqrt{2\,ax - x^2}$ [§. 197] aus, so erhält man für die Fläche $APM$ (Fig. 54), welche von der grossen Axe, dem im Scheitel beginnenden Bogen der Ellipse und der Ordinate des Endpunktes dieses Bogens eingeschlossen wird, den Ausdruck:

$$F = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{2\,ax - x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a}\left\{\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2\,ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right\},$$

d. i.

$$F = \frac{1}{2}\,a\,b\arccos\frac{a-x}{a} - \frac{b\,(a-x)}{2\,a}\sqrt{2\,ax - x^2},$$

welcher Ausdruck auch aus dem oben erhaltenen leicht abgeleitet werden kann.

Für $b = a$ ergeben sich aus vorstehenden Formeln die für den Kreis geltenden, und durch Vergleichung beider gelangt man leicht zu dem Resultate, dass, wenn man über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis beschreibt, der elliptische Abschnitt sich zu dem zwischen denselben Ordinaten liegenden Kreisabschnitte verhält, wie $b : a$.

3) Die Hyperbel. Die Gleichung dieser Curve auf ihren Mittelpunkt bezogen ist: $ay = b\sqrt{x^2 - a^2}$. Für die vom Scheitel aus gezählte Fläche hat man daher

$$F = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Nun ist [§. 431, Gl. (7)]:

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

und

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C, \text{ [§. 428, Gl. (5)]},$$

somit, wenn man das Integral von $x = a$ anfangen lässt:

$$F = \frac{b\,x}{2\,a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}\,a\,b\,.\,l\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

oder

$$F = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Die Gleichung einer auf ihre Asymtoten bezogenen Hyperbel ist bekanntlich $xy = k^2$ [§. 224], wenn $k^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, und $a$, $b$ die beiden Halbaxen; die von zwei zu den Abscissen $x_0$ und $x$ gehörigen Ordinaten, dem zwischenliegenden hyperbolischen Bogen und der Abscissenaxe (Asymtote) eingeschlossene Fläche wird demnach ausgedrückt durch die Formel

$$F = k^2 \int_0^x \frac{dx}{x} = k^2 l \frac{x}{x_0}.$$

In der gleichseitigen Hyperbel ist $b = a$, $k^2 = \frac{1}{2}a^2$; setzt man nun $a = \sqrt{2}$ und $x_0 = 1$, so wird $F = lx$, so dass also die natürlichen Logarithmen durch die asymtotischen Flächen einer gleichseitigen Hyperbel ausgedrückt werden, daher auch diese Logarithmen Hyperbolische genannt wurden. Man sieht übrigens leicht, dass jedes Logarithmensystem auf diese Bezeichnung denselben Anspruch hat, da es hiezu nur einer geeigneten Wahl der Grösse $a$ bedarf. Für die gemeinen oder Briggischen Logarithmen wäre z. B. $a^2 = 2M$ zu setzen, wo $M = 0{,}43429\ldots$ der Modulus, womit $F = M\,l\,x = \log x$ wird.

4) Für die Cycloide gelten die Gleichungen [§. 238]:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),\ y = a(1 - \cos\varphi);$$

hiemit wird

$$F = \int_0^x y\,dx = a^2 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Für $\varphi = 2\pi$ erhält man die Fläche der ganzen Cycloide $= 3a^2\pi$, d. i. gleich der dreifachen Fläche des Erzeugungskreises.

Nimmt man den Scheitel $A$ der Cycloide zum Ursprung (Fig. 39) und zählt die Abscissen auf der Axe $AD$, so wird die Curve durch die Gleichung [(4), §. 238]:

$$y = a \operatorname{arc}\cos\frac{a - x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}$$

ausgedrückt, deren Differenziation die Ausdrücke

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}},\quad x\,dy = \sqrt{2ax - x^2}\,dx$$

darbietet. Gibt man nun, mit Hülfe des Satzes der theilweisen Inte-

gration, der Gleichung $F = \int y\, dx$ die Form $F = xy - \int x\, dy$, so erhält man für die Fläche, welche von der Axe der Cycloide, der Ordinate $y$, und dem den Scheitel mit dem Punkte $xy$ verbindenden Bogen der Cycloide begrenzt wird, den Ausdruck:

$$F = xy - \int_0^x \sqrt{2\, ax - x^2}\, dx.$$

Hier bedeutet nun $F$ das cycloidische Segment $AMP$ (Fig. 39), während das Integral $\int\limits_0^x \sqrt{2\, ax - x^2}\, dx$ vermöge der oben im 2. Beispiele entwickelten Formeln die Fläche des Kreissegmentes $APm$ ausdrückt; es ist daher, zufolge dieser Gleichung, die cycloidische Fläche $AQM$ gleich dem Kreissegmente $APm$.

Substituirt man in der letzten Gleichung den schon oben im zweiten Beispiele entwickelten Werth des Integrals, so erhält man nach Elimination des arc cos mittelst der Gleichung der Curve:

$$F = \frac{1}{2} y\, (2\, x - a) + \frac{1}{2} (2\, a - x) \sqrt{2\, ax - x^2}.$$

5) Als Beispiel für die Anwendung der Formel (2) möge die Berechnung des Flächeninhaltes des elliptischen Sectors $FMA$ dienen (Fig. 54), welcher von dem Radiusvector $FM$, der grossen Axe und dem zwischen liegenden Bogenstücke $AM$ eingeschlossen wird. Die Polargleichung der Ellipse ist bekanntlich:

$$r = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

wo $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ und $\theta = \angle AFM$. Die Fläche des Sectors $AFM$ ist somit

$$F = \frac{1}{2} a^2 (1 - \varepsilon^2)^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2},$$

d. i. wenn man das Integral mittelst der Formeln (1) und (6) in §. 438 bestimmt:

$$F = a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{arc\,tg} \left( \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \right) - \frac{1}{2} a^2 (1 - \varepsilon^2) \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

Dieser Ausdruck erhält eine einfachere Form durch Einführung des Winkels $ACm = u$, welchen die grosse Axe mit dem Halbmesser des Punktes $m$ bildet, in welchem die verlängerte Ordinate $PM$ den über der grossen Axe beschriebenen Kreis schneidet. Es ist nämlich $CP = CF + FP$, d. i.

$$a \cos u = a\, \varepsilon + r \cos \theta,$$

woraus man leicht

$$\cos\theta = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos u}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u}{1-\varepsilon\cos u},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u^2,$$

$$\text{oder } \operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$$

findet, mittelst welcher Ausdrücke obige Formel sich in folgende verwandelt:

$$F = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(u - \varepsilon\sin u) = \frac{1}{2}ab\,(u - \varepsilon\sin u).$$

**457.** Wenn die Curve zwischen den Grenzen des Integrals $F = \int_a^b y\,dx$ die Abscissenaxe schneidet, etwa für $x = c$, wenn $a < c < b$, so gibt dieser Ausdruck die algebraische Summe der beiden ober- und unterhalb der Axe liegenden Flächentheile, indem der erstere positiv, der andere negativ erscheint. Will man, wie gewöhnlich, die arithmetische Summe haben, so sind beide Flächen durch Zerfällung des Integrals in zwei Theile $\int_a^c y\,dx$ und $\int_c^b y\,dx$ besonders zu berechnen.

Eine Zerlegung des Integrals in mehrere Theile muss, wie leicht einzusehen, auch in dem Falle Platz greifen, wenn die Funktion $y = f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

Die zwischen zwei verschiedenen Curven $MN$, $m\,n$, (Fig. 55), deren Gleichungen $Y = F(x)$ und $y = f(x)$ sind, und zwei beliebigen Ordinaten eingeschlossene Fläche wird ausgedrückt durch

$$F = \int_a^b (Y - y)\,dx;$$

denn es ist Fläche $PMNQ = \int_a^b Y\,dx$, Fläche $Pmn\,Q = \int_a^b y\,dx$, zwei Gleichungen, durch deren Subtraktion sich die vorhergehende ergibt. Man sieht leicht ein, dass dieselben Gleichungen auch noch in dem Falle stattfinden, wenn beide Curvenzweige einer und derselben Curve angehören, wo dann $y$ und $Y$ die beiden Werthe der Ordinaten bedeuten, welche die Gleichung der Curve für jeden Werth von $x$ darbietet.

Einen noch allgemeineren Ausdruck für die Fläche einer ebenen Curve, welcher in praktischen Fällen oft mit Vortheil angewendet wird, erhält man, wenn man sich die Fläche nicht in unendlich schmale

Streifen von endlicher Länge, wie es der Ausdruck $\int y\,dx$ voraussetzt, sondern in unendlich kleine Rechtecke $dx\,.\,dy$ getheilt denkt, durch deren Summirung sich der ganze Flächeninhalt ergibt. Diese Summe, somit der Flächeninhalt wird bekanntlich durch den Werth des Doppel-Integrals

$$F = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dx\,dy$$

ausgedrückt, wo die Grenzen $y_0$, $y_1$ als Funktionen von $x$ zu betrachten sind. Wenden wir beispielsweise diese Formel auf den durch die Gleichung $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ ausgedrückten Kreis an, so gibt diese Gleichung zunächst:

$$\left.\begin{matrix} y_0 \\ y_1 \end{matrix}\right\} = \beta \mp \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2};$$

man hat somit:

$$F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} dx\,(y_1 - y_0) = 2\int_{x_0}^{x_1} dx\,\sqrt{x^2 - (x-\alpha)^2}.$$

Nun ist vermöge der Formeln (11), §. 429 und (4), §. 428:

$$\int dx \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2} = -\frac{1}{2}(\alpha - x)\sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin\frac{x-\alpha}{r}.$$

Sucht man nun die Fläche des ganzen Kreises, so hat man dieses Integral zwischen den Grenzen $x_0 = \alpha - r$ und $x_1 = \alpha + r$ zu nehmen, und findet als Werth desselben innerhalb dieser Grenzen $\frac{1}{2}r^2\pi$; somit ist $F = r^2\pi$ die Fläche des ganzen Kreises.

**458.** Die Berechnung des Flächeninhaltes einer Curve mittelst der Formel $F = \int y\,dx$ erfordert die Kenntniss der Gleichung $y = f(x)$ derselben, d. i. ihres Bildungsgesetzes; ist dieses unbekannt, oder die Curve ein gänzlich gesetzloser aber doch stetig gekrümmter Zug, so wird man sich der in §. 452 vorgetragenen Methode der näherungsweisen Quadratur bedienen, um den Flächeninhalt angenähert zu bestimmen, z. B. der Simpson'schen Formel [Gl. (3) §. 452]. Handelt es sich nämlich um die Berechnung des Flächenraumes $ABCD$ (Fig. 53), so theile man den Abstand $AD$ der äussersten Ordinaten $AC = y_0$ und $BD = y_{2n}$, in eine gerade Anzahl $= 2\,n$ gleicher Theile, jeder $= h$; sind dann $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ die den Theilpunkten $C, p, q, \ldots D$ entsprechenden Ordinaten, so ist, zufolge der Gl. (3), §. 452, die Fläche

$$ABCD = \frac{1}{3}h\,(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + \ldots$$
$$+ 2\,y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n}),$$

eine Formel, welche bekanntlich darauf beruht, dass man der stetigen Curve $AB$ eine Reihe von, durch je drei aufeinanderfolgende Endpunkte der Ordinaten: $A, a, b; b, c, d;$ etc. gelegten parabolischen Bögen substituirt.

## II. Rectifikation der Curven.

**459.** Betrachten wir zunächst eine ebene Curve, dargestellt durch eine Gleichung $y = f(x)$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten, so ist, wenn wir mit $s$ die Länge des Bogens bezeichnen, welcher zwischen einem festen Punkte $A$ der Curve und einem unbestimmten Punkte liegt, dessen Abscisse $x$ ist, der Ausdruck des Differenzials dieses Bogens, zufolge §. 362:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Man hat demnach für die Länge des Bogenstückes zwischen zwei Punkten der Curve, welchen die Abscissen $a$ und $x$ entsprechen, den Ausdruck:

$$s = \int_a^x dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \tag{1}$$

oder auch

$$s = \int_b^y dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Letztere Formel, in welcher $b$ die Ordinate des Anfangspunktes des Bogens, wird man anwenden, wenn sich die Gleichung der Curve nicht auf die Form $y = f(x)$, wohl aber auf jene $x = f(y)$ bringen lässt.

Ist die Curve durch eine Gleichung $r = f(\theta)$ zwischen Polar-Coordinaten $r$, $\theta$ gegeben, so hat man [§. 367]:

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = d\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

und

$$s = \int d\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} + C, \tag{2}$$

wo die Constante wieder durch die Coordinaten des Anfangspunktes des Bogens sich bestimmt.

Beisp. 1) Für die Parabel hat man $y^2 = px$; hieraus folgt $2ydy = pdx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$, somit für den vom Scheitel an gezählten Bogen:

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{p}{4x}};$$

es ist aber:

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = \int \frac{(p + 4x)\,dx}{2\sqrt{px + 4x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{1}{2}p + 4x\right)dx}{\sqrt{px + 4x^2}} + \frac{p}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{px + 4x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{px + 4x^2} + \frac{p}{8}\,l\,(p + 8x + 4\sqrt{px + 4x^2}),\ [\S.\ 431,\ \text{Gl. } 9],$$

somit, da das Integral für $x = 0$ verschwinden soll:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{px + 4x^2} + \frac{p}{8}\,l\,\frac{p + 8x + 4\sqrt{px + 4x^2}}{p}.$$

2) Aus der Gleichung der Ellipse, $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

hiemit erhält man für den Bogen der Ellipse vom Endpunkte der kleinen Axe bis zu jenem Punkte, dessen Abscisse $x$ ist, den Ausdruck:

$$s = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}} = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

wo $a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2$.

Dieses Integral lässt sich in endlicher Gestalt nicht darstellen, kann jedoch auf mehrfache Art in Form einer convergirenden Reihe entwickelt werden. Setzt man $x = az$, so verwandelt sich dasselbe in das bereits in §. 432 betrachtete Integral $s = a\int_0^{\frac{x}{a}} dz \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 z^2}{1 - z^2}}$, d. i.

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4 \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{z^4\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{z^6\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \ldots$$

Entwickelt man diese Integrale mittelst der Formel (5), §. 431, so erhält man:

$$s = \frac{x}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\left(\frac{3}{2} + \frac{x^2}{a^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\left(\frac{3.5}{2.4} + \frac{5}{4}\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}\right) + \ldots\right\} +$$

$$+ a \arc \sin \frac{x}{a} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} \varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^3\right)^2 - \ldots \right\}.$$

Für $x = a$ findet man daraus die Länge $Q$ des elliptischen Quadranten:

$$Q = \frac{1}{2} a \pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} \varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^3\right)^2 - \ldots \right\}.$$

Einen anderen Ausdruck für die Länge eines elliptischen Bogens erhält man durch Einführung des, bereits oben [§. 456, 5. Beispiel] benutzten Winkels $u$, mit Hülfe dessen die Ellipse durch die Gleichungen

$$x = a \cos u,\ y = b \sin u = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u$$

dargestellt wird. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$dx = - a \sin u\, du,\ dy = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos u\, du,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \cos u^2)\, du^2;\ ds = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos u^2}\, du.$$

Hiemit ergibt sich als Ausdruck für die Bogenlänge, vom Scheitel der grossen Axe an gezählt bis zu jenem Punkte der Curve, dessen Abscisse $x = a \cos u$ ist:

$$s = a \int_0^u \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos u^2}\, du.^{*)}$$

Nun ist:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos u^2} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos u^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon^4 \cos u^4$$

$$- \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{6} \varepsilon^6 \cos u^6 - \ldots,$$

ferner: $2 \cos u^2 = \cos 2u + 1,$

$8 \cos u^4 = \cos 4u + 4 \cos 2u + 3,$

$32 \cos u^6 = \cos 6u + 6 \cos 4u + 15 \cos 2u + 10,$ u. s. w.,

somit:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos u^2} = A_0 - 2A_1 \cos 2u - 4A_2 \cos 4u - 6A_3 \cos 6u - \ldots,$$

wo der Kürze halber:

---

*) Führt man statt des Winkels $u$ sein Complement $\varphi = \frac{\pi}{2} - u$ sein, so verwandelt sich obiger Ausdruck des im Scheitel der grossen Axe beginnenden Bogens in folgenden

$$s = a \int_\varphi^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}\, d\varphi,$$

oder, wenn man den Bogen vom Endpunkte der kleinen Axe aus zählt:

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}\, d\varphi.$$

welches Integral in ähnlicher Weise, wie oben, entwickelt werden könnte.

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot 3 \varepsilon^4 - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot 10 \cdot \varepsilon^6 - \ldots\ldots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} \varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^3\right)^2 - \ldots\ldots\ldots$$

$$2 A_1 = \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{2^4} \varepsilon^4 + \frac{15}{2^9} \varepsilon^6 + \ldots.$$

$$4 A_2 = \frac{1}{2^6} \varepsilon^4 + \frac{3}{2^8} \varepsilon^6 + \ldots.$$

$$6 A_3 = \frac{1}{2^9} \varepsilon^6 + \ldots\ldots$$

gesetzt ist. Hiemit erhält man:

$$s = a \int_0^u (A_0 \, du - 2 A_1 \cos 2 u - 4 A_2 \cos 4 u - 6 A_3 \cos 6u - \ldots),$$

d. i.

$$s = a \, (A_0 \, u - A_1 \sin 2 u - A_2 \sin 4 u - A_3 \sin 6 u - \ldots.).$$

Für $u = \frac{1}{2} \pi$ ergibt sich hieraus der elliptische Quadrant $Q = \frac{1}{2} a \pi . A_0$, übereinstimmend mit obigem Resultate.

3) Für die Hyperbel, deren Gleichung: $a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$ ist, erhalten wir, wenn $a^2 \varepsilon^2 = a^2 + b^2$:

$$s = \int_a^x dx \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \, x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$$

als Ausdruck der Bogenlänge vom Scheitel der Curve bis zu jenem Punkte, dessen Abscisse $x$ ist. Da bei dieser Curve $x$ immer grösser als $a$ ist, so setze man $x = \frac{a}{\cos u}$, $dx = \frac{a \sin u \, du}{\cos u^2}$, wodurch

$$s = a \, \varepsilon \int_0^u \frac{du}{\cos u^2} \sqrt{1 - \frac{\cos u^2}{\varepsilon^2}}$$

wird. Durch Entwickelung des Binoms erhält man:

$$s = a \, \varepsilon \int_0^u \frac{du}{\cos u^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \varepsilon^2} \cos u^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \varepsilon^4} \cos u^4 - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{6 \varepsilon^6} \cos u^6 \right.$$

$$\left. - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{1}{8 \varepsilon^8} \cos u^8 - \ldots \right\},$$

oder nach Integration der beiden ersten Glieder:

$$s = a \, \varepsilon \operatorname{tg} u - \frac{a}{2 \varepsilon} u - a \int_0^u du \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \varepsilon^3} \cos u^2 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{6 \varepsilon^5} \cos u^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{1}{8 \varepsilon^7} \cdot \cos u^6 + \ldots. \right\}.$$

Ersetzt man nun, wie im vorigen Beispiele, die Potenzen des Cosinus durch die Cosinus der Vielfachen des Winkels $u$, und integrirt, so ergiebt sich

$$s = a\,(\varepsilon \operatorname{tg} u - A_0\, u - A_1 \sin 2u - A_2 \sin 4u - A_3 \sin 6u - \ldots),$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{2\,\varepsilon} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4\,\varepsilon^3} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{1}{6\,\varepsilon^5} + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \frac{1}{8\,\varepsilon^7} + \ldots$$

$$2\,A_1 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{\varepsilon^3} + \frac{1}{32}\,\frac{1}{\varepsilon^5} + \frac{225}{1536}\,\frac{1}{\varepsilon^7} + \ldots\ldots$$

$$4\,A_2 = \frac{1}{128}\,\frac{1}{\varepsilon^5} + \frac{15}{2048}\,\frac{1}{\varepsilon^7} + \ldots\ldots$$

$$6\,A_3 = \frac{5}{4096}\,\frac{1}{\varepsilon^7} + \ldots\ldots$$

4) Für die Cycloide hat man, wenn man den Ursprung im Scheitel annimmt und die Abscissen auf der Axe der Curve zählt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,a - x}{\sqrt{2\,ax - x^2}},\quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2\,a}{x},\quad d\,s = \sqrt{2\,a}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

die Länge des cycloidischen Bogens vom Scheitel bis zu jenem Punkte der Curve, dessen Abscisse $x$ ist, wird daher ausgedrückt durch:

$$s = 2\,\sqrt{2\,ax}.$$

Für $x = 2\,a$ ergibt sich hieraus die Länge der halben Cycloide $= 4\,a$; die Länge der ganzen Cycloide beträgt daher das achtfache des Halbmessers des erzeugenden Kreises.

5) Die Gleichung der Kettenlinie (Fig. 56) ist:

$$y = \frac{1}{2}\,a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

wobei $a = AO$ die Ordinate des tiefsten Punktes bedeutet, durch welchen die positive Halbaxe der $y$ gelegt ist. Man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2,$$

folglich, wenn der Bogen vom tiefsten Punkte $A$ der Curve gezählt wird;

$$s = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{1}{2}\,a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Hieraus folgt $s = a\,\frac{dy}{dx}$, d. h. der Bogen ist proportional der trigono-

metrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente am Endpunkte desselben mit der Abscissenaxe bildet. Auch hat man:

$$s^2 = \frac{1}{4}a^2\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right) = \frac{1}{4}a^2\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) - a^2$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 - a^2,$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gleichung der Curve:

$$s = \sqrt{y^2 - a^2};$$

der vom tiefsten Punkte an gezählte Bogen ist daher gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen andere Kathete $a$, und dessen Hypotenuse die Ordinate $y$ des Endpunktes ist. Beschreibt man also mit dem Halbmesser $OQ = y$ aus $O$ einen Kreis, welcher die durch $A$ parallel zur Axe der $x$ gezogene Gerade in $E$ schneidet, so ist der Bogen $AM = AE$.

Sind $B$, $D$ zwei Punkte der Kettenlinie, in einer zur Axe der $x$ parallelen (horizontalen) Geraden, die Aufhängepunkte der Kette, so lässt sich leicht eine Relation ableiten zwischen der Spannweite $BD = 2b$, der Kettenlänge $BAD = 2L$ und der Pfeilhöhe $AC = f$.

Durch Auflösung der Gleichung der Curve nach $x$ ergibt sich nämlich:

$$x = a\,l\,\frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a} = a\,l\,\frac{y \pm s}{a},$$

wo, wie man sich leicht überzeugt, die beiden Werthe numerisch gleich sind und nur dem Zeichen nach sich von einander unterscheiden. Für $x = b$ wird nun $x = a + f$, $s = L$, somit

$$b = a\,l\,\frac{a + f + L}{a}.$$

Aus der Gleichung $s^2 = y^2 - a^2 = (y - a)(y + a)$ folgt aber $L^2 = f(f + 2a)$, hieraus

$$a = \frac{L^2 - f^2}{2f},$$

welcher Werth, in die letzte Gleichung substituirt, die gesuchte Relation:

$$b = \frac{L^2 - f^2}{2f}\,l\,\frac{L + f}{L - f}$$

darbietet.

6) Die Evolute der gemeinen Parabel (Fig. 36); ihre Gleichung ist, wenn die Abscissen von der Spitze $A$ aus gezählt werden [§. 375]:

$$y^2 = \frac{16}{27p}\,x^3;$$

hieraus erhält man für die Länge des in der Spitze beginnenden Bogens:

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{4}{3p}x}=\frac{p}{2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{p}{2}.$$

7) Die Evolute einer Ellipse, deren Halbaxen $a$, $b$ sind, wird, wenn wir der Kürze wegen

$$m=\frac{a^2-b^2}{a},\ n=\frac{a^2-b^2}{b}$$

setzen, durch die Gleichung [§. 375]:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{3}{2}}=1$$

dargestellt. Man findet hieraus für die Bogenlänge den Ausdruck:

$$s=\int dx\sqrt{1-\frac{n^2}{m^2}+\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{x}{m}\right)^{-\frac{2}{3}}}.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen wird durch die Substitution [vergl. §. 430]:

$$1-\frac{n^2}{m^2}+\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{x}{m}\right)^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{2}{3}}z^2$$

rational, und man erhält:

$$s=\frac{1}{m^2-n^2}\left\{(m^2-n^2)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}}+n^2\right\}^{\frac{3}{2}}+C.$$

Soll der Bogen von der in der kleinen Axe der Ellipse gelegenen Spitze der Evolute an gezählt werden, so muss das Integral für $x=0$ verschwinden, welche Bedingung den Werth der Constante $C=-\frac{n^3}{m^2-n^2}$ darbietet.

Für $x=0$ folgt aus der Gleichung der Evolute $x=m$; der vierte Theil der Evolute ist daher

$$=\frac{m^3-n^3}{m^2-n^2}=\frac{a^3-b^3}{ab}=\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a},$$

d. i. gleich der Differenz der Krümmungshalbmesser der Ellipse in den Endpunkten der grossen und kleinen Axe, wie es der Natur der Evolute entspricht.

Man wird leicht bemerken, dass alle Curven, welche Evoluten algebraischer Curven sind, rectificabel sein müssen, d. h. dass die Länge ihres Bogens durch eine algebraische Funktion der Coordinaten ihrer Endpunkte ausgedrückt werden kann; denn die Länge eines beliebigen Bogenstückes der Evolute ist nichts anderes, als die Differenz der Krümmungshalbmesser der Evolvente, welche die Evolute in den Endpunkten des Bogens berühren, und deren Ausdruck — mittelst

der Gleichungen (4) u. (5) in §. 370 — bei algebraischen Curven nothwendig algebraisch sein muss.

8) Die archimedische Spirale; ihre Gleichung ist $r = a\theta$, folglich mit Benützung der Gleichung (2) §. 459:

$$s = a\int d\theta\sqrt{1+\theta^2},$$

d. i.

$$s = \frac{1}{2}a\theta\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}al(\theta + \sqrt{1+\theta^2}),$$

wenn der Bogen vom Anfangspunkte der Spirale, dem Pole, für welcher $\theta = 0$ ist, gezählt wird.

9) Die Polargleichung der Lemniscate [§. 235] ist:

$$r = e\sqrt{2\cos 2\theta},$$

wenn $e = OF = OF'$ (Fig. 57), $\theta = \angle MOF$ ist; hieraus folgt:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2e\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}},\quad r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2e^2}{\cos 2\theta},$$

somit

$$s = e\sqrt{2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = e\sqrt{2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin\theta^2}}$$

als Ausdruck des Bogens $AM$ vom Endpunkte $A$ der Axe an gezählt. Die Entwickelung dieses Integrals erheischt eine Reihenentwickelung, ähnlich derjenigen, welche bei der Rectifikation der Ellipse und Hyperbel in Anwendung gebracht wurde.

**460.** Für eine Curve im Raume wird das Differential des Bogens ausgedrückt durch die Formel [§. 385]:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}},$$

wo die Ausdrücke der Differenzialien aus den Gleichungen der Curve zu entnehmen sind.

Beisp. 1) Die auf einem geraden Kreiscylinder beschriebene Schraubenlinie [§. 281] wird durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

dargestellt, wo $r$ der Halbmesser des Cylinders und $\alpha$ der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist. Aus obigen Gleichungen folgt:

$$dx = -r\sin\varphi\,d\varphi,\ dy = r\cos\varphi\,d\varphi,\ dz = r\,\mathrm{tg}\alpha\,d\varphi,$$

womit sich $ds = r\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\alpha^2}\,d\varphi = r\sec\alpha\,d\varphi$, und

$$s = r\sec\alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = r\sec\alpha\,(\varphi - \varphi_0) = \frac{z - z_0}{\sin\alpha}$$

ergibt, als Länge des Bogens, dessen Endpunkten die Coordinaten $z_0$ und $z$ entsprechen; ein leicht vorauszusehendes Resultat, wenn man

erwägt, dass sich die Schraubenlinie bei der Abwickelung der Cylinderfläche in eine gerade Linie verwandelt.

2) Betrachten wir noch als letztes Beispiel die sphärische Loxodrome, d. i. jene auf einer Kugelfläche verzeichnete Curve, welche sämmtliche Meridiane unter gleichem Winkel schneidet. Sei (Fig. 58) $ABA'P$ die Kugelfläche, $P$ der Pol, $ABA'$ der Aequator, $BMP$ irgend ein Meridian, welcher von der Loxodrome $DMm$ unter dem constanten Winkel $\alpha$ geschnitten wird; $\angle BOM = \text{arc}\, BM = \varphi$, endlich sei $\angle AOB =$ dem sphärischen Winkel $APB = \lambda$ der Winkel, welchen der Meridian des Punktes $M$ mit irgend einem festen Meridiane $AP$ einschliesst. In der Anwendung auf die als kugelförmig betrachtete Erdoberfläche sind, wie man leicht sieht, $\varphi$ und $\lambda$ die geographische Breite und Länge des Punktes $M$.

Geht man nun von dem Punkte $M$ der Loxodrome zu dem unendlich nahe liegenden Punkte $m$ über, so bildet der durch letzteren geführte Meridianbogen $mn$ mit dem Bogen $Mn$ des durch $M$ gelegten Parallels und dem Curvenelemente $Mm$ das Dreieck $Mmn$, in welchem $Mn = mn \,.\, \text{tg}\, \alpha$. Es ist aber $mn = r\, d\varphi$, wenn $r$ der Halbmesser der Kugel, und (da $r \cos\varphi$ der Halbmesser des Parallels) $Mn = r \cos\varphi \,.\, d\lambda$; man hat somit $r \cos\varphi\, d\lambda = r\, \text{tg}\, \alpha\, d\varphi$, oder

$$d\lambda = \text{tg}\, \alpha \frac{d\varphi}{\cos\varphi}; \qquad (1)$$

durch Integration dieser Gleichung erhält man:

$$\lambda = C + \text{tg}\, \alpha \,.\, l\, \text{tg} \left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right) \qquad (2)$$

als Gleichung der Loxodrome, in Funktion der sphärischen Coordinaten $\varphi$ und $\lambda$ ausgedrückt. Die Constante $C$ bestimmt sich im Allgemeinen durch die Bedingung, dass die Loxodrome durch einen bestimmten Punkt $(\varphi_0, \lambda_0)$ gehen soll. Zählt man aber die Längen von jenem Punkte $D$ des Aequators, in welchem dieser von der Loxodrome geschnitten wird, so ist $\lambda = 0$ für $\varphi = 0$, somit auch $C = 0$. Sind $\lambda_0$, $\varphi_0$ und $\lambda_1$, $\varphi_1$ Länge und Breite zweier Punkte auf der Kugel, so findet man leicht aus obiger Gleichung für den Winkel $\alpha$, unter welchem die durch beide Punkte gehende Loxodrome die Meridiane schneidet, den Ausdruck:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{l\, \text{tg}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1\right) - l\, \text{tg}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_0\right)}. \qquad (3)$$

Zum Behufe der Rectifikation beziehen wir die Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen $x$- und $y$-Axe sich in

der Ebene des Aequators befinden und zwar erstere nach jenem Punkte dieses grössten Kreises gerichtet, von welchem aus die Längen $\lambda$ gezählt werden. Unter dieser Voraussetzung ist, wie man leicht findet:

$$x = r \cos\varphi \cos\lambda,\ y = r \cos\varphi \sin\lambda,\ z = r \sin\varphi.$$

Differenzirt man diese Gleichungen nach $\varphi$ und $\lambda$, und substituirt für $d\lambda$ seinen Werth aus der Differenzialgleichung (1) der Loxodrome, nämlich $d\lambda = \operatorname{tg}\alpha \sec\varphi\, d\varphi$, so kommt:

$$\begin{aligned} dx &= -r(\sin\varphi\cos\lambda + \operatorname{tg}\alpha\sin\lambda)\, d\varphi, \\ dy &= -r(\sin\varphi\sin\lambda - \operatorname{tg}\alpha\cos\lambda)\, d\varphi, \\ dz &= r\cos\varphi\, d\varphi, \end{aligned}$$

und hiemit:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2(1 + \operatorname{tg}\alpha^2)\, d\varphi^2 = r^2 \sec\alpha^2\, d\varphi^2;$$

die Länge des Bogens wird daher:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r\, d\varphi}{\cos\alpha} = \frac{r(\varphi - \varphi_0)}{\cos\alpha},$$

wo $\varphi_0$ die Breite des Anfangspunktes des Bogens. Die loxodromische Entfernung zweier Punkte $\lambda_0$, $\varphi_0$ und $\lambda_1$, $\varphi_1$ wird daher durch den Ausdruck $r(\varphi_1 - \varphi_0)\sec\alpha$ gegeben, wo der Winkel $\alpha$ aus Gl. (3) zu berechnen ist.

## III. Complanation der Flächen.

**461.** Die Bestimmung des Flächeninhaltes einer krummen Fläche, oder eines Theiles derselben, bildet die Aufgabe der Complanation der Flächen.

Betrachten wir zunächst die Rotationsflächen, als den einfachsten Fall. Sei $AM$ (Fig. 59) eine in der Ebene der $xz$ liegende ebene Curve, deren Gleichung $z = f(x)$ sein möge und welche durch Umdrehung um die Axe der $x$ die Rotationsfläche erzeugt. $A$, $M$ seien zwei Punkte der Curve; $OB = x_0$, $OP = x$, und $F$ der Inhalt des von dem Bogen $AM = s$ beschriebenen Theils der Fläche. Lassen wir $OP = x$ um $Pp = \Delta x$ zunehmen, so wächst $s$ um $Mm = \Delta s$; die Sehne dieses Bogens wird ausgedrückt durch $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$, und diese beschreibt bei der Drehung um $OX$ die Oberfläche eines abgestutzten Kegels, deren Ausdruck

$$2\pi\left(z + \frac{1}{2}\Delta z\right)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$$

ist, und welcher sich die von dem Bogen $\Delta s$ beschriebene Fläche

$\varDelta F$ offenbar um so mehr nähert, je kleiner $\varDelta z$ genommen wird. Hieraus folgt:

$$\lim \frac{\varDelta F}{2\pi\left(z+\frac{1}{2}\varDelta z\right)\sqrt{\varDelta x^2+\varDelta z^2}}=1,$$

somit, wenn wir zu den Differenzialien übergehen:

$$dF=2\pi z dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=2\pi z ds.$$

und

$$F=2\pi\int_{x_0}^{x} z dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=2\pi\int_{x_0}^{x} z ds. \qquad (1)$$

Wäre die erzeugende Curve durch Polarcoordinaten ausgedrückt, deren Pol im Ursprunge, deren Polaraxe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, so hätte man $x=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ zu setzen, wodurch

$$F=2\pi\int_{\theta_0}^{\theta} r\sin\theta\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}\;d\theta$$

wird.

Beisp. 1) Das gestreckte Rotationsellipsoid wird durch die Umdrehung einer Ellipse um die grosse Axe $=2a$ erzeugt. Die Gleichung der Ellipse ist in diesem Falle:

$$z=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

woraus

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad 1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}.$$

folgt, wo $a^2\varepsilon^2=a^2-b^2$. Hiemit ergibt sich:

$$F=2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}=2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}\int_0^x dx\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2},$$

d. i., wenn wir die Gl. (7) §. 431, und Gl. (8) §. 428 in Anwendung bringen:

$$F=\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right),$$

als Ausdruck für die Oberfläche der Zone, welche von der $yz$-Ebene und einer im Abstande $x$ zu ihr parallel gelegten Ebene begrenzt ist.

Setzt man $x=a$, so erhält man hieraus für die halbe Oberfläche $\frac{1}{2}O$ des gestreckten Rotationsellipsoides:

$$\frac{1}{2}O=\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)=\pi b\left(b+a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Für $\varepsilon=0$ geht das Ellipsoid in eine Kugel vom Halbmesser $a$ über; da

nun, wie man sich leicht überzeugt, $\lim \frac{\arcsin \frac{\varepsilon x}{a}}{\varepsilon} = \frac{x}{a}$ ist für $\varepsilon = 0$, so erhält man aus obiger Formel für den Inhalt einer Kugelzone von der Höhe $x$ den Ausdruck: $F = 2\pi a x$, und hieraus für $x = a$ die Oberfläche der halben Kugel $= 2\pi a^2$.

2) Das abgeplattete Rotationsellipsoid (Sphäroid) entsteht durch Umdrehung der Ellipse um ihre kleine Axe $b$; die Gleichung derselben wird in diesem Falle

$$z = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2},$$

womit sich für die von der Ebene der $yz$ an gezählte sphäroidische Zone der Ausdruck

$$F = \frac{2\pi}{1-\varepsilon^2} \int_0^x dx \sqrt{a^2(1-\varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2 x^2}$$

ergibt. Das Integral findet man mit Hülfe der Formeln (7), §. 431 und (5), §. 428; da dasselbe für $x = 0$ verschwinden soll, so wird

$$F = 2\pi \left\{ \frac{x\sqrt{a^2(1-\varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2 x^2}}{2(1-\varepsilon^2)} + \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{2\varepsilon}\, l\, \frac{\varepsilon x + \sqrt{a^2(1-\varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2 x^2}}{a(1-\varepsilon^2)} \right\}.$$

Für $x = b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ erhält man hieraus die halbe Oberfläche $\frac{1}{2} O$ des abgeplatteten Ellipsoides:

$$\frac{1}{2} O = a^2 \pi \left(1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\, l\, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Wir wollen diese Ausdrücke noch in einer anderen Form entwickeln. Es sei $\varphi$ der Winkel, welchen die Normale im Punkte $x, z$ der erzeugenden Ellipse mit der grossen Axe derselben, also hier mit der Axe der $z$ einschliesst, so ist bekanntlich $\frac{dz}{dx} = -\operatorname{tg} \varphi$, somit, mit Rücksicht auf die obige Gleichung der Ellipse:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 x}{b^2 z}.$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit jener der Ellipse liefert, durch successive Elimination von $z$ und $x$, die Ausdrücke:

$$x = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2}}, \quad z = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}.$$

Aus ersterem folgt durch Differenziation:

$$dx = \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{3/2}};$$

endlich ist:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}=\sec\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (1) verwandelt sich dieselbe in:

$$F=2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\int_0^\varphi\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}.$$

Zum Behufe der Integration setze man $\varepsilon\sin\varphi=u$, so wird:

$$\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}=\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{du}{(1-u^2)^2}=\frac{1}{\varepsilon}\int\left[\frac{1+u^2}{2(1-u^2)^2}+\frac{1}{2(1-u^2)}\right]du$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{u}{2(1-u^2)^2}+\frac{1}{4}l\frac{1+u}{1-u}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}+\frac{1}{2\varepsilon}l\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right\},$$

somit:

$$F=\pi a^2(1-\varepsilon^2)\left\{\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}+\frac{1}{2\varepsilon}l\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right\}.$$

Die Erde hat bekanntlich die Gestalt eines Sphäroids und in Anwendung auf dieselbe ist $\varphi$ die geographische Breite des Punktes $x, z$; die Formel gibt daher die Oberfläche der Zone vom Aequator bis zu jenem Parallel, dessen Breite $\varphi$ ist.

Entwickelt man jeden der beiden Ausdrücke in den Klammern in eine Reihe, den ersteren mit Hülfe der Binomialformel, den letzteren nach Gl. (6) §. 64, so findet man:

$$F=2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\left\{\sin\varphi+\frac{2}{3}\varepsilon^2\sin\varphi^3+\frac{3}{5}\varepsilon^4\sin\varphi^5+\frac{4}{7}\varepsilon^6\sin\varphi^7+\cdots\right\}.$$

3) Ein Kreis vom Halbmesser $r$ drehe sich um eine in seiner Ebene, aber ausserhalb des Kreises liegende Gerade $XX'$ (Fig. 60); man bestimme die Oberfläche der erzeugten ringförmigen Fläche.

Nimmt man die $XX'$ als Axe der $x$, die durch den Mittelpunkt des Kreises senkrecht auf $XX'$ gezogene Gerade als Axe der $z$, und setzt $OC=a$, so ist die Gleichung des Kreises:

$$z=a\pm\sqrt{r^2-x^2},$$

wo das obere Zeichen dem Halbkreise $ADB$, das untere dem Halbkreise $AEB$ entspricht. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{dz}{dx}=\mp\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

man hat somit für den Inhalt der von dem oberen Halbkreise beschriebenen Fläche:

$$F_1=2\pi r\int_{-r}^{+r}\left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

und für den Inhalt der von dem unteren Halbkreise beschriebenen Fläche

$$F_2 = 2\pi r \int_{-r}^{+r} \left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

die Summe ist:

$$F = 4\pi a r \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi^2 a r.$$

Die ganze Oberfläche ist somit gleich dem Producte der beiden Kreisumfänge, deren Halbmesser $a$ und $r$ sind.

**462.** Beschäftigen wir uns nunmehr mit der Aufgabe der Complanation der Flächen in ihrer allgemeinsten Form. Ist $z = f(x, y)$ die Gleichung der krummen Fläche und $\varphi(x, y) = 0$ die Gleichung eines auf der Ebene der $xy$ senkrechten Cylinders, welcher die Fläche in der Curve $ABCD$ (Fig. 61), die Ebene der $xy$ in der Curve $abcd$ schneidet, so handelt es sich um die Ermittelung des auf der krummen Fläche von der Curve $ABCD$ begrenzten Flächeninhaltes. Es sei $M$ ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, dessen Coordinaten $x, y, z$, und $m$ seine Projection auf die Ebene der $xy$. Gehen wir von dem Punkte $M$ zu einem unendlich nahe gelegenen Punkte $P$ über, dessen Projection auf die $xy$-Ebene $p$ ist, und sind $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ die Coordinaten desselben, so erzeugt, wenn wir durch jeden der Punkte $m$ und $p$ zwei zu den Ebenen der $xz$ und $yz$ parallele Ebenen legen, der Durchschnitt dieser vier Ebenen mit der $xy$-Ebene das Rechteck $mnpq = \Delta x \Delta y$, mit der krummen Fläche aber das Flächenelement $MNPQ = \Delta F$, sowie endlich der Durchschnitt derselben vier Ebenen mit der die krumme Fläche im Punkte $M$ berührenden Ebene das Viereck $MN'P'Q' = \omega$ bildet. Das Rechteck $mnpq = \Delta x \Delta y$ ist aber die Projection des Viereckes $\omega$ auf die Ebene der $xy$, folglich, wenn wir mit $\gamma$ den Neigungswinkel der tangirenden Ebene gegen die $xy$-Ebene bezeichnen:

$$\Delta x \Delta y = \omega \cos\gamma, \text{ oder } \omega = \frac{\Delta x \Delta y}{\cos\gamma}.$$

Offenbar nähert sich nun das Flächenelement $\Delta F$ dem Vierecke $\omega$ um so mehr, je kleiner wir $\Delta x$ und $\Delta y$ nehmen, so dass wir, zu den Differenzialien übergehend,

$$\frac{dx\, dy}{\cos\gamma}$$

als Ausdruck des Flächendifferenzials zu nehmen haben. Zufolge §. 395, Gl. (1), ist aber

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

wenn $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$ die partiellen Differenzialquotienten von $z$ nach $x$ und $y$, gezogen aus der Gleichung der Fläche, bedeuten; man hat somit für das Flächendifferenzial den Ausdruck:

$$dx dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Integriren wir nun diesen Ausdruck etwa zuerst nach $y$, dabei $x$ als constant betrachtend, so heisst diess bekanntlich nichts anderes, als alle Flächenelemente summiren, welchen dasselbe $x$ zukommt, wodurch wir offenbar zu dem Inhalte des unendlich schmalen, zur $yz$-Ebene parallelen Streifens $\alpha\beta\gamma\delta$ gelangen, welcher somit durch den Ausdruck:

$$dF = dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

dargestellt wird, wobei, wie leicht ersichtlich, die Integrationsgrenzen $y_0, y_1$ im Allgemeinen Funktionen von $x$ sein werden, und aus der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ sich ergeben. Eine zweite nach $x$ ausgeführte Integration summirt alle diese unendlich vielen zwischen den gegebenen Grenzen $x = x_0$ und $x = x_1$ liegenden Flächenstreifen, so dass endlich:

$$F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \qquad (m)$$

als Ausdruck für die gesuchte Fläche erhalten wird.

Aus dieser allgemeinen Formel würde man ohne Schwierigkeit die im vorigen §. entwickelte Formel für Rotationsflächen ableiten können. Die Gleichung einer solchen Fläche, die Axe der $x$ als Umdrehungsaxe vorausgesetzt, ist nämlich $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$, woraus:

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{z}, \quad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

$$p^2 + q^2 + 1 = \frac{f(x)^2 \, [1 + f'(x)^2]}{f(x)^2 - y^2}$$

folgt. Hiemit wird

$$F = \int_{x_0}^{x_1} dx \, f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\frac{dy}{f(x)}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{f(x)^2}}}.$$

Das allgemeine auf $y$ sich beziehende Integral ist arc sin $\frac{y}{f(x)}$; will man nun die halbe über der $xy$-Ebene stehende Fläche, so ergeben sich die Grenzen $y_0, y_1$ aus der Gleichung $y = \pm f(x)$, welche für $z = 0$ aus der Gleichung der Rotationsfläche hervorgeht; es ist daher

$y_0 = -f(x)$, $y_1 = +f(x)$, somit $\pi$ der Werth dieses Integrals, und demnach der Inhalt der ganzen Rotationsfläche.

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} dx\, f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

welcher Ausdruck mit dem im vorigen §. erhaltenen gleichbedeutend ist.

Als einfaches Beispiel für die Anwendung der Formel ($m$) diene ein gerader Kegel mit kreisförmiger Basis, dessen Axe mit der Axe der $z$ zusammenfällt; seine Gleichung ist:

$$r^2 (h - z)^2 = h^2 (x^2 + y^2),$$

wenn $r$ den Halbmesser des kreisförmigen Durchschnitts des Kegels mit der Ebene der $xy$, und $h$ die Höhe des Kegels, d. i. den Abstand des Scheitels von der $xy$-Ebene bezeichnet. Hieraus folgt:

$$p = \frac{dz}{dx} = -\frac{hx}{r\sqrt{x^2 + y^2}};\ q = \frac{dz}{dy} = -\frac{hy}{r\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r},$$

$$F = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \int_{x_0}^{x_1} dx\, (y_1 - y_0).$$

Sucht man nun die Oberfläche des über der Ebene der $xy$ liegenden Theiles der Kegelfläche, so ergeben sich die Werthe der Grenzen $y_0$ und $y_1$ aus der Gleichung ihres Durchschnittes mit der besagten Ebene: $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, nämlich $y_0 = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $y_1 = +\sqrt{r^2 - x^2}$, wodurch

$$F = \frac{2\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{r^2 - x^2}$$

wird. Integrirt man, und nimmt das Integral von $x_0 = 0$ und $x_1 = x$, so kommt:

$$F = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \left( x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right)$$

als Ausdruck jenes Theiles der Kegelfläche, welcher zwischen der Ebene der $yz$ und einer zu dieser im Abstande $= x$ parallel gelegten Ebene enthalten ist. Setzt man daher $x = r$, und nimmt den Ausdruck doppelt, so erhält man: $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ als Inhalt der ganzen Kegelfläche.

**463.** Die allgemeine Auflösung der Aufgabe der Complanation der Flächen erheischt, wie aus dem vorhergehenden §. erhellt, die Ausmittelung eines Doppelintegrals, welche häufig mit Schwierigkeiten verknüpft ist; man sucht in solchem Falle das Integral auf ein anderes

zurückzuführen, durch Einführung neuer Variablen, die man so wählen kann, dass die Integration dadurch erleichtert wird. Das Verfahren hiebei ist im Allgemeinen folgendes.

Es seien in dem Doppelintegrale:

$$J = \int\int U dx dy = \int\int f(x, y) dx dy$$

an die Stelle von $x$ und $y$ zwei neue Veränderliche $\xi$, $\eta$ zu substituiren, welche mit den ursprünglichen durch die Gleichungen

$$x = \varphi(\xi, \eta),\ y = \varphi_1(\xi, \eta) \qquad (1)$$

verknüpft sind, so hat man zuvörderst durch Substitution derselben in die Funktion $f(x, y)$:

$$U = f(x, y) = F(\xi, \eta),$$

und es handelt sich nur noch darum, das Product $dxdy$ durch die neuen Veränderlichen auszudrücken.

Gesetzt nun, man wolle zuerst nach $y$ integriren, so hat man hiebei $x$ als constant zu betrachten, und erhält, unter dieser Voraussetzung, durch Differenziation der Gleichungen (1):

$$0 = P d\xi + Q d\eta,\ dy = P_1 d\xi + Q_1 d\eta,$$

wo $P$, $Q$, $P_1$, $Q_1$ Funktionen von $\xi$ und $\eta$ sind. Es ist willkürlich, welche der beiden Veränderlichen $\xi$, $\eta$, man an die Stelle von $y$ einführen will; wählt man hiefür $\eta$, so ergibt sich durch Elimination von $d\xi$ aus den beiden letzten Gleichungen:

$$dy = \frac{P Q_1 - P_1 Q}{P} d\eta = \frac{\Omega}{P} d\eta,$$

wenn der Kürze wegen

$$\Omega = P Q_1 - P_1 Q \qquad (2)$$

gesetzt wird.

Durch die Substitution dieses Werthes verwandelt sich das vorgelegte Integral in folgendes:

$$J = \int\int U \frac{\Omega}{P} d\eta dx,$$

und erscheint nunmehr, wenn man sich $y$ und $\xi$ mittelst obiger Gleichungen eliminirt denkt, als Funktion von $\eta$ und $x$, welche beide Veränderliche als von einander unabhängig betrachtet werden müssen. In Folge dieses letzteren Umstandes liefert nun die erste der Gleichungen (1) durch Differenziation für $dx$ den Werth:

$$dx = P d\xi,$$

und man erhält schliesslich durch Substitution desselben in die letzte Gleichung:

$$J = \int\int F(\xi, \eta)\, \Omega d\xi d\eta.$$

Wir würden zu demselben Resultate gelangt sein, wenn wir oben $\xi$, statt $\eta$, an die Stelle von $y$ hätten treten lassen, oder wenn wir die Integration zuerst nach $x$ statt nach $y$, vorgenommen hätten. Die Grenzen, innerhalb welcher das neue Integral zu nehmen ist, müssen in jedem speciellen Falle besonders ermittelt werden.

**464.** Wir wollen die soeben vorgetragene Transformation dazu benützen, um die allgemeine Complanationsformel [Gl. ($m$), §. 462]:

$$F = \int\int dxdy\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

auf Polarcoordinaten zu übertragen. Als solche wählen wir den Radiusvector $r$ eines Punktes der Fläche $z = f(x, y)$, den Neigungswinkel $\theta$ desselben gegen die Axe der $x$, endlich den Winkel $\omega$, unter welchem die durch die genannte Axe und den Radiusvector gelegte Ebene der $xy$-Ebene begegnet. Diess vorausgesetzt, hat man:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\cos\omega,\ z = r\sin\theta\sin\omega.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Funktion $U = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$ erhält man, $\theta$ und $\omega$ als die unabhängig Veränderlichen betrachtend, auf dem im §. 334 betretenen Wege:

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]\sin\theta^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\theta\sin\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos\omega}.$$

Die Differenziation der beiden ersten der obigen Gleichungen ergibt ferner:

$$dx = \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)d\theta + \frac{dr}{d\omega}\cos\theta\, d\omega,$$

$$dy = \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\cos\omega\, d\theta + \left(\frac{dr}{d\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)\sin\theta\, d\omega;$$

es ist daher, nach den Bezeichnungen des vorhergehenden §:

$$P = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\quad Q = \frac{dr}{d\omega}\cos\theta,$$

$$P_1 = \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\cos\omega,\quad Q_1 = \left(\frac{dr}{d\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)\sin\theta;$$

somit

$$\Omega = -r\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\theta\sin\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos\omega\right\}.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes, in Verbindung mit dem obigen von $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$, in die Gleichung (2) des vorhergehenden §. folgt sofort:

$$F = \int\int r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin\theta^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\, d\theta\, d\omega$$

als Ausdruck des Flächeninhaltes in Polarcoordinaten, dessen man sich bedienen kann, wenn die Polargleichung der Fläche einfacher ist, als bei rechtwinkligen Coordinaten.

Zu demselben Resultate führt auch eine einfache geometrische Betrachtung. Es sei (Fig. 62) $M$ ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, welchem, wie oben, die Polarcoordinaten $r$, $\theta$, $\omega$ entsprechen. Legen wir durch die Axe $OX$ zwei Ebenen, welche gegen die Ebene $XOY$ unter den Winkeln $\omega$ und $\omega + d\omega$ geneigt sind; denken wir uns ferner um $OX$ als Axe zwei Kreiskegel beschrieben, welche ihren Mittelpunkt in $O$ haben, und deren erzeugende Geraden mit der $OX$ beziehungsweise die Winkel $\theta$ und $\theta + d\theta$ einschliessen; beschreiben wir endlich aus $O$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $OM = r$ eine Kugelfläche, so wird von den besagten beiden Ebenen und den zwei Kegelflächen auf der gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ das Flächenelement $MNPQ = dF$, auf der Kugel aber das Flächenelement $Mnpq = dK$ ausgeschnitten. Beide können als Rechtecke angesehen werden und man kann offenbar $dK$ als die Projection von $dF$ auf die Kugelfläche betrachten, so dass also

$$dF = \frac{dK}{\cos\lambda}$$

ist, wenn $\lambda$ den Neigungswinkel beider Flächenelemente, d. i. den Winkel bezeichnet, welchen die Normale der Fläche im Punkte $M$ mit dem Radiusvector $OM$ einschliesst. Nun ist $dK = Mn \,.\, Mq$; $Mn = r\, d\theta$; $Mq = MK \,.\, d\omega = r \sin\theta\, d\omega$, also das Differenzial der Kugelfläche:

$$dK = r^2 \sin\theta\, d\theta d\omega.$$

Bezeichnet man ferner mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Winkel, welche beziehungsweise der Radiusvector $OM$ und die erwähnte Normale mit den Axen der $x$, $y$, $z$ einschliessen, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \cos\theta,\ \cos\beta = \frac{y}{r} = \sin\theta\cos\omega,\ \cos\gamma = \frac{z}{r} = \sin\theta\sin\omega;$$

$$\cos\alpha' = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\beta' = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\gamma' = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

wo $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$; folglich

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$
$$= \frac{p\cos\theta + q\sin\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Nach Einführung der in §. 334 für $p$, $q$ und $\sqrt{p^2+q^2+1}$ entwickelten Ausdrücke in Funktion von $r$, $\theta$ und $\omega$ verwandelt sich dieser Ausdruck nach leichter Reduktion in:

$$\cos\lambda = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]\sin\theta^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}},$$

und man erhält hiemit:

$$dF = rd\theta d\omega\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]\sin\theta^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2},$$

übereinstimmend mit dem Obigen.

**465.** Betrachten wir noch als Beispiel den elliptischen Kegel, welcher durch die Gleichung

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

dargestellt wird, wenn wir die Spitze im Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten, als Basis desselben eine Ellipse $AB$ (Fig. 63) annehmen, deren Ebene, im Abstande $OC = c$ parallel liegt zur Ebene der $xy$, und deren Halbaxen $CA = a$, $CB = b$ beziehungsweise in der $xz$- und $yz$-Ebene sich befinden. Setzen wir der Kürze halber:

$$x = a\xi,\ y = b\eta,\ z = c\zeta,$$

so verwandelt sich obige Gleichung in die einfachere

$$\zeta = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

und es wird:

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\quad q = \frac{dz}{dy} = \frac{c}{b}\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

welche Werthe in die Gleichung ($m$), §. 462 substituirt, für den vierten Theil $OAB$ der ganzen Mantelfläche den Ausdruck:

$$F = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi d\eta\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2} + a^2c^2\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}$$

ergeben. Was die angesetzten Grenzen betrifft, so beachte man, dass die Projection der die in Rede stehende Fläche begrenzenden Ellipse $AB$ auf die Ebene der $xy$ die Ellipse $ab$ ist, welcher die Gleichung $y = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ entspricht. Man hat daher von $x=0$ bis $x=a$,

und von $y = 0$ bis $y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ zu integriren, welchen Grenzwerthen die Werthe $\xi = 0$, $\xi = 1$ und $\eta = 0$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$ entsprechen.

Führen wir nun mittelst der Substitution

$$\xi = r \cos \varphi, \; \eta = r \sin \varphi$$

die zwei neuen Veränderlichen $r$ und $\varphi$ ein, so wird

$$d\xi = \cos \varphi \, dr - r \sin \varphi \, d\varphi, \; d\eta = \sin \varphi \, dr + r \cos \varphi \, d\varphi,$$

somit, im Sinne des §. 463:

$$\Omega = r \cos \varphi^2 + r \sin \varphi^2 = r,$$

und das obige Integral verwandelt sich in

$$F = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 \cos \varphi^2 + a^2c^2 \sin \varphi^2} \; r dr d\varphi.$$

Die hier angesetzten Grenzen ergeben sich leicht, wenn man erwägt, dass das vorhergehende Integral, zufolge seiner Grenzen, auf alle Punkte sich erstreckt, welche innerhalb eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisquadranten liegen, welcher Bedingung offenbar genügt wird, wenn man $r$ von 0 bis 1 und $\varphi$ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gehen lässt.

Die Integration nach $r$ ist nun sogleich ausführbar; sie ergibt:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 \cos \varphi^2 + a^2c^2 \sin \varphi^2},$$

oder, wenn man unter dem Wurzelzeichen $a^2b^2 (\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2)$ statt $a^2b^2$ schreibt, und

$$a^2 + c^2 = m^2a^2, \; b^2 + c^2 = n^2b^2,$$

setzt:

$$F = \frac{1}{2} ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{m^2 \cos \varphi^2 + n^2 \sin \varphi^2}.$$

Man kann diesen Ausdruck auch in folgender Form schreiben:

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \, . \, m \sqrt{ab} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2} \sin \varphi^2};$$

lässt man nun $A = m\sqrt{ab}$, $B = n\sqrt{ab}$ die Halbaxen einer Ellipse sein, so ist $E^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2}$ die Excentricität dieser Ellipse, und es wird durch Einführung dieser Grössen:

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \, . \, A \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - E^2 \sin \varphi^2},$$

worin sich der Satz ausspricht, dass die Mantelfläche des elliptischen

Kegels gleich jener eines Cylinders ist, dessen Höhe $= \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, und dessen Basis eine mit den Halbaxen $A = m\sqrt{ab}$ und $B = n\sqrt{ab}$ verzeichnete Ellipse ist.

## IV. Cubatur der Körper.

**466.** Betrachten wir auch hier zunächst einige einfachere Fälle, in welchen die Berechnung des Volums eines von einer krummen Fläche begrenzten Raumes auf ein einfaches Integral führt.

Diess ist der Fall, wenn sich die Gestalt eines zu einer bestimmten Ebene parallelen Schnittes des Volums als Funktion des Abstandes von dieser Ebene ausdrücken lässt.

In der That, es seien $V$ das von irgend einer krummen Fläche, und zwei zur $yz$-Ebene parallelen Ebenen $x = x_0$, $x = x$ begrenzte Volum, ferner $F(x)$ und $F(x) + \delta$ die Flächeninhalte zweier senkrecht auf die Axe der $x$, in den Abständen $x$ und $x + \Delta x$ vom Ursprunge geführten ebenen Schnitte, wo $\delta$ eine mit $\Delta x$ verschwindende Grösse, endlich $\Delta V$ das zwischen beiden Schnitten liegende Volum, so ist klar, dass, wenn wir nur $\Delta x$ klein genug machen, $\Delta V$ nothwendig zwischen zwei Cylindern enthalten ist, welche $\Delta x$ zur gemeinschaftlichen Höhe, und beziehungsweise $F(x)$ und $F(x) + \delta$ zur Basis haben, deren Körperinhalte somit $F(x)\,\Delta x$ und $[F(x) + \delta]\,\Delta x$ sind, und sich beim unendlichen Abnehmen von $\Delta x$ immer mehr und mehr nähern. Zur Grenze übergehend wird daher:

$$dV = F(x)\,dx$$

und

$$V = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx. \tag{1}$$

Beisp. 1) Das dreiaxige Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird, im Abstande $x$ vom Ursprunge, von einer auf die Axe der $x$ senkrechten Ebene in einer Ellipse geschnitten, welche durch die Gleichung:

$$\frac{a^2 y^2}{b^2 (a^2 - x^2)} + \frac{a^2 z^2}{c^2 (a^2 - x^2)} = 1$$

ausgedrückt ist, deren Halbaxen somit $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

sind. Die Fläche dieses Schnittes ist daher $F(x) = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)$, und folglich

$$V = \pi \frac{bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} \pi a b c$$

das Volum des halben, $\frac{4}{3}\pi abc$ jenes des ganzen Ellipsoides. Für $a = c$ erhält man $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ als Inhalt des Rotationsellipsoides, dessen Umdrehungsaxe $= b$ ist. Ist aber $a = b = c$, so folgt $\frac{4}{3}\pi a^3$ als Inhalt einer Kugel vom Halbmesser $a$.

2) Der im vorigen §. betrachtete elliptische Kegel wird in dem Abstande $OC' = z$ parallel zur $xy$-Ebene in der Ellipse $A'B'$ geschnitten, deren Halbaxen $\frac{az}{c}$, $\frac{bz}{c}$ sind, deren Fläche daher durch $F(z) = \pi \frac{ab}{c^2} z^2$ ausgedrückt ist; man hat daher für das von der Spitze $O$ aus gezählte Volum des Kegels von der Höhe $c$:

$$V = \pi \frac{ab}{c^2} \int_0^c z^2\, dz = \frac{1}{3} \pi abc = \frac{1}{3} Bc,$$

wenn $B = \pi ab$ die elliptische Basis des Kegels bezeichnet.

Nimmt man das Integral von $z = z$ bis $z = c$, so wird:

$$V' = \pi \frac{ab}{c^2} \int_z^c z^2\, dz = \frac{1}{3} \pi \frac{ab}{c^2} (c^3 - z^3)$$

das Volum des abgestutzten Kegels $ABA'B'$ von der Höhe $CC' = c - z = h$.

Nun ist $c^3 - z^3 = (c - z)(c^2 + cz + z^2)$, folglich

$$V' = \frac{h}{3}\pi ab \left(1 + \frac{z}{c} + \frac{z^2}{c^2}\right);$$

es ist aber, wenn man mit $a'$, $b'$ die Halbaxen der kleineren Basis, mit $B'$ deren Fläche bezeichnet: $\frac{z}{c} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, somit auch $\frac{z^2}{c^2} = \frac{a'\,b'}{ab} = \frac{\pi a'\,b'}{\pi ab} = \frac{B'}{B}$, womit sich der bekannte Ausdruck:

$$V' = \frac{1}{3} h (B + \sqrt{BB'} + B')$$

ergibt.

**467.** Die Formel (1) des vorigen §. gestattet eine unmittelbare Anwendung auf Rotationsflächen. Nimmt man nämlich die Axe der $x$ als Umdrehungsaxe, und ist $y = f(x)$ die Gleichung der in der

Ebene der $xy$ gedachten erzeugenden Curve, so erscheint jeder auf die $x$-Axe senkrechte Schnitt als Kreis vom Halbmesser $y = f(x)$, dessen Fläche $F(x) = \pi y^2 = \pi f(x)^2$ ist; man hat daher für Rotationskörper:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx \tag{1}$$

Sind $y = f(x)$, $y_1 = f_1(x)$ zwei in der Ebene der $xy$ liegende Curven, so entsteht durch Rotation derselben um die Axe der $x$ ein ringförmiger Körper, dessen Volumen offenbar durch den Ausdruck:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y_1{}^2 - y^2) \, dx \tag{2}$$

gegeben wird.

Beisp. 1) Eine Ellipse drehe sich um ihre kleine Axe $b$; lassen wir diese mit der Axe der $x$, den Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammenfallen, so ist ihre Gleichung $b^2 y^2 = a^2 (b^2 - x^2)$, somit das Volum des von der Ebene der $yz$ und einer im Abstande $x$ parallelen Ebene begrenzten Theiles des Sphäroids:

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2} \int_0^x (b^2 - x^2) \, dx = \frac{\pi a^2}{b^2} \left(b^2 x - \frac{1}{3} x^3\right);$$

für $x = b$ folgt hieraus das Volum des halben Sphäroids $= \frac{2}{3} \pi a^2 b$, des ganzen Sphäroids $= \frac{4}{3} \pi a^2 b$, wie schon oben gefunden wurde.

2) Lassen wir den im §. 461, Beisp. 3, betrachteten Kreis vom Halbmesser $r$, dessen Mittelpunkt im Abstande $a$ von der Axe der $x$ liegt, um letztere sich drehen, so wird, da $(y - a)^2 + x^2 = r^2$ die Gleichung desselben ist, $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$, $y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2}$, somit das Volum des ganzen Ringes von kreisförmigem Querschnitt, zufolge der Formel (2):

$$V = 4a\pi \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 2ar^2\pi^2.$$

**468.** Es sei $z = f(x, y)$ die Gleichung einer krummen Fläche, und $y = \varphi(x)$ die Gleichung eines auf der Ebene der $xy$ senkrechten Cylinders, so kann die Aufgabe der Cubatur der Körper in ihrer allgemeinen Form immer auf die Bestimmung des Volums zurückgeführt werden, welches von dieser Cylinderfläche und den von ihr auf der Fläche $z = f(x, y)$ begrenzten Theilen dieser Fläche eingeschlossen wird. Zu einem Ausdrucke für dieses Volum gelangt man leicht durch die Bemerkung, dass das Produkt $dxdy$ ein unendlich kleines Element der in der $xy$-Ebene gedachten Basis jenes Cylinders, somit $z.dxdy$

$= f(x, y)\, dxdy$ das Volum des, über diesem Elemente als Grundfläche stehenden Prisma darstellt. Der ganze zu berechnende Körper kann nun in solche Prismen zerlegt gedacht werden, deren Summe sofort das gesuchte Volum desselben sein wird. Diese Summe wird durch das bestimmte Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} z dx dy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dx dy \qquad (1)$$

ausgedrückt, wo die Grenzen nach $y$ im Allgemeinen Funktionen von $x$ sein werden, welche sich durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ des das Volumen umschliessenden Cylinders bestimmen, vorausgesetzt, dass man zuerst nach $y$ integrirt. Der Ausdruck

$$dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy$$

ist dann, wie leicht einzusehen, die Summe aller Prismen, welchen dasselbe $x$ zukommt, d. h. das Volum einer unendlich dünnen Schichte des Körpers, welche von zwei, in den Abständen $x$ und $x + dx$ senkrecht auf die Axe der $x$ gelegten Ebenen begrenzt wird. Die zweite nach $x$ auszuführende Integration bedeutet die Summation aller dieser unendlich dünnen Schichten, in der Richtung der Axe der $x$, deren Resultat offenbar das gesuchte Volum sein muss.

Man sieht leicht, dass man die Ordnung der Integration umkehren, und zuerst nach $x$ integriren kann; in diesem Falle sind dann die Grenzen $x_0$ und $x_1$ im Allgemeinen Funktionen von $y$, deren Werthe wieder aus der Gleichung $y = \varphi(x)$ durch Auflösung nach $x$ sich ergeben.

Zu einem noch allgemeineren Ausdrucke für das Volum eines beliebig begrenzten Körpers gelangt man, wenn man sich durch zwei unendlich nahe Punkte im Innern desselben, $x, y, z$ und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, je drei zu den coordinirten Ebenen parallele Ebenen gelegt denkt, welche sofort ein unendlich kleines Parallelepiped begrenzen, dessen Volum durch $dxdydz$ ausgedrückt wird. Das Volum des Körpers ist nun offenbar gleich der Summe aller dieser Parallelepipede, ausgedehnt bis an die Begrenzungsflächen des Körpers, und diese Summe wird durch das dreifache Integral

$$V = \int\int\int dx dy dz \qquad (2)$$

dargestellt. Die Grenzen, innerhalb welcher die drei Integrationen auszuführen sind, ergeben sich in jedem Falle ohne Schwierigkeit aus der Betrachtung der das gesuchte Volum begrenzenden Flächen. Ver-

richtet man übrigens in (2) allgemein die Integration nach $z$, so gelangt man wieder zur Formel (1).

Um den Gebrauch dieser Formel durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir den Inhalt des dreiaxigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

berechnen. Diese Gleichung bietet sofort als Grenzen der Integration nach $z$ die Werthe

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

dar und wir erhalten hiemit, nach $z$ integrirend:

$$V=2c\iint dxdy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Ferner ist das allgemeine Integral nach $y$:

$$\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{y}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$
$$+\frac{b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\text{arc sin}\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.$$

Die Gleichung des die gegebene Fläche umhüllenden, auf der $xy$-Ebene senkrechten Cylinders ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (d. i. die Gleichung des Durchschnittes des Ellipsoides mit der genannten coordinirten Ebene); und hieraus ergeben sich die Grenzen der Integration nach $y$, nämlich $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, womit das letzte Integral $=\frac{b\pi}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, und folglich

$$V=bc\pi\int\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot dx$$

wird. Integrirt man endlich diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$, so erhält man

$$V=\frac{4}{3}abc\pi$$

als Volum des ganzen Ellipsoides.

**469.** Wir haben im vorigen §. das Volum eines Körpers durch ein dreifaches Integral [Gl. (2)] ausgedrückt; bei blos geometrischen Betrachtungen, wo es sich nur um die Bestimmung des Volums handelt, ist man jedoch nicht genöthigt, von diesem Ausdrucke Gebrauch zu machen, da in diesem Falle die Anwendung der Formel (1): $V=\iint zdxdy$

immer zum Ziele führt. Wohl aber führen andere Untersuchungen, z. B. physikalische, auf derlei dreifache Integrale. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung der Masse eines Körpers, dessen von einem Punkte zum anderen veränderliche Dichte für einen Punkt, dessen Coordinaten $x, y, z$ sind, durch die Funktion $\varrho = \varphi(x, y, z)$ gegeben ist, so hat man für das Differenzial der Masse im Punkte $x, y, z$ den Ausdruck $dM = \varrho\, dxdydz = \varphi(x, y, z)\, dxdydz$, da wie bekannt die Masse durch das Produkt des Volums in die Dichte ausgedrückt wird; für die Masse des ganzen Körpers hat man daher

$$M = \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dxdydz = \int\!\!\int\!\!\int \varphi(x, y, z) dxdydz.$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch das Volum des Körpers: $V = \int\!\!\int\!\!\int dxdydz$, so erhält man seine mittlere Dichte.

Die Ausmittelung eines dreifachen Integrals wird sehr häufig durch eine passende Transformation desselben, mittelst Einführung neuer Veränderlicher, bedeutend erleichtert. Das hiebei zu beobachtende Verfahren ist im Wesentlichen dasselbe, welches wir in §. 463 zur Reduktion der Doppel-Integrale in Anwendung brachten.

Es sei das dreifache Integral:

$$J = \int\!\!\int\!\!\int U dxdydz = \int\!\!\int\!\!\int f(x, y, z) dxdydz$$

umzuformen durch Substitution von drei neuen Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta$, welche von $x, y, z$ mittelst der Gleichungen

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta),\ y = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta),\ z = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta) \tag{1}$$

abhängen. Die Differenziation dieser Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} dx &= P\, d\xi + Q\, d\eta + R\, d\zeta, \\ dy &= P_1\, d\xi + Q_1\, d\eta + R_1\, d\zeta, \\ dz &= P_2\, d\xi + Q_2\, d\eta + R_2\, d\zeta. \end{aligned} \tag{2}$$

Angenommen nun, dass man zuerst nach $z$ integriren wolle, so hat man hiebei $x$ und $y$ als constant zu betrachten und somit, wenn man etwa $\zeta$ an die Stelle von $z$ einführen will, zur Bestimmung von $dz$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= P\, d\xi + Q\, d\eta + R\, d\zeta, \\ 0 &= P_1\, d\xi + Q_1\, d\eta + R_1\, d\zeta, \\ dz &= P_2\, d\xi + Q_2\, d\eta + R_2\, d\zeta, \end{aligned}$$

aus welchen man durch Elimination von $d\xi$ und $d\eta$:

$$dz = \frac{\Omega\, d\zeta}{PQ_1 - P_1 Q}$$

findet, wobei zur Abkürzung

$$\Omega = P_2(QR_1 - RQ_1) + Q_2(RP_1 - PR_1) + R_2(PQ_1 - QP_1) \tag{3}$$

gesetzt ist. Durch Substitution dieses Werthes von $dz$ verwandelt sich unser Integral in

$$J = \int\int\int U \frac{\Omega}{PQ_1 - P_1 Q}\, dx dy d\zeta,$$

ausgedrückt in Funktion der von einander unabhängigen Veränderlichen $x, y, \zeta$, wenn man sich nämlich in $U, \Omega$, und dem Binom $PQ_1 - P_1 Q$, die Grössen $z$, $\xi$ und $\eta$ mittelst der Gleichungen (1) eliminirt denkt.

Integrirt man jetzt in dem letzten Integrale zuerst nach $y$, so hat man $x$ und $\zeta$ als constant zu betrachten, somit $dx = d\zeta = 0$ zu setzen, wodurch die beiden ersten der Glgn. (2) in folgende übergehen:

$$0 = P\, d\xi + Q\, d\eta,$$
$$dy = P_1 d\xi + Q_1 d\eta,$$

aus welchen, durch Elimination von $d\xi$,

$$dy = \frac{PQ_1 - P_1 Q}{P}\, d\eta$$

folgt. Durch Substitution dieses Werthes wird obiges Integral

$$J = \int\int\int U \frac{\Omega}{P}\, dx d\eta d\zeta,$$

welches nunmehr von den drei, von einander als unabhängig zu betrachtenden Veränderlichen $x, \eta, \zeta$ abhängt.

Integriren wir endlich nach $x$, so sind $\eta$ und $\zeta$ constant, d. i. $d\eta = d\zeta = 0$ anzunehmen, durch welche Bedingung die erste der Glgn. (2) sich auf $dx = Pd\xi$ reducirt; mit diesem Werthe erhalten wir schliesslich das transformirte Integral

$$J = \int\int\int U\Omega\, d\xi d\eta d\zeta,$$

wo selbstverständlich $U$ mittelst der Glgn. (1) als Funktion von $\xi, \eta, \zeta$ auszudrücken ist.

**470.** Benützen wir die soeben vorgetragene Methode zur Umformung des Integrals:

$$V = \int\int\int dx dy dz,$$

welches bekanntlich das Volumen eines Körpers ausdrückt, indem wir an die Stelle der rechtwinkligen Coordinaten $x, y, z$ die Polarcoordinaten $r, \theta, \omega$ mittelst der Gleichungen

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\cos\omega,\quad z = r\sin\theta\sin\omega \qquad (1)$$

treten lassen. Durch Differenziation derselben findet man:

$$\begin{aligned} P &= \cos\theta, & Q &= -r\sin\theta, & R &= 0 \\ P_1 &= \sin\theta\cos\omega, & Q_1 &= r\cos\theta\cos\omega, & R_1 &= -r\sin\theta\sin\omega, \\ P_2 &= \sin\theta\sin\omega, & Q_2 &= r\cos\theta\sin\omega, & R_2 &= r\sin\theta\cos\omega. \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen wird die Grösse $\Omega = r^2 \sin\theta$, und folglich, da im vorliegenden Falle die Funktion $U = 1$ ist:

$$V = \int\int\int r^2 \sin\theta \, d\theta d\omega dr. \qquad (2)$$

Diess ist der Ausdruck des Volums in Funktion von Polarcoordinaten.

Man gelangt zu demselben auch durch eine einfache geometrische Betrachtung. Es sei $M$ (Fig. 64) ein Punkt im Innern des Körpers, $O$ der Pol, $OM = r$ der Radiusvector, $\angle MOX = \theta$ die Neigung desselben gegen die feste Axe $OX$, endlich $\angle MKM' = \omega$ der Winkel, welchen die durch den Radiusvector und die Axe $OX$ gelegte Ebene mit der fixen Ebene $XOY$ bildet; übereinstimmend mit der geometrischen Bedeutung der Glgn. (1). Lassen wir nun den Radiusvector $OM = r$ um das unendlich kleine Stück $Om = dr$ zunehmen, und beschreiben aus dem Pole $O$ als Mittelpunkt zwei Kugelflächen, so werden diese von der Ebene $MOX$ in Kreisen geschnitten, welchen der Radiusvector $OM$ in den Punkten $M$ und $m$, ein zweiter in der Ebene $MOX$ liegender und mit der $OX$ den Winkel $NOX = \theta + d\theta$ bildender Radiusvector $ON$ in den Punkten $N$ und $n$ begegnet. Hiedurch wird das in der Ebene $MOX$ liegende unendlich kleine Viereck $MNmn$ gebildet, welches, wenn man sich die Ebene $MOX$ um den unendlich kleinen Winkel $MKQ = d\omega$ gedreht denkt, den Körper $Mp$ erzeugt, welcher — einer abgestutzten Pyramide ähnlich — der unendlich kleinen Dimensionen wegen, als Prisma zu betrachten ist. Offenbar kann man sich nun den ganzen Körper in lauter solche Elemente zerlegt denken, deren Volum $dV$ das Product aus dem Recktecke $MNPQ$ in die Höhe $Mm = dr$ ist. Da nun die Seiten dieses Rechteckes $MN = r\,d\theta$, und $MQ = MK \,.\, d\omega = r \sin\theta \, d\omega$ sind, so erhält man als Inhalt des Rechteckes $r^2 \sin\theta \, d\theta d\omega$, womit sich für das Differenzial des Volums der Ausdruck:

$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta d\omega dr$$

ergibt, übereinstimmend mit der oben erhaltenen Gl. (2).

Was die Grenzen des dreifachen Integrals (2) betrifft, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Pol innerhalb oder ausserhalb des Körpers liegt.

Im ersteren Falle wird man zuerst nach $r$ integriren, und zwar von $r = 0$ bis $r = F(\theta, \omega)$, welche Funktion durch die Polargleichung der das Volum begrenzenden krummen Fläche gegeben ist. Integrirt man dann von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, und von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$ und zwar in beliebiger Ordnung, so ist leicht einzusehen, dass hiemit das Integral auf den ganzen Körper ausgedehnt ist.

Im zweiten Falle wird, wenn von einem begrenzten Volum die Rede sein soll, jeder Radiusvector den Körper im Allgemeinen mindestens in zwei Punkten schneiden. Gesetzt nun, es seien $r = F(\theta, \omega)$ und $r = F_1(\theta, \omega)$ die zwei, diesen Durchschnittspunkten entsprechenden Werthe von $r$; ferner $\varphi(\omega)$ und $\varphi_1(\omega)$ zwei Funktionen von $\omega$, endlich $\alpha$ und $\alpha_1$ zwei gegebene Winkel. Integrirt man nun nach $r$, von $r = F(\theta, \omega)$ bis $r = F_1(\theta, \omega)$; nach $\theta$ von $\theta = \varphi(\omega)$ bis $\theta = \varphi_1(\omega)$, endlich nach $\omega$, von $\omega = \alpha$ bis $\omega = \alpha_1$, so erhält man offenbar das Volum eines Körpers, welcher begrenzt wird einerseits von zwei krummen Flächen, deren Gleichungen $r = F(\theta, \omega)$ und $r = F_1(\theta, \omega)$ sind, anderseits von zwei conischen Flächen, welche ihren Scheitel im Pole $O$ und die $OX$ zur gemeinschaftlichen Axe haben, und durch die Gleichungen $\theta = \varphi(\omega)$ und $\theta = \varphi_1(\omega)$ dargestellt werden; endlich von zwei Ebenen, welche durch die Axe $OX$ gehen, und mit der fixen Ebene $XOY$, von welcher der Winkel $\omega$ gezählt wird, die Winkel $\alpha$ und $\alpha_1$ einschliessen.

Zur Erläuterung möge folgendes Beispiel dienen. Aus dem Pole als Mittelpunkt seien zwei Kugeln von den Halbmessern $a$ und $a_1$ beschrieben; zwei gerade Kreiskegel, welche ihre Scheitel gleichfalls im Pole, und die $OX$ zur gemeinschaftlichen Axe haben, und deren Erzeugende mit dieser Axe die Winkel $\beta$ und $\beta_1$ einschliessen, schneiden aus der Kugelfläche einen Ring heraus, von welchem durch zwei durch $OX$ gelegte Ebenen, welche mit der festen Ebene $XOY$ die Winkel $\alpha$ und $\alpha_1$ bilden, ein Stück abgeschnitten wird, dessen Volum zu berechnen ist.

Hier sind nun sämmtliche Grenzen constant, und es ist zu integriren nach $r$ von $r = a$ bis $r = a_1$, nach $\theta$ von $\theta = \beta$ bis $\theta = \beta_1$, nach von $\omega = \alpha$ bis $\omega = \alpha_1$, so dass also für das in Rede stehende Volum $\omega$ erhalten wird:

$$V = \int_{\beta}^{\beta_1}\int_{\alpha}^{\alpha_1}\int_{a}^{a_1} r^2 \sin\theta d\theta dr d\omega,$$

d. i.

$$V = \frac{1}{3}(a_1^3 - a^3)(\alpha_1 - \alpha)(\cos\beta - \cos\beta_1).$$

Setzt man $a = 0$ und $\beta = 0$, in welchem Falle die innere Kegelfläche und die innere Kugel verschwinden, so wird

$$V = \frac{1}{3}a_1^3(\alpha_1 - \alpha)(1 - \cos\beta)$$

der Ausdruck des zwischen den oben erwähnten Ebenen liegenden

Theiles des Kugelausschnittes; das Volum des ganzen Kugelausschnittes findet man daher, $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 2\pi$ setzend:

$$V = \frac{2}{3}\pi a_1^3 (1 - \cos\beta) = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \sin\frac{1}{2}\beta^2.$$

Für $\beta = 90^0$ geht der Ausschnitt in die halbe Kugel über, und der letzte Ausdruck verwandelt sich in $V = \frac{2}{3}\pi a_1{}^3$.

## VIERTES KAPITEL.

### WEITERE UNTERSUCHUNGEN UEBER BESTIMMTE INTEGRALE.

### I. Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange.

**471.** Gesetzt, die Funktion $\varphi(x)$ sei so beschaffen, dass sie für alle zwischen 0 und $\pi$ liegenden Werthe von $x$ in eine convergirende Reihe von der Form:

$$\varphi(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots\ldots + B_n \sin nx + \ldots$$

entwickelt werden könne, so lassen sich die Coefficienten $B_1$, $B_2$, .... auf einfache Weise bestimmen. Multipliciren wir nämlich die Gleichung mit $\sin nx\, dx$, und integriren von 0 bis $\pi$, so erhalten wir:

$$\int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\, dx = B_1 \int_0^\pi \sin x \sin nx\, dx + B_2 \int_0^\pi \sin 2x \sin nx\, dx + \ldots\ldots$$

$$+ B_n \int_0^\pi \sin nx^2\, dx + \ldots \qquad (m)$$

Die rechter Hand vorkommenden Integrale sind von der Form:

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + C,$$

und dieses Integral verschwindet zwischen den Grenzen 0 und $\pi$, ausgenommen, wenn $m = n$ ist, für welchen Fall:

$$\int \sin nx^2\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n}, \quad [\text{§. 435, Gl. (7)}],$$

und $$\int_0^\pi \sin nx^2\, dx = \frac{\pi}{2}$$

wird. Hiemit folgt aus $(m)$:

$$\int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\, dx = B_n \frac{\pi}{2},$$

somit
$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\, dx.$$

Da aber dieses Verfahren auf der, offenbar eines Beweises bedürftigen Annahme beruht, dass jede Funktion $\varphi(x)$ in eine convergirende Reihe verwandelt werden kann, welche nach den Sinussen der Vielfachen der Veränderlichen $x$ fortschreitet, so wollen wir die Entwickelung im Folgenden auf einem anderen Wege vornehmen.

**472.** Es sei $f(\xi)$ eine Funktion von $\xi$, welche von $\xi = a$ bis $\xi = b$ endlich bleibt, und $k$ eine positive ganze Zahl, so hat man nach dem Satze der theilweisen Integration:

$$\int_a^b f(\xi) \sin k\xi\, d\xi = \frac{f(a) \cos ka - f(b) \cos kb}{k} + \frac{1}{k} \int_a^b f'(\xi) \cos k\xi\, d\xi.$$

Der Zähler im ersten Gliede rechter Hand ist eine endliche Grösse; wenn ferner die Funktion $f'(\xi)$ endlich ist von $\xi = a$ bis $\xi = b$, und innerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht ändert, so kann man [§. 442, Gl. (4)] setzen:

$$\int_a^b f'(\xi) \cos k\xi\, d\xi = \cos k[a + \theta(b-a)] \int_a^b f'(\xi)\, d\xi$$
$$= \left\{f(b) - f(a)\right\} \cos k[a + \theta(b-a)],$$

woraus erhellt, dass $\int_a^b f'(\xi) \cos k\xi\, d\xi$ ebenfalls einen endlichen Werth hat. Lässt man demnach in der obigen Gleichung $k$ unendlich gross werden, so folgt:

$$\lim \int_a^b f(\xi) \sin k\xi\, d\xi = 0, \quad (\text{für } k = \infty). \tag{1}$$

Diese Gleichung besteht aber auch noch in dem Falle, wenn $f'(\xi)$ zwischen $a$ und $b$ sein Vorzeichen ändert oder unendlich wird. Denn im ersten Falle kann man das Integral $\int_a^b f'(\xi) \cos k\xi\, d\xi$ durch Einschiebung von Grenzen in mehrere andere zerlegen, für welche $f'(\xi)$ innerhalb der jedem Integrale zukommenden Grenzen sein Zeichen nicht ändert, welche somit endlich bleiben und eine endliche Grösse zur Summe haben. Wird aber $f'(\xi)$ für einen zwischen $a$ und $b$ liegenden Werth $\xi = \alpha$ unendlich, so setze man:

$$\int_a^b f(\xi) \sin k\xi\, d\xi = \int_a^{\alpha-\varepsilon} f(\xi) \sin k\xi\, d\xi + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f(\xi) \sin k\xi\, d\xi$$
$$+ \int_{\alpha+\varepsilon}^b f(\xi) \sin k\xi\, d\xi,$$

wo nun das 1[te] und 3[te] Integral rechter Hand vermöge der Gl. (1) für $k = \infty$ verschwinden, da der Voraussetzung nach $f'(\xi)$ in den Intervallen $\alpha$ bis $\alpha - \varepsilon$ und $\alpha + \varepsilon$ bis $b$ nicht unendlich wird, wie klein man auch $\varepsilon$ nehmen mag; der Werth des mittleren Integrals wird aber mit unendlich abnehmendem $\varepsilon$ unendlich klein, da $f(\xi)$ der Voraussetzung nach endlich ist von $\xi = \alpha - \varepsilon$ bis $\xi = \alpha + \varepsilon$. Diese Betrachtung lässt sich offenbar auch auf den Fall ausdehnen, wenn $f'(\xi)$ für mehrere zwischen $a$ und $b$ liegende Werthe von $\xi$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden würde.

Hieraus folgt also, dass die Gültigkeit der Gleichung (1) nur an die eine Bedingung gebunden ist, dass die Funktion $f(\xi)$ endlich sei von $\xi = a$ bis $\xi = b$.

Setzen wir nun

$$f(\xi) = \frac{\varphi(x \pm \alpha\xi) - \varphi(x)}{\sin\xi};$$

lassen wir $x$ eine beliebige Constante, $\varphi(u)$ eine Funktion sein, welche von $u = x \pm \alpha a$ bis $u = x \pm \alpha b$ endlich bleibt, und nehmen wir $a = 0$ und $b < \pi$, so entspricht die Funktion $f(\xi)$ in Bezug auf diese Grenzen der oben gestellten Forderung und man hat daher vermöge der Gl. (1):

$$\lim \int_0^b \frac{\varphi(x \pm \alpha\xi) - \varphi(x)}{\sin\xi} \sin k\xi \, d\xi = 0,$$

d. i.

$$\lim \int_0^b \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin\xi} d\xi = \varphi(x) \lim \int_0^b \frac{\sin k\xi}{\sin\xi} d\xi, \quad b < \pi.$$

Das Integral rechter Hand kann in zwei Theile:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\xi}{\sin\xi} d\xi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \operatorname{cosec}\xi \sin k\xi \, d\xi$$

zerlegt werden, von welchen der zweite, vermöge der Gleichung (1) verschwindet, weil $\operatorname{cosec}\xi$ von $\xi = \frac{\pi}{2}$ bis $\xi = b < \pi$ endlich bleibt. Was den ersten Theil betrifft, so setze man $k = 2m + 1$; hiedurch wird

$$\frac{\sin k\xi}{\sin\xi} = \frac{\sin(2m+1)\xi}{\sin\xi} = 1 + 2(\cos 2\xi + \cos 4\xi + \ldots\ldots + \cos 2m\xi),^{*)}$$

$$\int \frac{\sin k\xi}{\sin\xi} d\xi = \xi - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\xi + \frac{1}{4}\sin 4\xi + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2m}\sin 2m\xi\right),$$

somit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\xi}{\sin\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}, \quad \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\xi}{\sin\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

---

*) Man findet diese Formel leicht, wenn man in Gl. (6), §. 54, I. Bd., $\varphi = 2\xi$, und $n - 1 = m$ setzt.

Mat hat folglich:

$$\lim \int_0^b \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi = \frac{1}{2}\pi \varphi(x), \quad 0 < b < \pi. \tag{2}$$

Für $b = \pi$ gilt diese Gleichung nicht mehr, da für diesen Werth der für $f(\xi)$ substituirte Ausdruck unendlich wird. Es ist aber:

$$J = \int_0^\pi \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi;$$

setzt man im zweiten Integrale rechter Hand $\xi = \pi - \omega$, $d\xi = -d\omega$, so werden die Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und 0, und man hat:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x \pm \alpha[\pi - \omega]) \frac{\sin k(\pi - \omega)}{\sin(\pi - \omega)} d\omega,$$

oder, wenn man $k$ wieder eine ungerade Zahl sein lässt:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x \pm \alpha\pi \mp \alpha\omega) \frac{\sin k\omega}{\sin \omega} d\omega.$$

Auf beide Integrale rechter Hand ist nun der Satz (2) anwendbar, und man hat daher, zur Grenze übergehend:

$$\lim \int_0^\pi \varphi(x \pm \alpha\xi) \frac{\sin k\xi}{\sin \xi} d\xi = \frac{1}{2}\pi \varphi(x) + \frac{1}{2}\pi \varphi(x \pm \alpha\pi)$$
$$= \frac{1}{2}\pi [\varphi(x) + \varphi(x \pm \alpha\pi)]. \tag{3}$$

**473.** Bezeichnen wir nun mit:

$$\sum_1^n \int_0^\pi f(\alpha) \cos n(\alpha \mp x)\, d\alpha$$

die Summe der Reihe:

$$\int_0^\pi f(\alpha) \cos(\alpha \mp x)\, d\alpha + \int_0^\pi f(\alpha) \cos 2(\alpha \mp x)\, d\alpha + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + \int_0^\pi f(\alpha) \cos n(\alpha \mp x)\, d\alpha,$$

so ist:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\alpha)\, d\alpha + \sum_1^n \int_0^\pi f(\alpha) \cos n(\alpha \mp x)\, d\alpha =$$
$$= \int_0^\pi f(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha \mp x) + \cos 2(\alpha \mp x) + \ldots\ldots + \cos n(\alpha \mp x)\right] d\alpha$$
$$= \int_0^\pi f(\alpha) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(\alpha \mp x)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \mp x)} d\alpha. \quad [\text{§. 54, Gl. (6)}].$$

Lassen wir $n$ unendlich gross werden, so wird obige Reihe eine unendliche, und wir erhalten, $2n+1=k$ setzend:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha+\sum_1^\infty\int_0^\pi f(\alpha)\cos n(\alpha\mp x)\,d\alpha$$

$$=\lim\int_0^\pi f(\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}k(\alpha\mp x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha\mp x)}d\alpha. \qquad (m)$$

Betrachten wir nun, indem wir $x$ eine positive Zahl sein lassen, die beiden Fälle des obern und untern Zeichen besonders, und setzen, für den Fall des oberen Zeichens: $\frac{1}{2}(\alpha-x)=\xi$, wodurch $\alpha=x+2\xi$ wird, und die Grenzen 0 und $\pi$ in $-\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}(\pi-x)$ übergehen, so verwandelt sich das Integral rechter Hand, welches wir mit $J$ bezeichnen wollen, in

$$J=\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2\xi)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi=-\int_0^{-\frac{1}{2}x} f(x+2\xi)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2\xi)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi,$$

oder wenn wir in dem $1^{\text{ten}}$ Integrale rechter Hand $-\xi$ statt $\xi$ schreiben:

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2\xi)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2\xi)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi.$$

Auf beide Integrale kann sofort die Gleichung (2) im vorigen §. in Anwendung gebracht werden, und wir erhalten:

wenn $x=0$: $\quad \lim J=0+\frac{1}{2}\pi f(+0)=\frac{1}{2}\pi f(+0)$,

wenn $0<x<\pi$: $\quad \lim J=\frac{1}{2}\pi f(x-0)+\frac{1}{2}\pi f(x+0)$,

wenn $x=\pi$: $\quad \lim J=\frac{1}{2}\pi f(\pi-0)+0=\frac{1}{2}\pi f(\pi-0)$.

Die Symbole $f(+0)$, $f(x-0)$, u. s. w. beziehen sich auf den Fall, wenn die Funktion $f(x)$ beziehungsweise für $x=0$, oder einen zwischen 0 und $\pi$ liegenden Werth von $x$, oder für $x=\pi$ zwei verschiedene Werthe darbieten würde, welcher Fall offenbar nicht ausgeschlossen ist, da die Anwendung der Gleichung (2) nur voraussetzt, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibt. Solche zwei verschiedene Werthe sollen eben durch $f(x+0)$ und $f(x-0)$ bezeichnet werden. Ist die Funktion nur einwerthig, so ist selbstverständlich $f(x+0)=f(x-0)$.

Im Falle des unteren Zeichens setzen wir in dem Integrale

rechter Hand in $(m)$: $\frac{1}{2}(\alpha+x)=\xi$, so wird $\alpha=2\xi-x$, die Grenzen gehen über in $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}(\pi+x)$, und das Integral verwandelt sich in:

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2\xi-x)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi-\int_0^{\frac{1}{2}x} f(2\xi-x)\frac{\sin k\xi}{\sin\xi}d\xi;$$

lässt man nun wieder $k$ unendlich gross werden, so erhält man, die Formeln (2) und (3) in Anspruch nehmend, letztere beim ersten Integrale für den Fall $x=\pi$:

$$\text{wenn } x=0: \qquad \lim J=\frac{1}{2}\pi f(+0)+0=\frac{1}{2}\pi f(+0),$$

$$\text{wenn } 0<x<\pi: \qquad \lim J=\frac{1}{2}\pi f(0-x)-\frac{1}{2}\pi f(0-x)=0,$$

$$\text{wenn } x=\pi: \qquad \lim J=\frac{1}{2}\pi\left\{f(0-\pi)+f(0+\pi)\right\}-\frac{1}{2}\pi f(0-\pi)$$
$$=\frac{1}{2}\pi f(\pi+0).$$

Mit Hülfe dieser Bestimmungen gehen demnach aus $(m)$ folgende zwei Gleichungen hervor:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\alpha)d\alpha+\sum_1^\infty\int_0^\pi f(\alpha)\cos n(\alpha-x)d\alpha=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi f(+0),\\ \frac{1}{2}\pi[f(x-0)+f(x+0)],\\ \frac{1}{2}\pi f(\pi-0),\end{cases} \qquad (n)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\alpha)d\alpha+\sum_1^\infty\int_0^\pi f(\alpha)\cos n(\alpha+x)d\alpha=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi f(+0),\\ 0,\\ \frac{1}{2}\pi f(\pi+0),\end{cases} \qquad (p)$$

in deren jeder von den drei Werthen rechter Hand der 1[t], 2[te] oder 3[te] gilt, je nachdem:

$$x=0, \text{ oder } 0<x<\pi, \text{ oder } x=\pi$$

ist. Durch Addition dieser Gleichungen erhält man nunmehr, wenn man durch $\pi$ dividirt, und beachtet, dass $\cos n(\alpha+x)+\cos n(\alpha-x)=2\cos nx\cos n\alpha$ ist:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)d\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\cos nx\int_0^\pi f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$$
$$=\begin{cases}f(+0),\\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\\ \frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)].\end{cases}$$

Ist nun die Funktion $f(x)$ für jeden Werth von $x$ von 0 bis $\pi$ nur **eines** Werthes fähig, oder stetig, so ist der zweite Theil dieser Glei-

chung allgemein $=f(x)$ von $x=0$ bis $x=\pi$, und es besteht daher die Gleichung:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \cos nx\int_0^\pi f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,\ \begin{cases}x=0\\x=\pi\end{cases} \tag{4}$$

oder

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\ldots\ldots\begin{cases}x=0\\x=\pi\end{cases} \tag{5}$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha;$$

unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ endlich und stetig ist von 0 bis $\pi$. Erleidet aber die Funktion $f(x)$ für irgend einen innerhalb dieser Grenzen liegenden Werth von $x$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist die Summe der Reihe (5) gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche die Funktion $f(x)$ für jenen Werth von $x$ erhält.

Subtrahirt man ferner die Gleichungen ($n$) und ($p$), und beachtet, dass $\cos n(\alpha-x)-\cos n(\alpha+x)=2\sin nx\sin n\alpha$, so folgt:

$$\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin nx\int_0^\pi f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha=\begin{cases}0.\\\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].\\0.\end{cases}$$

Ist wieder $f(x)$ einwerthig von $x=0$ bis $x=\pi$, so ist die linke Seite dieser Gleichung $=f(x)$ für alle z w i s c h e n 0 und $\pi$ liegenden Werthe von $x$, diese Grenzwerthe selbst ausgenommen, weil für diese der Ausdruck linker Hand verschwindet. Uebrigens ist klar, dass diese Gleichung für einen der Grenzwerthe 0 und $\pi$, oder für beide in Kraft bleibt, wenn $f(0)$, oder $f(\pi)$, oder diese beiden Werthe der Nulle gleich sind, was in einzelnen Fällen wohl Statt finden kann.

Ist daher $f(x)$ endlich und stetig von $x=0$ bis $x=\pi$, so besteht die Gleichung:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin nx\int_0^\pi f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha,\ \begin{cases}x>0\\x<\pi\end{cases} \tag{6}$$

oder

$$f(x)=B_1\sin x+B_2\sin 2x+B_3\sin 3x+\ldots\ldots\ \begin{cases}x>0\\x<\pi\end{cases} \tag{7}$$

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha.$$

Erleidet die Funktion $f(x)$ an irgend einer Stelle innerhalb des Intervalls $x=0$ bis $x=\pi$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, ohne unendlich zu werden, so ist die Summe der Reihe (7) wieder das arith-

metische Mittel der beiden Werthe, welche der Funktion $f(x)$ an besagter Stelle zukommen.

Mittelst der Formeln (5) und (7) kann jede beliebige Funktion von $x$, innerhalb der angegebenen Grenzen, in eine unendliche Reihe verwandelt werden.

**474.** Die obigen Reihenentwickelungen, welche in Bezug auf die Veränderliche $x$ an die Grenzwerthe 0 und $\pi$ gebunden sind, lassen sich leicht auf beliebige Grenzen ausdehnen. Setzen wir $x = \frac{\pi x'}{a}$, $\alpha = \frac{\pi \alpha'}{a}$, so verwandeln sich die Grenzen 0, $\pi$ in 0 und $a$, und man erhält aus (4):

$$f\left(\frac{\pi x'}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{\pi \alpha'}{a}\right) d\alpha'$$

$$+ \frac{2}{a}\sum_1^\infty \cos n\left(\frac{\pi x'}{a}\right)\int_0^a f\left(\frac{\pi \alpha'}{a}\right)\cos n\left(\frac{\pi\alpha'}{a}\right) d\alpha', \quad \begin{cases} x' = 0 \\ x' = a; \end{cases}$$

da aber $f\left(\frac{\pi x'}{a}\right)$ eine ganz willkürliche Funktion von $x'$ ist, so kann man an deren Stelle $f(x')$ setzen, wodurch diese Gleichung, wenn man gleichzeitig die Accente weglässt, in folgende übergeht:

$$f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f(\alpha)\, d\alpha + \frac{2}{a}\sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a} d\alpha, \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a, \end{cases} \tag{8}$$

oder

$$f(x) = \frac{1}{2}C_0 + C_1\cos\frac{\pi x}{a} + C_2\cos\frac{2\pi x}{a} + C_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots \begin{cases} x = 0 \\ x = a, \end{cases} \tag{9}$$

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a} d\alpha.$$

Auf demselben Wege erhält man aus (6):

$$f(x) = \frac{2}{a}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{a} d\alpha, \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < a, \end{cases} \tag{10}$$

oder

$$f(x) = D_1\sin\frac{\pi x}{a} + D_2\sin\frac{2\pi x}{a} + D_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots \begin{cases} x > 0 \\ x < a, \end{cases} \tag{11}$$

$$D_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{a} d\alpha.$$

Die Gleichung (10) oder (11) gilt nicht für $x = 0$ und $x = a$, weil für diese Werthe der 2[te] Theil sich auf Null reducirt, jene besonderen Fälle ausgenommen, wo $f(0)$ oder $f(a)$ gleich Null wird. Ist $f(x)$ doppelwerthig, so hat man in (8) bis (11) linker Hand statt $f(x)$ die halbe Summe beider Werthe zu nehmen.

Setzen wir ferner in (8) $f(x)=\varphi(x)+\varphi(-x)$, so folgt:

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(-\alpha)\,d\alpha$$

$$+\frac{2}{a}\sum_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a}d\alpha+\frac{2}{a}\sum_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a\varphi(-\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a}d\alpha,$$

d. i., wenn man in den beiden, $\varphi(-x)$ enthaltenden Integralen $-\alpha$ statt $\alpha$ schreibt und je zwei gleichartige Integrale vereiniget:

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{a}\sum_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{a}\int_{-a}^{+a}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a}d\alpha. \qquad (q)$$

Diese Gleichung gilt, ihrer Ableitung zufolge, unmittelbar von $x=0$ bis $x=a$; da aber beide Theile derselben für gleiche positive und negative Werthe von $x$ offenbar denselben Werth annehmen, so besteht sie von $x=-a$ bis $x=+a$.

Auf dieselbe Weise erhält man nun aus (10), $f(x)=\varphi(x)-\varphi(-x)$ setzend:

$$\varphi(x)-\varphi(-x)=\frac{2}{a}\sum_1^\infty\sin\frac{n\pi x}{a}\int_{-a}^{+a}\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{a}d\alpha. \qquad (r)$$

Auch diese Gleichung ist richtig von $x>-a$ bis $x<+a$, weil beide Theile derselben für gleiche positive und negative Werthe von $x$ denselben Zahlenwerth haben und bloss ihr Zeichen wechseln.

Durch Addition der Gleichungen $(q)$ und $(r)$ ergibt sich nun, wenn man beachtet, dass:

$$\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\alpha}{a}+\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\alpha}{a}=\cos\frac{n\pi(\alpha-x)}{a}$$

ist:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{a}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi(\alpha-x)}{a}d\alpha. \quad \begin{cases}x>-a\\x<+a\end{cases} \qquad (12)$$

Addirt man übrigens die Gleichungen $(q)$ und $(r)$, ohne die beiden Integrale zu vereinigen, so erhält man, wenn man zugleich die angedeuteten Summen auflöst, die Gl. (12) in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)=\frac{1}{2}E_0+E_1\cos\frac{\pi x}{a}+E_2\cos\frac{2\pi x}{a}+E_3\cos\frac{3\pi x}{a}+\ldots\ldots\\+G_1\sin\frac{\pi x}{a}+G_2\sin\frac{2\pi x}{a}+G_3\sin\frac{3\pi x}{a}+\ldots,\end{aligned}\right\}\begin{matrix}x>-a\\x<+a\end{matrix} \qquad (13)$$

wo: $$E_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a}d\alpha,\quad G_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{a}d\alpha.$$

Für die Grenzwerthe $x=-a$ und $x=+a$ gilt diese Gleichung nicht, weil für diese die Summe der Sinus-Reihe sich auf Null reducirt, während die Summe der Cosinusreihe, vermöge Gl. $(q)$ sowohl für $x=-a$ als $x=+a$, $=\frac{1}{2}[\varphi(a)+\varphi(-a)]$ wird.

**475.** Einige Beispiele mögen zur Erläuterung der in den vorhergehenden §§. entwickelten Sätze dienen.

1) Man soll eine Funktion von $x$ finden, welche $=x$ ist, von $x=0$ bis $x=\pi$. — Man setze in Gl. (5): $f(x)=x$, so wird:

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \alpha\cos n\alpha\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi-1}{n^2},$$

somit

$$x=\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right),\begin{cases}x=0\\x=\pi\end{cases}$$

und die Summe der Reihe rechter Hand ist $=x$ für jeden Werth von $x$ von $x=0$ bis $x=\pi$.

Setzt man ebenso $f(x)=x$ in Gl. (7), so erhält man:

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \alpha\sin n\alpha\,d\alpha=-2\frac{\cos n\pi}{n},\text{ somit:}$$

$$x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\ldots\right).\begin{cases}x>0\\x<\pi.\end{cases}$$

2) Setzt man $f(x)=1$ in Gl. (7), so folgt:

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin n\alpha\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n},$$

$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\ldots\ldots\begin{cases}x>0\\x<\pi.\end{cases}$$

3) Eine Funktion von $x$ zu finden, welche gleich $x$ ist von $x=-a$ bis $x=+a$. — In (13) $\varphi(x)=x$ gesetzt, erhält man ohne Schwierigkeit:

$$E_n=0,\quad G_n=-\frac{2a}{\pi}\frac{\cos n\pi}{n},\text{ folglich:}$$

$$x=\frac{2a}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a}-\ldots\ldots\right)\begin{cases}x>-a\\x<+a.\end{cases}$$

4) Die Gleichung des Umfanges eines Dreieckes $ABC$ zu finden, dessen Grundlinie $AC=a$, dessen auf $AC$ senkrechte Höhe $BD=h$ ist, welch' letztere die Grundlinie in die beiden Segmente $AD=\beta$ und $CD=a-\beta$ theilt.

Nimmt man $A$ als Ursprung und $AC$ als $x$-Axe rechtwinkliger Coordinaten, so sind die Gleichungen der beiden Seiten $AB$ und $BC$ beziehungsweise:

$$y=\frac{h}{\beta}x\text{ und }y=\frac{h}{a-\beta}(a-x).$$

Ist daher $y=f(x)$ die Gleichung des Umfanges, so hat man $f(x)$ so zu bestimmen, dass

$$\text{von } x=0 \text{ bis } x=\beta\colon\ f(x)=\frac{h}{\beta}x,$$

$$\text{von } x=\beta \text{ bis } x=a\colon\ f(x)=\frac{h}{a-\beta}(a-x)$$

werde. Benützen wir nun die Gleichung (11), so haben wir in dem Coefficienten $D_n$ das Integrationsintervall 0 bis $a$ in die beiden Intervalle 0 bis $\beta$ und $\beta$ bis $a$ zu zerlegen, und innerhalb des ersteren $f(\alpha)=\frac{h}{\beta}\alpha$, innerhalb des letzteren $f(\alpha)=\frac{h}{a-\beta}(a-\alpha)$ zu setzen. Wir erhalten hiernach:

$$D_n=\frac{2h}{a\beta}\int_0^\beta \alpha\sin\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha+\frac{2h}{a(a-\beta)}\int_\beta^a (a-\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha$$
$$=\frac{2a^2h}{\beta(a-\beta)\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi\beta}{a}.$$

Der gesuchte Ausdruck ist daher, zufolge (11):

$$y=f(x)=\frac{2a^2h}{\beta(a-\beta)\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi\beta}{a}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{2^2}\sin\frac{2\pi\beta}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}+\ldots\ldots\right).$$

## II. Die Fourier'schen Formeln.

**476.** Nehmen wir an, es sei in den Formeln (8) und (10) des §. 474:

$$f(x)=0 \quad \text{von } x=0 \text{ bis } x=h,$$
$$f(x)=F(x) \quad \text{von } x=h \text{ bis } x=k,$$
$$f(x)=0 \quad \text{von } x=k \text{ bis } x=a,$$

wo $0<h<k<a$, so ist:

$$\int_0^a f(\alpha)\,d\alpha=\int_0^h 0\cdot d\alpha+\int_h^k F(\alpha)\,d\alpha+\int_k^a 0.\,d\alpha=\int_h^k F(\alpha)\,d\alpha,$$

$$\int_0^a f(\alpha)\,{\cos \atop \sin}\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha=$$
$$=\int_0^h 0\cdot{\cos \atop \sin}\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha+\int_h^k F(\alpha)\,{\cos \atop \sin}\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha+\int_k^a 0\cdot{\cos \atop \sin}\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha=$$
$$=\int_h^k F(\alpha)\,{\cos \atop \sin}\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha,$$

wonach die erwähnten Formeln in folgende sich verwandeln:

$$\frac{1}{a}\int_h^k F(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{a}\sum_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{a}\int_h^k F(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha=F(x)\text{ oder }=0, \quad (m)$$

$$\frac{2}{a}\sum_1^\infty\sin\frac{n\pi x}{a}\int_h^k F(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha=F(x)\text{ oder }=0, \quad (n)$$

wo in beiden Gleichungen von den zwei Werthen rechter Hand der erste oder zweite gilt, je nachdem die positive Grösse $x$ innerhalb

oder ausserhalb des Intervalles $h$ bis $k$ liegt. Für $x=h$ und $x=k$ ist der Werth des Ausdruckes linker Hand $=\frac{1}{2}F(x)$, weil der Voraussetzung zufolge die Funktion $f(x)$ für $x=h$ und $x=k$ zwei Werthe: $F(x)$ und 0 annimmt.

Sei ferner in Gl. (12) §. 474:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= F(x) && \text{von } x=-k \text{ bis } x=+k,\\ \varphi(x) &= 0 && \text{von } x=-a \text{ bis } x=-k,\\ \varphi(x) &= 0 && \text{von } x=+k \text{ bis } x=+a,\end{aligned}$$

so geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{2a}\int_{-k}^{+k}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{a}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}F(\alpha)\cos\frac{n\pi(\alpha-x)}{a}\,d\alpha=F(x)\text{ oder }=0,\quad (p)$$

je nachdem $x$ innerhalb des Intervalles $-k$ bis $+k$, oder ausserhalb desselben liegt; für $x=\pm k$ jedoch ist der Werth des Ausdruckes linker Hand $=\frac{1}{2}F(x)$.

Die Gleichungen ($m$), ($n$), ($p$) gelten für jeden Werth von $a$, wie gross derselbe auch sein mag; lassen wir also $a=\infty$, oder, $\frac{\pi}{a}=\delta$ setzend, $\delta$ unendlich klein werden, so verwandelt sich die Gleichung ($m$), da das 1te Integral verschwindet, in:

$$\lim\frac{2\delta}{\pi}\sum_1^\infty\cos n\delta x\int_h^k F(\alpha)\cos n\delta\alpha\,d\alpha=F(x)\text{ oder }=0,$$

d. i.:

$$\frac{2}{\pi}\lim\delta\int_h^k[\cos\delta x\cos\delta\alpha+\cos 2\delta x\cos 2\delta\alpha+\ldots..]F(\alpha)\,d\alpha=F(x),\text{ u. s. w.},$$

oder, da man, wegen $\frac{2}{\pi}\lim\delta\int_h^k F(\alpha)\,d\alpha=0$, diese Grösse linker Hand hinzufügen kann:

$$\frac{2}{\pi}\lim\delta\int_h^k[1+\cos\delta x\cos\delta\alpha+\cos 2\delta x\cos 2\delta\alpha+\ldots]F(\alpha)\,d\alpha=$$
$$=F(x)\text{ u. s. w.}\qquad (q)$$

Nun hat man bekanntlich [§. 413, Gl. (3)]:

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\lambda=\lim\delta\,[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots.+f(b-\delta)],$$

folglich, $a=0$ und $b=\infty$ setzend:

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,d\lambda=\lim\delta\,[f(0)+f(\delta)+f(2\delta)+\ldots\ldots].$$

Hieraus folgt, mittelst der Substitution $f(\lambda)=\cos\lambda x\cos\lambda\alpha$:

$$\int_0^\infty\cos\lambda x\cos\lambda\alpha\,d\lambda=\lim\delta\,[1+\cos\delta x\cos\delta\alpha+\cos 2\delta x\cos 2\delta\alpha+\ldots],$$

oder wenn wir beiderseits mit $F(\alpha)\,d\alpha$ multipliciren und von $h$ bis $k$ integriren:

$$\int_h^k d\alpha \int_0^\infty \cos\lambda x \cos\lambda\alpha\, F(\alpha)\, d\lambda = \lim\delta \int_h^k [1 + \cos\delta x \cos\delta\alpha + \ldots.]\, F(\alpha)\, d\alpha.$$

Diese Gleichung mit der obigen ($q$) verglichen, gibt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_h^k \cos\lambda x \cos\lambda\alpha\, F(\alpha)\, d\alpha = F(x) \text{ oder } = 0, \tag{1}$$

je nachdem $x$ innerhalb oder ausserhalb des Intervalles $h$ bis $k$ liegt.

Auf dieselbe Art erhält man aus ($n$):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_h^k \sin\lambda x \sin\lambda\alpha\, F(\alpha)\, d\alpha = F(x) \text{ oder } = 0, \tag{2}$$

je nachdem $x$ innerhalb oder ausserhalb des Intervalles $h$ bis $k$ liegt. Für $x = h$ und $x = k$ ist in beiden Formeln (1) und (2) der Werth des Integrals linker Hand $= \frac{1}{2} F(x)$.

Auf gleichem Wege folgt endlich aus ($p$):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-k}^{+k} \cos\lambda(\alpha - x)\, F(\alpha)\, d\alpha = F(x) \text{ oder } = 0, \tag{3}$$

je nachdem $x$ innerhalb oder ausserhalb des Intervalles: $-k$ bis $+k$ liegt. Für $x = \pm k$ ist der Werth des Integrals linker Hand $= \frac{1}{2} F(x)$.

Lassen wir nun die ganz willkürliche Grösse $k$ unendlich gross werden, so ergeben sich hieraus folgende Formeln:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \cos\lambda x \cos\lambda\alpha\, F(\alpha)\, d\lambda d\alpha, \quad 0 \overline{\gtrless} x < \infty \tag{4}$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \sin\lambda x \sin\lambda\alpha\, F(\alpha)\, d\lambda d\alpha, \quad 0 < x < \infty \tag{5}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda(\alpha - x)\, F(\alpha)\, d\lambda d\alpha, \quad -\infty < x < +\infty \tag{6}$$

von welchen die letztere auch in der Form:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda(\alpha - x)\, F(\alpha)\, d\lambda d\alpha, \quad -\infty < x < +\infty \tag{7}$$

geschrieben werden kann, da, wie man sieht, die Funktion unter dem Integralzeichen von der Form $\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda)$ ist.

Mittelst dieser Formeln kann jede Funktion durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden, und dieselben finden in der Analysis, und namentlich in der mathematischen Physik eine sehr ausgedehnte Anwendung. Zunächst mag hier auf den Gebrauch derselben zur Aus-

werthung einfacher bestimmter Integrale hingewiesen werden; man sieht nämlich leicht, dass jede dieser Formeln den Werth eines einfachen bestimmten Integrals darbietet, wenn die Funktion $f(x)$ so beschaffen ist, dass sich die eine auf $\alpha$ bezügliche Integration ausführen lässt.

Setzt man z. B. in den Formeln (4) und (5) $F(x) = e^{-ax}$, so hat man [§. 445, Gl. (15) und (16)]:

$$\int_0^\infty e^{-a\alpha} \cos \lambda\alpha\, d\alpha = \frac{a}{a^2+\lambda^2}, \quad \int_0^\infty e^{-a\alpha} \sin \lambda\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2};$$

hiemit erhält man aus (4) und (5):

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{a^2+\lambda^2}\, d\lambda = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda x}{a^2+\lambda^2}\, d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-ax},$$

Resultate, welche bereits in §. 450 auf anderem Wege gefunden wurden.

Es kann vorkommen, dass man eine Funktion von $x$ benöthigt, welche für alle Werthe von $x$ innerhalb gegebener Grenzen $h$ und $k$ gleich 1, hingegen $=0$ ist für alle Werthe von $x$, welche ausserhalb dieser Grenzen liegen. Die Fourier'schen Formeln bieten solche sogenannte Discontinuitäts-Faktoren dar; so ist, wie aus (1) unmittelbar erhellt, der Ausdruck

$$\frac{2}{\pi F(x)} \int_0^\infty d\lambda \int_h^k \cos \lambda x \cos \lambda\alpha\, F(\alpha)\, d\alpha$$

$= 1$ oder $= 0$, je nachdem $x$ zwischen $h$ und $k$, oder ausserhalb dieser Grenzen liegt, und enthält überdiess noch eine willkürliche Funktion $F(x)$, welche in jedem einzelnen Falle dem Zwecke entsprechend gewählt werden kann.

Die obigen Formeln lassen sich leicht auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausdehnen. So hat man, vermöge (7):

$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(\alpha - x)\, F(\alpha, y)\, d\lambda\, d\alpha;$$

zufolge derselben Gleichung ist aber:

$$F(\alpha,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu(\beta - y)\, F(\alpha, \beta)\, d\mu\, d\beta,$$

somit

$$F(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(\alpha - x) \cos \mu(\beta - y)\, F(\alpha, \beta)\, d\lambda\, d\mu\, d\alpha\, d\beta.$$

Uebrigens bedarf es kaum der Erinnerung, dass in allen diesen Formeln die Grösse unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen endlich sein muss.

## III. Die Euler'schen Integrale.

**477.** Mit diesem Namen bezeichnet man die beiden Integrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{\mu-1}\,dx,$$

weil Euler zuerst die Eigenschaften derselben untersucht hat. Offenbar ist der Werth des ersten eine Funktion von $p$ und $q$, jener des zweiten eine Funktion von $\mu$; man bezeichnet daher ersteres mit $B(p,q)$, letzteres mit $\Gamma(\mu)$, wo $B$ und $\Gamma$ Funktionszeichen bedeuten, und nennt dieselben beziehungsweise die Betafunktion und die Gammafunktion. Diese beiden Funktionen, von welchen namentlich letztere eine wichtige Rolle spielt, sind daher durch die Gleichungen

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{1}$$

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\mu-1}\,dx \tag{2}$$

definirt. Man kann übrigens diese beiden Integrale noch auf eine andere Form bringen. Mittelst der Substitution $x = \frac{z}{1+z}$ verwandelt sich das erstere, wie man leicht findet, in

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}}; \tag{3}$$

das zweite nimmt, wenn man $e^{-x} = z$ setzt, folgende Form an:

$$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{z}\right)^{\mu-1} dz. \tag{4}$$

Wir wollen uns zuvörderst mit der Entwickelung einiger Fundamentaleigenschaften dieser Funktionen beschäftigen.

Aus der Form des Integrals (2) erhellt unmittelbar, dass die Funktion $\Gamma(\mu)$ für jeden negativen Werth von $\mu$ unendlich gross wird, so dass also nur positive Werthe von $\mu$ in Betracht kommen können. Mittelst des Verfahrens der theilweisen Integration erhält man:

$$\int e^{-x}x^{\mu-1}\,dx = \frac{e^{-x}x^\mu}{\mu} + \frac{1}{\mu}\int e^{-x}x^\mu\,dx,$$

woraus für positive Werthe von $\mu$ folgt:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\mu-1}\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-x}x^\mu\,dx,$$

d. i.

$$\mu\Gamma(\mu) = \Gamma(\mu+1). \tag{5}$$

und namentlıng spricht eine charakteristische Eigenschaft der Funk-
Anwendung. Welche, wie man leicht sieht, benützt werden kann, um

den Werth von $\Gamma(\mu)$ für jeden Werth von $\mu$ zu berechnen, sobald die Werthe dieser Funktion von $\mu = 0$ bis $\mu = 1$ bekannt sind.

Für $\mu = 1$ folgt aus (2) unmittelbar

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

Setzt man ferner in (5) der Reihe nach $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ so folgt: $\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 1.2$, $\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 1.2.3.$ u. s. w., und allgemein für jeden ganzen positiven Werth von $\mu$:

$$\Gamma(\mu) = 1.2.3.4\ldots\ldots\ldots(\mu - 1). \tag{6}$$

Der Werth der Funktion $\Gamma(\mu)$ wird daher, wenn $\mu$ eine ganze Zahl ist, durch die Faktorielle $(\mu - 1)!$ ausgedrückt.

Setzen wir in (5) $a + \mu - 1$ statt $\mu$, so kommt:

$$\Gamma(a + \mu) = (a + \mu - 1)\Gamma(a + \mu - 1),$$

und wenn wir in diese Gleichung, an die Stelle von $\mu$, successive $\mu - 1, \mu - 2, \ldots\ldots 3, 2, 1$ treten lassen:

$$\Gamma(a + \mu) = (a + \mu - 1)(a + \mu - 2)\ldots\ldots a\Gamma(a), \tag{7}$$

unter der Voraussetzung, dass $\mu$ eine ganze Zahl.

Für $\mu = \frac{1}{2}$ folgt aus (2):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-z^2}dz,$$

wenn wir $x = z^2$ setzen; der Werth dieses Integrals ist aber $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ [§. 449, Gl. (1)]; folglich ist:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Vermöge (7) hat man nun auch, wenn $\mu$ eine ganze Zahl:

$$\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\left(\mu - \frac{3}{2}\right)\left(\mu - \frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2\mu - 3)(2\mu - 1)}{2^\mu}\sqrt{\pi}. \tag{8}$$

Also:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1.3}{2^2}\sqrt{\pi};\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1.3.5}{2^3}\sqrt{\pi};\ \text{u. s. w.}$$

Man setze in (2) $ax$ statt $x$, wo $a$ positiv vorausgesetzt wird, weil $x$ nur positive Werthe durchläuft, so erhält man:

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-ax} a^\mu x^{\mu - 1} dx,$$

somit

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{\mu - 1} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.\quad a > 0 \tag{9}$$

Hieraus folgt, wenn wir $a=1+z$ und $\mu=p+q$ setzen:

$$\int_0^\infty e^{-(1+z)x} x^{p+q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}}, \quad z > -1.$$

Multipliciren wir beide Theile mit $z^{p-1}\,dz$, und integriren nach $z$ von $z=0$ bis $z=\infty$, so kommt, wenn wir sogleich transponiren und durch $\Gamma(p+q)$ dividiren:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty z^{p-1}\,dz \int_0^\infty e^{-(1+z)x} x^{p+q-1}\,dx.$$

Das Integral linker Hand ist, wie man sieht, die Betafunktion $B(p,q)$. Was das Doppelintegral rechter Hand betrifft, so geht dasselbe durch Umkehrung der Integrationsordnung, und mit Rücksicht auf Gl. (9) und (2) über in:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1}\,dx \int_0^\infty e^{-zx} z^{p-1}\,dz = \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1}\,dx \cdot \frac{\Gamma(p)}{x^p}$$

$$= \Gamma(p)\int_0^\infty e^{-x} x^{q-1}\,dx = \Gamma(p)\,\Gamma(q);$$

es ist demnach:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}} = B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{10}$$

oder auch:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{10*}$$

Die Betafunktion lässt sich daher jederzeit durch drei Gammafunktionen ausdrücken. Der Ausdruck zeigt zugleich, dass die Funktion $B(p,q)$ symmetrisch ist in Bezug auf $p$ und $q$, d. i., dass $B(p,q) = B(q,p)$, oder:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}\,dx,$$

wie sich auch leicht unmittelbar ergibt, wenn man in dem einen dieser Integrale $x=1-z$ setzt.

**478.** Zu einer anderen wichtigen Relation zwischen zwei Gammafunktionen gelangen wir auf folgendem Wege. Es ist bekanntlich, wenn $\alpha$ unendlich abnimmt: $\lim \frac{z^\alpha - 1}{\alpha} = lz$, somit, wenn wir $\alpha = \frac{1}{n}$ setzen, für ein unendlich wachsendes $n$:

$$\lim n\left(z^{\frac{1}{n}} - 1\right) = lz, \quad \text{oder} \quad \lim n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right) = l\frac{1}{z},$$

$$\lim \left[n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\mu-1} = \left(l\frac{1}{z}\right)^{\mu-1},$$

wofür wir schreiben können:

$$\left(l\frac{1}{z}\right)^{\mu-1} = \left[n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\mu-1} + \varepsilon,$$

unter $\varepsilon$ eine Grösse verstanden, welche verschwindet, wenn $n$ unendlich gross wird. Multipliciren wir mit $dz$, und integriren von 0 bis 1, so erhalten wir mit Rücksicht auf (4):

$$\Gamma(\mu) = n^{\mu-1}\int_0^1\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{\mu-1} dz + \int_0^1 \varepsilon dz.$$

Der Werth des Integrals $\int_0^1 \varepsilon dz$ ist, vermöge Gl. (5), §. 442, ein Mittelwerth zwischen jenen Werthen, welche $\varepsilon$ annimmt, wenn $z$ von 0 bis 1 geht, welcher demnach für $n=\infty$ verschwindet, da ja $\varepsilon$, der Voraussetzung nach, für jeden Werth von $z$ Null wird, wenn $n$ unendlich wächst. Setzen wir nun noch in dem ersten Integrale $z=x^n$ so erhalten wir, zur Grenze übergehend:

$$\Gamma(\mu) = \lim\left[n^\mu\int_0^1 (1-x)^{\mu-1}x^{n-1}dx\right] = \lim n^\mu . B(n,\mu),$$

oder

$$\Gamma(\mu) = \lim n^\mu \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(n)}{\Gamma(\mu+n)},$$

d. i.

$$\Gamma(\mu) = \lim \frac{n^\mu . 1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots\ldots(\mu+n-1)}, \tag{11}$$

wenn wir, $n$ als ganze Zahl voraussetzend, für die Funktionen $\Gamma(n)$ und $\Gamma(n+\mu)$ ihre Werthe nach Gleichung (6) und (7) einsetzen.

Die Gl. (11) gilt für jeden Werth von $\mu$; setzen wir aber $\mu<1$ voraus, so können wir auch $1-\mu$ an die Stelle von $\mu$ treten lassen, wodurch wir zur Gleichung:

$$\Gamma(1-\mu) = \lim \frac{n^{1-\mu}.1.2.3\ldots\ldots(n-1)}{(1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)\ldots\ldots(n-\mu)}$$

gelangen. Durch Multiplication derselben mit (11) folgt:

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \lim \frac{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots\ldots(n-1)^2.n}{\mu(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)\ldots\ldots[(n-1)^2-\mu^2](n-\mu)},$$

oder

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)} = \lim \mu\left(1-\frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu^2}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{\mu}{n}\right)$$

$$= \frac{\sin\mu\pi}{\pi}, \text{ [Gl. (24), §. 153, I. Bd.],}$$

somit:

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}. \quad \begin{cases}\mu>0\\ \mu<1.\end{cases} \tag{12}$$

Mittelst dieser Gleichung können die Werthe von $\Gamma(\mu)$ für alle Werthe

von $\mu$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 berechnet werden, sobald die Werthe dieser Funktion von $\mu = 0$ bis $\mu = \frac{1}{2}$ bekannt sind, zu deren Berechnung der folgende §. die Mittel darbieten wird. Für $\mu = \frac{1}{2}$ folgt übrigens aus (12): $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, wie bereits früher gefunden wurde.

Setzt man in Gl. (10): $p + q = 1$, d. i. $q = 1 - p$, und schreibt wieder $\mu$ statt $p$, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}\,dz}{1+z} = \Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}, \quad \begin{cases}\mu > 0\\ \mu < 1\end{cases} \tag{13}$$

und wenn man hier $z = x^n$ und $n\mu = m$ setzt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}. \quad \frac{m}{n} \begin{matrix} < 0 \\ > 1 \end{matrix} \tag{14}$$

**479.** Vermöge der Gl. (11) hat man, $1 + \mu$ statt $\mu$ schreibend:

$$\Gamma(1+\mu) = \lim \frac{n^\mu . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots . n}{(1+\mu)(2+\mu) \ldots\ldots (n+\mu)},$$

somit

$$l\Gamma(1+\mu) = \lim \left[\mu l n - l\left(1+\frac{\mu}{1}\right) - l\left(1+\frac{\mu}{2}\right) - \ldots - l\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\right].$$

Lässt man nun $\mu$ einen echten Bruch bedeuten, so können die hier erscheinenden Logarithmen nach der bekannten Formel:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots \quad x \begin{matrix} > -1 \\ < +1 \end{matrix} \tag{m}$$

in convergirende Reihen entwickelt werden, wodurch man, das Ganze nach Potenzen von $\mu$ ordnend, zu folgendem Resultate gelangt:

$$\begin{aligned} l\Gamma(1+\mu) = & -\mu \lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - ln\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots\right)\mu^2 \\ & - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)\mu^3 \\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots\right)\mu^4 \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}$$

oder

$$l\Gamma(1+\mu) = -K\mu + \frac{1}{2}\Sigma_2\mu^2 - \frac{1}{3}\Sigma_3\mu^3 + \frac{1}{4}\Sigma_4\mu^4 - \ldots\ldots, \tag{15}$$

wenn der Kürze wegen:

$$K = \lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - ln\right),$$

und allgemein:

$$\Sigma_r = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots\ldots in\ inf.$$

gesetzt wird.

Was die Grösse $K$ betrifft, so lässt sich leicht zeigen, dass derselben ein bestimmter endlicher Werth zukomme. Setzt man nämlich:

$$f(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - ln,$$

und beachtet, dass, wie aus Gl. $(m)$ unmittelbar erhellt, für $x < 1$ jederzeit $l(1+x) < x$, also $x > l(1+x)$ ist, so hat man:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + l\left(1 + \frac{1}{2}\right) + l\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots . l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$> 1 + l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} + \ldots\ldots + l\frac{n+1}{n}$$

$$> 1 + l\frac{n+1}{2},$$

somit, beiderseits $ln$ subtrahirend: $f(n) > 1 + l\frac{n+1}{2} - ln$, oder:

$$f(n) > 1 + l\frac{n+1}{n} - l2,$$

folglich, wenn man $n$ unendlich gross werden lässt, wegen $\lim f(n) = K$, und $l2 = 0{,}693\ldots\ldots$: $K > 0{,}3\ldots.$

Anderseits ist:

$$f(n+1) - f(n) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + ln - l(n+1) = \frac{1}{n+1} + l\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + l\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

d. i.

$$f(n+1) - f(n) = -\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right],$$

woraus erhellt, dass die Funktion $f(n)$ mit wachsendem $n$ abnimmt. Endlich ist $f(1) = 1$. Hieraus folgt nun, dass der Werth von $K = \lim f(n)$ zwischen 0,3 und 1 liegt; er ist:

$$K = 0{,}57721\ 56649\ 015\ldots\ldots$$

Die Werthe der Summen $\Sigma$ sind:

$\Sigma_2 = 1{,}64493\ 40668\ 48\ldots\ldots$ $\Sigma_9 = 1{,}00200\ 83928\ 26\ldots$
$\Sigma_3 = 1{,}20205\ 69031\ 59\ldots$ $\Sigma_{10} = 1{,}00099\ 45751\ 27\ldots$
$\Sigma_4 = 1{,}08232\ 32337\ 11\ldots$ $\Sigma_{11} = 1{,}00049\ 41886\ 04\ldots$
$\Sigma_5 = 1{,}03692\ 77551\ 43\ldots$ $\Sigma_{12} = 1{,}00024\ 60865\ 53\ldots$
$\Sigma_6 = 1{,}01734\ 30619\ 84\ldots$ $\Sigma_{13} = 1{,}00012\ 27133\ 47\ldots$
$\Sigma_7 = 1{,}00834\ 92773\ 81\ldots$ $\Sigma_{14} = 1{,}00006\ 12481\ 35\ldots$
$\Sigma_8 = 1{,}00407\ 73561\ 97\ldots$ u. s. w.

Die Reihe (15) ist, ihrer geringen Convergenz wegen, zur Berechnung von $l\Gamma(1+\mu)$ nicht bequem; setzt man aber in derselben $-\mu$ an die Stelle von $\mu$, so erhält man:

$$l\Gamma(1-\mu) = K\mu + \frac{1}{2}\Sigma_2\mu^2 + \frac{1}{3}\Sigma_3\mu^3 + \frac{1}{4}\Sigma_4\mu^4 + \ldots\ldots, \tag{16}$$

und durch Addition von (15) und (16) und Division mit 2:

$$\frac{1}{2}l[\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1-\mu)] = \frac{1}{2}\Sigma_2\mu^2 + \frac{1}{4}\Sigma_4\mu^4 + \ldots\ldots$$

Vermöge der Glgn. (5) und (12) ist aber: $\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \mu\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \dfrac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}$, somit:

$$\frac{1}{2}l\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2}\Sigma_2\mu^2 + \frac{1}{4}\Sigma_4\mu^4 + \ldots\ldots,$$

welcher Werth in (16) substituirt, die Gleichung:

$$l\Gamma(1-\mu) = K\mu + \frac{1}{2}l\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{3}\Sigma_3\mu^3 + \frac{1}{5}\Sigma_5\mu^5 + \ldots\ldots \tag{17}$$

darbietet. Bemerken wir nun noch, dass die Grössen $\Sigma$ sämmtlich von der Form $1+\sigma$ sind, wo $\sigma < 1$, und schreiben aus diesem Grunde die Reihe $\frac{1}{3}\Sigma_3\mu^3 + \frac{1}{5}\Sigma_5\mu^5 + \ldots.$ in der Form:

$$\frac{1}{3}(\Sigma_3 - 1)\mu^3 + \frac{1}{5}(\Sigma_5 - 1)\mu^5 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \ldots.\right),$$

so ist [§. 63, Gl. (6)]: $\frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \ldots. = \frac{1}{2}l\frac{1+\mu}{1-\mu} - \mu$, und wir erhalten:

$$l\Gamma(1-\mu) = \mu(K-1) + \frac{1}{2}l\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{2}l\frac{1+\mu}{1-\mu} + $$
$$+ \frac{1}{3}(\Sigma_3 - 1)\mu^3 + \frac{1}{5}(\Sigma_5 - 1)\mu^5 + \ldots\ldots \tag{18}$$

Hieraus folgt noch, wenn man $-\mu$ an die Stelle von $\mu$ treten lässt:

$$l\Gamma(1+\mu) = \mu(1-K) + \frac{1}{2}l\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi} - \frac{1}{2}l\frac{1+\mu}{1-\mu} -$$
$$- \frac{1}{3}(\Sigma_3 - 1)\mu^3 - \frac{1}{5}(\Sigma_5 - 1)\mu^5 - \ldots. \tag{19}$$

Mittelst einer dieser Formeln kann man nun ohne Schwierigkeit die Werthe von $l\Gamma(\mu)$ berechnen von $\mu > 0$ bis $\mu = \frac{1}{2}$; die Formel (12) liefert sodann die Werthe dieser Funktion von $\mu = \frac{1}{2}$ bis $\mu = 1$, endlich die Formel (5) successive die Funktionswerthe für $\mu > 1$.

Setzt man in (18) $\mu = \frac{1}{2}$, so wird $l\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = l\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = l\sqrt{\pi}$ bekannt, und man erhält:

$$K = 1 + l\frac{2}{3} - \frac{1}{3.2^2}(\Sigma_3 - 1) - \frac{1}{5.2^4}(\Sigma_5 - 1) - \ldots\ldots,$$

welcher Gleichung man sich zur Berechnung von $K$ bedienen kann.

**480.** Auf die Gammafunktion können viele bestimmte Integrale zurückgeführt werden. So hat man z. B., zufolge der Gl. (9), wenn man $z$ statt $x$, und $x$ statt $a$ schreibt:

$$\frac{1}{x^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty e^{-xz} z^{\mu-1} dz, \quad x > 0,$$

und hieraus, beiderseits mit $\cos \alpha x\, dx$ multiplicirend, und von 0 bis $\infty$ integrirend:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x\, dx}{x^\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \cos \alpha x\, dx \int_0^\infty e^{-xz} z^{\mu-1} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty z^{\mu-1} dz \int_0^\infty e^{-xz} \cos \alpha x\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty z^{\mu-1} dz \cdot \frac{z}{\alpha^2 + z^2} \quad \text{[§. 445, Gl. (15)]} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{z^\mu dz}{\alpha^2 + z^2}.\end{aligned}$$

Man setze nun $z = \alpha\sqrt{y}$, wo $\alpha$ positiv vorauszusetzen ist, weil $z$ nur positive Werthe durchläuft, so kommt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^\mu}\, dx &= \frac{\alpha^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{\mu-1}{2}} dy}{1+y} \\ &= \frac{\alpha^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{1}{2}(\mu+1)\pi} \quad \text{[Gl. (13)]},\end{aligned}$$

somit:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^\mu}\, dx = \frac{\alpha^{\mu-1}\pi}{2\Gamma(\mu)\cos \frac{1}{2}\mu\pi}, \quad \alpha > 0, \quad \mu \gtrless \begin{matrix} 0 \\ 1. \end{matrix} \qquad (20)$$

Auf demselben Wege erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x^\mu} dx = \frac{\alpha^{\mu-1}\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}, \quad \alpha > 0, \quad \mu \gtrless {0 \atop 2}. \tag{21}$$

Setzt man in diesen beiden Formeln $\mu = 1 - n$, so wird

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} = \frac{\Gamma(n)\sin n\pi}{\pi} \quad \text{[Gl. (12)]}$$

$$= \frac{2\Gamma(n)\sin\frac{1}{2}n\pi\cos\frac{1}{2}n\pi}{\pi},$$

und $\cos\frac{1}{2}\mu\pi = \cos\frac{1}{2}(1-n)\pi = \sin\frac{1}{2}n\pi$, $\sin\frac{1}{2}\mu\pi = \sin\frac{1}{2}(1-n)\pi = \cos\frac{1}{2}n\pi$, folglich:

$$\int_0^\infty x^{n-1}\cos\alpha x\,dx = \frac{\Gamma(n)\cos\frac{1}{2}n\pi}{\alpha^n}, \quad \alpha > 0 \quad n \gtrless {0 \atop 1}, \tag{22}$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}\sin\alpha x\,dx = \frac{\Gamma(n)\sin\frac{1}{2}n\pi}{\alpha^n}, \quad \alpha > 0 \quad n \gtrless {0 \atop 1}. \tag{23}$$

**481.** Eine vielseitige Anwendung finden die Gammafunktionen bei der Reduktion vielfacher Integrale. Es sei z. B. das Integral

$$J = \iiint \ldots f(x+y+z+\ldots)\, x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots.\, dx dy dz \ldots.$$

vorgelegt, in welchem $f(x+y+z+\ldots.)$ eine beliebige Funktion von $x+y+z+\ldots.$ bezeichnet und die Integrationen sich auf alle positiven Werthe der Veränderlichen erstrecken sollen, welche der Bedingung

$$x + y + z + \ldots\ldots \leqq k$$

Genüge leisten, wo $k$ eine positive Grösse.

Nehmen wir zuerst an, dass nur zwei Veränderliche $x$ und $y$ vorhanden sind, und beachten, dass der Bedingung $x + y \leqq k$ genügt wird, wenn wir $x$ von 0 bis $k$ und $y$ von 0 bis $k - x$ gehen lassen, so haben wir es mit dem Integrale:

$$J = \int_0^k \int_0^{k-x} x^{l-1} y^{m-1} f(x+y)\, dx dy$$

zu thun. Führen wir, zum Behufe der Transformation, zwei neue Veränderliche $\xi$, $\eta$ ein, mittelst der Gleichungen:

$$\xi = x + y, \quad \eta = \frac{x}{x+y},$$

oder

$$x = \xi\eta, \quad y = \xi(1-\eta),$$

so werden die Integrationsgrenzen in Bezug auf $\xi$: 0 und $k$, in Bezug auf $\eta$: 0 und 1, und wir erhalten auf dem in §. 463 betretenen Wege:

$$J=\int_0^k\int_0^1 \xi^{l+m-1}\eta^{l-1}(1-\eta)^{m-1}f(\xi)\,d\xi d\eta =$$

$$=\int_0^k f(\xi)\,\xi^{l+m-1}\,d\xi\int_0^1 \eta^{l-1}(1-\eta)^{m-1}\,d\eta,$$

d. i. zufolge Gl. (10*):

$$J=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\int_0^k f(\xi)\,\xi^{l+m-1}\,d\xi, \tag{24}$$

wodurch das vorgelegte Doppelintegral auf ein einfaches reducirt ist.

Betrachten wir nun das dreifache Integral:

$$J=\iiint f(x+y+z)\,x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\,dxdydz,$$

unter der Voraussetzung, dass die Integrationen sich auf alle Werthe der Veränderlichen erstrecken, welche der Bedingung

$$x+y+z\leqq k$$

Genüge leisten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir nach $x$ von 0 bis $k$, nach $y$ von 0 bis $k-x=y_1$, nach $z$ von 0 bis $k-x-y=y_1-y$ integriren, so dass wir setzen können:

$$J=\int_0^k x^{l-1}\,dx\int_0^{y_1} y^{m-1}\,dy\int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{n-1}\,dz;$$

das Integral

$$\int_0^{y_1} y^{m-1}\,dy\int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{n-1}\,dz$$

ist aber vermöge Gl. (24) gleich

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^{y_1} f(x+\xi)\,\xi^{m+n-1}\,d\xi,$$

wir haben daher wegen $y_1=k-x$:

$$J=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^k x^{l-1}\,dx\int_0^{k-x} f(x+\xi)\,\xi^{m+n-1}\,d\xi,$$

und endlich, wenn wir für das hier eintretende Doppelintegral die Formel (24) nochmals in Anspruch nehmen:

$$J=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n)\,\Gamma(l+m+n)}\int_0^k f(u)\,u^{l+m+n-1}\,du,$$

d. i.

$$J=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\int_0^k f(u)\,u^{l+m+n-1}\,du.$$

Man sieht leicht, dass dieses Verfahren der successiven Reduktion beliebig fortgesetzt werden kann, und dass daher allgemein:

$$\iiint \ldots f(x+y+z+\ldots)\, x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots\, dx dy dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(l+m+n+\ldots)} \int_0^k f(u)\, u^{l+m+n+\ldots-1} du, \qquad (25)$$

wenn die Integration auf alle positiven Werthe von $x, y, z, \ldots$ ausgedehnt wird, für welche

$$x+y+z+\ldots \leqq k.$$

In dem besonderen Falle, wenn $f(x+y+z+\ldots)=1$ ist, hat man $f(u)=1$,

$$\int_0^k f(u)\, u^{l+m+n+\ldots-1} du = \frac{k^{l+m+n+\ldots}}{l+m+n+\ldots},$$

somit, wenn man erwägt, dass $(l+m+n+\ldots)\,\Gamma(l+m+n+\ldots) = \Gamma(1+l+m+n+\ldots)$ ist:

$$\iiint \ldots x^{l-1} y^{m-1} y^{n-1} \ldots\, dx dy dz = \frac{k^{l+m+n+\ldots}\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+l+m+n+\ldots)} \qquad (26)$$

Setzt man in (25) an die Stelle von $x, y, z, \ldots$ beziehungsweise $\left(\frac{x}{a}\right)^p, \left(\frac{y}{b}\right)^q, \left(\frac{z}{c}\right)^r, \ldots$ so erhält man ohne alle Schwierigkeit:

$$\iiint \ldots f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \ldots\right] x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots\, dx dy dz \ldots =$$
$$= \frac{a^l b^m c^n \ldots}{pqr\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}+\ldots\right)} \int_0^k f(u)\,.\,u^{\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}+\ldots-1} du, \qquad (27)$$

wo die Integrationen sich auf alle positiven Werthe von $x, y, z, \ldots$ erstrecken, welche der Bedingung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \ldots \leqq k$$

Genüge leisten.

Durch Specialisirung der Funktion $f(u)$ können aus diesen allgemeinen Formeln zahlreiche specielle abgeleitet werden, und dieselben gestatten mannigfaltige Anwendungen zur Bestimmung der Volumina, Schwerpunkte, Trägheitsmomente, etc.

So drückt bekanntlich [§. 457] das Integral $\iint dx dy$, ausgedehnt auf alle positiven Werthe von $x$ und $y$, für welche $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$, die Fläche des elliptischen Quadranten aus; setzen wir also in (27) $f(u)=1$, $l=m=1$, $p=q=2$, so wird diese Fläche:

$$S = \frac{ab}{4} \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(1)} \int_0^1 du = \frac{1}{4} ab\pi.$$

Das dreifache Integral $\iiint dx dy dz$, ausgedehnt auf alle Werthe von $x, y, z$, welche der Bedingung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqq 1$ Genüge leisten, gibt den achten Theil des Volums des dreiaxigen Ellipsoids; setzen wir wieder in (27), $f(u) = 1$, $l = m = n = 1$, $p = q = r = 2$, so hat man für dieses Volum:

$$\frac{abc}{8} \cdot \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{abc}{8} \frac{(\sqrt{\pi})^3}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} abc\pi \cdot [\S. 468].$$

## IV. Der Integrallogarithmus, Integralsinus und Integralcosinus.

**482.** Das Integral $\int_0^x \frac{dz}{lz}$, welches bekanntlich durch algebraische und die gewöhnlichen transcendenten Funktionen nicht ausgedrückt werden kann, heisst der Integrallogarithmus von $x$, und wird durch $li(x)$ bezeichnet. Die Definition dieser Transcendente ist daher in der Gleichung:

$$li(x) = \int_0^x \frac{dz}{lz} \tag{1}$$

enthalten, wo die Integrationsgrenzen der Bedingung entsprechen, dass das Integral für $x = 0$ verschwinde. Lassen wir zunächst $x < 1$ sein, damit die Grösse unter dem Integralzeichen keine Unterbrechung der Stetigkeit erleide, und setzen $z = e^{-u}$, so wird

$$li(x) = -\int_{-lx}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{u}, \tag{2}$$

oder, wenn $x = e^{-\xi}$ gesetzt wird:

$$li(e^{-\xi}) = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{u}. \tag{3}$$

Hieraus folgt:

$$li(e^{-\xi}) - li(e^{-n}) = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{u} + \int_{n}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{u} = \int_{n}^{\xi} \frac{e^{-u}\, du}{u}, \tag{4}$$

somit, wenn man die Grösse $e^{-u} : u$ in eine unendliche Reihe entwickelt, und gliedweise integrirt:

$$li(e^{-\xi}) - li(e^{-n}) = l\xi - \xi + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$- \left[ln - n + \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{n^3}{1.2.3} + \cdots\right],$$

wobei, wie man sich leicht überzeugt, die Reihe $n - \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{n^3}{1.2.3} - \ldots.$ in der Klammer die Entwickelung des Integrals $\int_0^n \frac{1-e^{-nz}}{z} dz$ ist, und daher durch dieses ersetzt werden kann. Lassen wir nun $n$, als positive ganze Zahl betrachtet, unendlich wachsen, so wird $\lim li(e^{-n}) = li(0) = 0$, und die letzte Gleichung geht über in:

$$li(e^{-\xi}) = l\xi - \xi + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ \lim \left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} dz - ln\right].$$

Zum Behufe der Ausmittelung des Grenzwerthes rechter Hand hat man zunächst, die Grösse in der Klammer Kürze halber mit $K_n$ bezeichnend, identisch:

$$K_n = \int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z} dz - ln - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z} dz,$$

oder, wenn man in dem ersten Integrale $1 - z = u$ setzt, und nach vollzogener Division: $1 - u^n : 1 - u = 1 + u + u^2 + \ldots. + u^{n-1}$, gliedweise integrirt:

$$K_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots. + \frac{1}{n} - ln - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z} dz.$$

Der Werth des hier erscheinenden Integrals lässt sich nun leicht zwischen zwei Grenzen einschliessen. Einerseits ist derselbe nothwendig positiv oder $> 0$, da, wie aus der Gleichung $e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$ erhellt, so lange $z$ die Einheit nicht überschreitet, immer $e^{-z} > 1 - z$, also auch $e^{-nz} > (1-z)^n$ ist.

Ferner ist $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \ldots. + \beta^{n-1}$, somit, wenn wir $\alpha > \beta$ sein lassen, und in jedem der $n$ Glieder des zweiten Theiles $\alpha$ an die Stelle von $\beta$ setzen: $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} < n\alpha^{n-1}$; folglich: $\alpha^n - \beta^n < n\alpha^{n-1}(\alpha - \beta)$, wenn $\alpha > \beta$. Setzen wir hier $\alpha = e^{-z}$, $\beta = 1 - z$, welche Werthe der Bedingung $\alpha > \beta$ Genüge leisten, so haben wir:

$$e^{-nz} - (1-z)^n < ne^{-(n-1)z}[e^{-z} - (1-z)],$$

oder, da $e^{-z} - (1-z) = \frac{z^2}{1.2} - \left(\frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^4}{1.2.3.4}\right) - \ldots.$, also $e^{-z} - (1-z) < \frac{1}{2} z^2$ ist:

$$e^{-nz} - (1-z)^n < \frac{1}{2} n z^2 e^{-(n-1)z},$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z} dz < \frac{1}{2} n \int_0^1 z e^{-(n-1)z} dz.$$

Die Integration rechter Hand lässt sich unmittelbar ausführen, und man gelangt hiedurch, mit Rücksicht auf die schon oben erhaltene untere Grenze $=0$ des in Rede stehenden Integrals, zu folgender Relation:

$$0 < \int_0^1 \frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z} dz < \left[\frac{n}{2(n-1)^2} - \frac{n^2}{2(n-1)^2} e^{-(n-1)}\right],$$

woraus sofort erhellt, dass mit unendlich wachsendem $n$ dieses Integral verschwindet. Daher ist:

$$\lim K_n = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - ln\right) = 0{,}5772\ldots = K, \text{ [§. 479]};$$

folglich:

$$li(e^{-\xi}) = K + l\xi - \xi + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \dots$$

Auf demselben Wege ergibt sich eine Reihe für $li(e^{\xi})$; aus Gl. (4) folgt nämlich:

$$li(e^{\xi}) - li(e^{-n}) = -\int_{-\xi}^{n} \frac{e^{-u} du}{u};$$

Da aber nunmehr die Funktion unter dem Integralzeichen für den innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Werth $u=0$ unendlich gross wird, so haben wir, gemäss der Vorschrift in §. 444:

$$li(e^{\xi}) - li(e^{-n}) = -\left\{\int_{-\xi}^{-\varepsilon} \frac{e^{-u} du}{u} + \int_{\varepsilon}^{n} \frac{e^{-u} du}{u}\right\}$$

zu setzen, unter $\varepsilon$ eine unendlich abnehmende Grösse verstanden. Entwickelt man nun beide Integrale auf dem oben betretenen Wege in Reihen, berücksichtiget, dass $l(-\varepsilon) = l(-1) + l(\varepsilon)$, $l(-\xi) = l(-1) + l(\xi)$, und setzt schliesslich $\varepsilon = 0$, so erhält man:

$$li(e^{\xi}) = K + l\xi + \xi + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \dots \tag{6}$$

Die beiden Formeln (5) und (6) lassen sich in folgende:

$$li(e^{\xi}) = K + \frac{1}{2} l(\xi^2) + \xi + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \dots \tag{7}$$

zusammenziehen; setzt man $e^{\xi} = x$, so folgt hieraus:

$$li(x) = K + \frac{1}{2} l[(lx)^2] + lx + \frac{1}{2}\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \dots \tag{8}$$

**483.** Das Integral $\int_0^x \frac{\sin z}{z} dz$ wird Integralsinus genannt, und mit $Si(x)$ bezeichnet. Durch Entwickelung von $\sin z$ in eine unendliche Reihe erhält man:

$$Si(x) = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. \quad (1)$$

Um für das analoge Integral:

$$Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos z}{z} dz,$$

welches der Integralcosinus heisst, und mit $Ci(x)$ bezeichnet wird, eine Reihenentwickelung zu erhalten, hat man zuvörderst:

$$\int_x^n \frac{\cos z}{z} dz = ln - \frac{1}{2}\frac{n^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{n^4}{4!} - \ldots. - \left\{lx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4!} - \ldots\right\}.$$

Nun ist, wie man leicht findet:

$$-\frac{1}{2}\frac{n^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{n^4}{4!} - \ldots\ldots = -\int_0^n \frac{1-\cos z}{z} dz$$

$$= -\int_0^n \frac{e^{-z} - \cos z}{z} dz - \int_0^n \frac{1-e^{-z}}{z} dz$$

$$= -\int_0^n \frac{e^{-z} - \cos z}{z} dz - \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} dz,$$

indem man nämlich in dem letzten Integrale $nz$ an die Stelle von $z$ setzt. Hiemit wird:

$$Ci(x) = -\left\{lx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\right\}$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos z}{z} dz - \lim \left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} dz - ln\right],$$

folglich, da nach Gl. (7), §. 447:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos z}{z} dz = 0,$$

und zufolge der Entwickelung im vorhergehenden §.:

$$\lim \left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} dz - ln\right] = 0,577\ldots\ldots = K$$

ist:

$$Ci(x) = -K - lx + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \quad (2)$$

## V. Die Elliptischen Integrale.

**484.** Differenzialformeln, welche Quadratwurzeln aus algebraischen Funktionen 2ten Grades enthalten, können bekanntlich jederzeit durch Logarithmen oder Kreisbögen integrirt werden; diess ist nicht mehr möglich, wenn die Differenzialformel eine Quadratwurzel aus einem Polynome 3ten oder 4ten Grades enthält; es wird jedoch später gezeigt werden, dass die Integration solcher Differenzialausdrücke immer auf folgende drei Integrale:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}}, \quad \int \sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}\, d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+n \sin\varphi^2)\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}}$$

zurückgeführt werden kann, welche, da sie durch gewöhnliche Funktionen in endlicher Form nicht dargestellt werden können, als einfache Integrale, als eine besondere Klasse von Transcendenten, zu betrachten sind.

Um die einem allgemeinen Integral immer anhaftende Unbestimmtheit zu beseitigen, wollen wir obige Integrale so bestimmen, dass sie für $\varphi = 0$ verschwinden, und für die so bestimmten Integrale folgende Bezeichnungen einführen:

$$F(c,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}}, \quad E(c,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}\, d\varphi,$$

$$\Pi(n,c,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin\varphi^2)\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}}, \text{*)}$$

so dass die obigen unbestimmten Integrale beziehungsweise durch:

$$F(c,\varphi) + C, \quad E(c,\varphi) + C, \quad \Pi(n,c,\varphi) + C$$

ausgedrückt werden. Bekanntlich wird die Länge eines elliptischen Bogens, vom Endpunkte der kleinen Axe an gezählt bis zu einem Punkte, dessen Abscisse $= x$ ist, ausgedrückt durch:

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2-c^2x^2}{a^2-x^2}}\, dx,$$

---

*) Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass der in den Symbolen: $F(c,\varphi)$, $E(c,\varphi)$, $\Pi(n,c,\varphi)$ vorkommende Buchstabe $\varphi$ die obere Integrationsgrenze bedeutet, und mit der Bezeichnung der veränderlichen Grösse unter dem Integralzeichen nichts zu thun hat; man könnte daher die obigen Gleichungen auch in der Form:

$$F(c,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\omega}{\sqrt{1-c^2 \sin\omega^2}}, \text{ etc. schreiben.}$$

wo $a$ die halbe grosse Axe und $c$ die Excentricität bezeichnet. Mittelst der Substitution $x = a \sin\varphi$ verwandelt sich diese Gleichung in:

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}\, d\varphi = E(c, \varphi).$$

In Folge dieser Eigenschaft der Funktion $E(c, \varphi)$, die Länge eines elliptischen Bogens auszudrücken, und des zwischen diesem und den beiden andern Integralen bestehenden Zusammenhanges, haben die Funktionen $F(c, \varphi)$, $E(c, \varphi)$ $\Pi(n, c, \varphi)$ den Namen elliptische Integrale, und zwar beziehungsweise der ersten, zweiten und dritten Art erhalten.

Die Grösse $c$, welche immer kleiner als 1 vorausgesetzt wird, heisst der Modulus, die unabhängig Veränderliche $\varphi$, oder vielmehr der durch die obere Integrationsgrenze angegebene Werth derselben, wird die Amplitude genannt.

Die elliptischen Integrale heissen vollständige, wenn die obere Integrationsgrenze $= \frac{1}{2}\pi$ ist; man bezeichnet sie kurz mit $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(n, c)$, so dass also

$$F^1(c) = F\left(c, \frac{1}{2}\pi\right),\ E^1(c) = E\left(c, \frac{1}{2}\pi\right),\ \Pi^1(n, c) = \Pi\left(n, c, \frac{1}{2}\pi\right).$$

Es sei $f(c, \varphi)$ irgend eines der drei elliptischen Integrale, und $f^1(c)$ das correspondirende vollständige Integral, so folgen aus der Beschaffenheit der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion, und dem Begriffe eines bestimmten Integrals unmittelbar folgende Relationen:

$$f(c, \varphi) = -f(c, -\varphi),$$

$$f(c, \pi) = 2f\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = 2f^1(c),$$

$$f(c, n\pi) = nf(c, \pi) = 2nf\left(c, \frac{1}{2}\pi\right) = 2nf^1(c),$$

$$f(c, -n\pi) = -f(c, n\pi) = -2nf\left(c, \frac{1}{2}\pi\right) = -2nf^1(c).$$

Setzt man ferner $\varphi = n\pi \pm \psi$, wo $n$ eine positive ganze Zahl, und $\psi$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, so wird $d\varphi = \pm d\psi$, und die Grenzen verwandeln sich beziehungsweise in $\psi = \mp n\pi$ und $\psi = \psi$, während der Coefficient von $d\varphi$ unter dem Integralzeichen (wegen $\sin\varphi^2 = \sin\psi^2$) unverändert bleibt. Man hat daher, wenn man unter den Integralzeichen irgend einen der drei Differentialausdrücke stehend denkt:

$$f(c, n\pi+\psi)=\int_{-n\pi}^{\psi}=\int_{-n\pi}^{0}+\int_{0}^{\psi}=-\int_{0}^{-n\pi}+\int_{0}^{\psi}=$$
$$=2nf\left(c,\frac{1}{2}\pi\right)+f(c,\psi)=2nf^1(c)+f(c,\psi),$$

und

$$f(c, n\pi-\psi)=-\int_{n\pi}^{\psi}=-\int_{n\pi}^{0}-\int_{0}^{\psi}=\int_{0}^{n\pi}-\int_{0}^{\psi}=$$
$$=2nf\left(c,\frac{1}{2}\pi\right)-f(c,\psi)=2nf^1(c)-f(c,\psi).$$

Es ist also allgemein:

$$f(c, n\pi\pm\psi)=2nf^1(c)\pm f(c,\psi).$$

Hieraus erhellt, dass die Werthe der elliptischen Integrale für jeden Werth von $\varphi$ bekannt sind, wenn dieselben für alle Werthe von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ berechnet sind.

### a) Die elliptischen Integrale erster Art.

**485.** Es seien $\varphi$, $\psi$, $\mu$ drei Amplituden, welche durch die Gleichung:

$$\cos\mu=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-c^2\sin\mu^2} \tag{1}$$

mit einander verknüpft sind. Zuvörderst bemerken wir, dass diese Gleichung die beiden folgenden:

$$\cos\psi=\cos\varphi\cos\mu+\sin\varphi\sin\mu\sqrt{1-c^2\sin\psi^2}, \tag{2}$$
$$\cos\varphi=\cos\psi\cos\mu+\sin\psi\sin\mu\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2} \tag{3}$$

unmittelbar nach sich zieht. Um diess einzusehen, machen wir die Gl. (1) rational, wodurch wir, an die Stelle von $\sin\varphi^2\sin\psi^2$ den gleichgeltenden Ausdruck: $1-\cos\varphi^2-\cos\psi^2+\cos\varphi^2\cos\psi^2$ setzend, erhalten:

$$1-\cos\varphi^2-\cos\mu^2=\cos\psi^2-2\cos\varphi\cos\psi\cos\mu+c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2\sin\mu^2,$$

oder, beiderseits $\cos\varphi^2\cos\mu^2$ addirend:

$$1-\cos\varphi^2-\cos\mu^2+\cos\varphi^2\cos\mu^2=$$
$$=\cos\psi^2-2\cos\varphi\cos\psi\cos\mu+\cos\varphi^2\cos\mu^2+c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2\sin\mu^2.$$

Der erste Theil ist, wie man leicht sieht, $=\sin\varphi^2\sin\mu^2$, während die drei ersten Glieder des zweiten Theiles ein vollständiges Quadrat bilden; es ist daher:

$$\sin\varphi^2\sin\mu^2=(\cos\psi-\cos\varphi\cos\mu)^2+c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2\sin\mu^2,$$

oder

$$\sin\varphi^2\sin\mu^2(1-c^2\sin\psi^2)=(\cos\psi-\cos\varphi\cos\mu)^2,$$

d. i.:

$$\sin\varphi \sin\mu \sqrt{1-c^2 \sin\psi^2} = \pm (\cos\psi - \cos\varphi \cos\mu),$$

folglich:

$$\pm \cos\psi = \pm \cos\varphi \cos\mu + \sin\varphi \sin\mu \sqrt{1-c^2 \sin\psi^2}.$$

Nun folgt aus (1) für $c=0$: $\mu = \varphi + \psi$, während die letzte Gleichung für $c=0$ in

$$\pm \cos\psi = \pm \cos\varphi \cos\mu + \sin\varphi \sin\mu = \pm (\cos\varphi \cos\mu \pm \sin\varphi \sin\mu) \text{ d. i.}$$

$$\pm \cos\psi = \pm \cos(\varphi \mp \mu) = \pm \cos(\mu \mp \varphi)$$

sich verwandelt, welche nur bei Annahme der oberen Zeichen die vorige Relation $\mu = \varphi + \psi$ darbietet, daher diese beizubehalten sind, wodurch aber die obige Gleichung in jene (2) übergeht. Auf ähnliche Weise rechtfertiget sich die Gl. (3).

Differenziren wir nun die Gl. (1), indem wir $\varphi$ und $\psi$ als veränderlich, $\mu$ als constant betrachten, und der Kürze wegen

$$\sqrt{1-c^2 \sin\mu^2} = \Delta\mu$$

setzen, so kommt:

$$(\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \Delta\mu)\, d\varphi + (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \Delta\mu)\, d\psi = 0,$$

oder, wenn wir für $\Delta\mu$ den aus Gl. (1) folgenden Werth einführen, nach leichter Reduktion:

$$\sin\psi(\cos\psi - \cos\varphi \cos\mu)\, d\varphi + \sin\varphi(\cos\varphi - \cos\psi \cos\mu)\, d\psi = 0,$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf (2) und (3) in folgende

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2 \sin\psi^2}} = 0 \tag{4}$$

übergeht. Hieraus folgt durch Integration:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}} + \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2 \sin\psi^2}} = Const.,$$

d. i., wenn wir an die Stelle der unbestimmten Integrale die gleichgeltenden Ausdrücke $F(c,\varphi) + C$, $F(c,\psi) + C'$, schreiben, und die diesen anhaftenden willkürlichen Constanten mit jener rechter Hand vereinigen:

$$F(c,\varphi) + F(c,\psi) = Const.$$

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir $\psi = 0$, für welchen Werth einerseits $F(c,\psi) = F(c,0) = 0$ wird, anderseits aus Gl. (1): $\varphi = \mu$ folgt; hiemit wird $F(c,\mu) = Const.$, folglich

$$F(c,\varphi) + F(c,\psi) = F(c,\mu). \tag{5}$$

Diese Gleichung enthält das sogenannte Additionstheorem der elliptischen Integrale 1ter Art; sie lehrt, dass man immer ein solches Integral finden kann, welches der Summe zweier gegebener

Integrale derselben Art gleich ist; sein Modulus ist derselbe; seine Amplitude $\mu$ ergibt sich aus den Glgn. (2) und (3) auf folgende Weise: Setzt man der Kürze wegen:

$$\Delta\varphi = \sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}, \quad \Delta\psi = \sqrt{1-c^2 \sin\psi^2},$$

so erhält man durch Elimination von $\cos\mu$:

$$\sin\mu = \frac{\cos\varphi^2 - \cos\psi^2}{\cos\varphi \sin\psi \Delta\varphi - \sin\varphi \cos\psi \Delta\psi},$$

oder, Zähler und Nenner mit $\cos\varphi \sin\psi \Delta\varphi + \sin\varphi \cos\psi \Delta\psi$ multiplicirend:

$$\sin\mu = \frac{\cos\varphi \sin\psi \Delta\varphi + \sin\varphi \cos\psi \Delta\psi}{1-c^2 \sin\varphi^2 \sin\psi^2}. \tag{6}$$

Ferner durch Substitution dieses Werthes in (2) oder (3):

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \Delta\varphi \Delta\psi}{1-c^2 \sin\varphi^2 \sin\psi^2}, \tag{7}$$

endlich durch Division beider Ausdrücke:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi \Delta\psi + \operatorname{tg}\psi \Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi \Delta\varphi \Delta\psi}. \tag{8}$$

Berechnet man also zwei Hülfswinkel $\theta$, $\theta'$ mittelst der Gleichungen: $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi \Delta\psi$, $\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\psi \Delta\varphi$, so ist $\mu = \theta + \theta'$.

Aus (1) folgt noch, mit Benützung des eben entwickelten Werthes von $\cos\mu$:

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi \Delta\psi - c^2 \sin\varphi \sin\psi \cos\varphi \cos\psi}{1-c^2 \sin\varphi^2 \sin\psi^2}. \tag{9}$$

Setzt man $\mu = \frac{1}{2}\pi$, so folgt aus (5)

$$F(c,\varphi) + F(c,\psi) = F^1(c);$$

zwei Integrale, deren Summe gleich ist dem vollständigen Integral heissen complementäre Integrale; ihre Amplituden sind durch die aus (1) für $\mu = \frac{1}{2}\pi$ folgende Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

mit einander verbunden, mittelst welcher $\psi$ aus $\varphi$ gefunden wird.

Setzt man in Gl. (5) $-\psi$ an die Stelle von $\psi$, und beachtet, dass $F(c, -\psi) = -F(c,\psi)$ ist, so erhält man:

$$F(c,\varphi) - F(c,\psi) = F(c,\mu), \tag{10}$$

welche Gleichung das Subtractionstheorem der elliptischen Integrale 1ter Art enthält. Die Amplitude $\mu$ ergibt sich jetzt aus den Formeln:

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi \cos\psi \Delta\psi - \cos\varphi \sin\psi \Delta\varphi}{1-c^2 \sin\varphi^2 \sin\psi^2}, \tag{11}$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\,\varDelta\varphi\varDelta\psi}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi\varDelta\psi - \operatorname{tg}\psi\varDelta\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\varDelta\varphi\varDelta\psi}. \tag{13}$$

**486.** Man sieht leicht, dass durch wiederholte Anwendung des Additionstheorems, Gl. (5), stets eine Amplitude $\mu$ bestimmt werden könne, welche der Gleichung

$$F(c,\varphi_1) + F(c,\varphi_2) + \ldots\ldots + F(c,\varphi_n) = F(c,\mu)$$

Genüge leistet. Setzen wir $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$, und schreiben $\varphi_n$ statt $\mu$, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$nF(c,\varphi) = F(c,\varphi_n), \tag{14}$$

welche der Multiplication der elliptischen Integrale 1ter Art entspricht; es handelt sich nur noch um die Bestimmung von $\varphi_n$, unter $n$ eine positive ganze Zahl verstanden.

Es seien $\varphi_{n-1}$, $\varphi_n$, $\varphi_{n+1}$ drei aufeinanderfolgende, den Multiplicatoren $n-1$, $n$ und $n+1$ entsprechende Amplituden, so ist vermöge Gl. (14):

$$(n-1)F(c,\varphi) = F(c,\varphi_{n-1}),$$

$$nF(c,\varphi) = F(c,\varphi_n), \qquad (n+1)F(c,\varphi) = F(c,\varphi_{n+1}),$$

somit:

$$F(c,\varphi_{n+1}) = F(c,\varphi_n) + F(c,\varphi),$$

$$F(c,\varphi_{n-1}) = F(c,\varphi_n) - F(c,\varphi);$$

in Folge dieser Gleichungen hat man für die Amplituden $\varphi_{n+1}$ und $\varphi_{n-1}$, gemäss den Formeln (6) und (11), (7) und (12):

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi_{n\pm1} &= \frac{\sin\varphi_n\cos\varphi\varDelta\varphi \pm \cos\varphi_n\sin\varphi\varDelta\varphi_n}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\varphi_n^2},\\ \cos\varphi_{n\pm1} &= \frac{\cos\varphi\cos\varphi_n \mp \sin\varphi\sin\varphi_n\,\varDelta\varphi\varDelta\varphi_n}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\varphi_n^2},\end{aligned}\right\} \tag{m}$$

und hieraus:

$$\frac{\sin\varphi_{n+1}+\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_{n+1}+\cos\varphi_{n-1}} = \operatorname{tg}\varphi_n.\varDelta\varphi, \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}) = \operatorname{tg}\varphi_n.\varDelta\varphi \tag{15}$$

Nun folgt aus (14) für $n=0$: $\varphi_0 = 0$; für $n=1$: $\varphi_1 = \varphi$; setzt man daher in (15) der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi.\varDelta\varphi$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi) = \operatorname{tg}\varphi_2.\varDelta\varphi$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_4+\varphi_2) = \operatorname{tg}\varphi_3.\varDelta\varphi,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

mittelst welcher Formeln der Reihe nach die Werthe von $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots$ berechnet werden können.

Soll $\varphi_n$ so bestimmt werden, dass

$$F(c, \varphi_n) = -\, nF(c, \varphi)$$

sei, so bestimme man zunächst $\varphi_n$ dergestalt, dass $F(c, \varphi_n) = nF(c, \varphi)$ werde, und man hat, vermöge der bekannten Relation: $F(c, -\varphi_n) = -\, F(c, \varphi_n)$, sofort:

$$F(c, -\varphi_n) = -\, nF(c, \varphi). \tag{16}$$

Schreiben wir die Gleichung (14) in der Form:

$$\frac{1}{n} F(c, \varphi_n) = F(c, \varphi),$$

und betrachten $\varphi_n$ als die bekannte, und $\varphi$ als die unbekannte Grösse, so ist in dieser Gleichung das Problem der Division der elliptischen Integrale 1ter Art ausgesprochen. Die Bestimmung der Amplitude $\varphi$ erfordert im Falle der Theilung durch $n$ die Auflösung einer Gleichung vom Grade $n^2$. So erhält man z. B. für die Theilung durch 2, in der zweiten der Glgn. $(m)$ $n = 1$ setzend:

$$\cos \varphi_2 = \frac{\cos \varphi^2 - \sin \varphi^2 \varDelta \varphi^2}{1 - c^2 \sin \varphi^4}, \tag{17}$$

oder als Unbekannte $\sin \varphi = x$ einführend:

$$\cos \varphi_2 = \frac{1 - 2x + c^2 x^4}{1 - c^2 x^4}.$$

Ist endlich überhaupt, wenn $m$ und $n$ ganze Zahlen sind, $\psi$ so zu bestimmen, dass

$$F(c, \psi) = \frac{m}{n} F(c, \varphi) \tag{18}$$

ist, so setze man, da hieraus $nF(c, \psi) = mF(c, \varphi)$ folgt,

$$nF(c, \psi) = F(c, \mu), \quad mF(c, \varphi) = F(c, \mu);$$

Die erste dieser Gleichungen liefert nach dem Vorausgehenden eine Gleichung zwischen $\psi$ und $\mu$, die zweite eine Gleichung zwischen $\varphi$ und $\mu$, und durch Elimination von $\mu$ aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich eine Gleichung zwischen $\psi$ und $\varphi$, mittelst welcher sich $\psi$ aus $\varphi$ finden lässt.

Fast man die Ergebnisse dieses und des vorhergehenden Paragraphen zusammen, so erkennt man, dass, wenn $m, n, p, q, \ldots\ldots$ positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale Zahlen bedeuten, die Summe:

$$mF(c, \varphi) + nF(c, \psi) + pF(c, \chi) + \ldots\ldots \tag{19}$$

jederzeit in ein einziges elliptisches Integral $F(c, \mu)$ von demselben Modulus zusammengezogen werden kann, dessen Amplitude $\mu$ aus

$\varphi, \psi, \chi, \ldots$ durch algebraische Operationen entwickelt werden kann, wenn man hier Gleichungen, in welchen die goniometrischen Funktionen von $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ nur durch algebraische Operationen verknüpft sind, als algebraische gelten lässt.

**487.** Es sei

$$u = F(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin \varphi^2}},$$

wo also $u$ den irgend einem bestimmten Werthe $\varphi$ der Amplitude entsprechenden Werth der Funktion $F(c, \varphi)$ bedeutet, so ist umgekehrt $\varphi$ der diesem Werthe $u$ der Funktion $F(c, \varphi)$ zugehörige Werth der Amplitude, eine Beziehung, welche wir durch das Symbol:

$$\varphi = \operatorname{am} u\,{}^{*})$$

ausdrücken wollen. Setzen wir nun noch

$$v = F(c, \psi), \quad w = F(c, \mu),$$

und

$$F(c, \varphi) \pm F(c, \psi) = F(c, \mu) \text{ oder } u \pm v = w,$$

so bestehen zwischen den Amplituden $\varphi = \operatorname{am} u$, $\psi = \operatorname{am} v$, $\mu = \operatorname{am} w = \operatorname{am}(u \pm v)$, im Falle der oberen Zeichen, die durch die Glgn. (6), (7), (8), im Falle der unteren Zeichen, die durch die Glgn. (11), (12) und (13) [§. 485] ausgedrückten Relationen, welche wir nunmehr in folgender Form schreiben können:

$$\sin \operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} v \pm \cos \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 (\sin \operatorname{am} u)^2 (\sin \operatorname{am} v)^2}, \tag{20}$$

$$\cos \operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\cos \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v \mp \sin \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1 - c^2 (\sin \operatorname{am} u)^2 (\sin \operatorname{am} v)^2}, \tag{21}$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v \pm \operatorname{tg} \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 \mp \operatorname{tg} \operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}. \tag{22}$$

Man bemerkt leicht die Analogie dieser Formeln mit den goniometrischen:

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v, \text{ etc.}$$

welch' letztere in der That aus den ersteren hervorgehen, wenn man den Modulus $c = 0$ setzt, wodurch $\operatorname{am} u = u$ und $\Delta \operatorname{am} u = 1$ wird. Die Funktionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, etc. werden in neuerer Zeit — im Gegensatz zu den elliptischen Integralen — vorzugsweise elliptische

---

*) Diese Gleichung ist also, wie man sieht, die Umkehrung der Gleichung $u = F(c, \varphi)$, ebenso, wie z. B. die Gl. $x = \operatorname{tg} u$ die Umkehrung der Gleichung $u = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ist.

Funktionen genannt; die Theorie derselben, in welche hier nicht weiter eingegangen werden kann, geht von obigen Grundformeln aus ebenso, wie bekanntlich die gesammte Goniometrie aus den Formeln für $\sin(u \pm v)$, $\cos(u \pm v)$ entwickelt werden kann.

**488.** Es seien $c$, $c_1$ zwei Moduli und $\varphi$, $\varphi_1$ zwei Amplituden, welche beziehungsweise mittelst der Gleichungen

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \tag{23}$$

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = c \sin\varphi \tag{24}$$

von einander abhängen. Aus (24) folgt: $\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2} = \varDelta\varphi$; man hat daher:

$$\sin 2\varphi_1 \cos\varphi - \cos 2\varphi_1 \sin\varphi = c \sin\varphi,$$

$$\sin 2\varphi_1 \sin\varphi + \cos 2\varphi_1 \cos\varphi = \varDelta\varphi;$$

hieraus:

$$\cos 2\varphi_1 = \cos\varphi \,.\, \varDelta\varphi - c \sin\varphi^2,$$

und vermöge der Relation $2\sin\varphi_1{}^2 = 1 - \cos 2\varphi_1$:

$$2\sin\varphi_1{}^2 = 1 - \cos\varphi\, \varDelta\varphi + c \sin\varphi^2. \tag{m}$$

Durch Differenziation der Gleichung: $\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \varDelta\varphi$ ergibt sich nun:

$$-\sin(2\varphi_1 - \varphi)(2d\varphi_1 - d\varphi) = d\varDelta\varphi = -\frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (24)

$$2d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}(\varDelta\varphi + c\cos\varphi). \tag{n}$$

Anderseits erhält man mit Benützung der Glgn. (23) und ($m$):

$$\sqrt{1 - c_1{}^2 \sin\varphi_1{}^2} = \varDelta\varphi_1 = \frac{\varDelta\varphi + c\cos\varphi}{1+c},$$

und durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorhergehenden:

$$\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{2}{1+c}\,\frac{d\varphi_1}{\varDelta\varphi_1};$$

integrirt man diese Gleichung und lässt beide Integrale mit $\varphi = \varphi_1 = 0$ anfangen, so kommt:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}} = \frac{2}{1+c} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - c_1{}^2 \sin\varphi_1{}^2}},$$

oder in der eingeführten Bezeichnung:

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c_1, \varphi_1). \tag{25}$$

Wegen $c < 1$ ist $(1+c)^2 < 4$; $\frac{4c}{(1+c)^2} > c > c^2$, also $\frac{2\sqrt{c}}{1+c} > c$, d. i. $c_1 > c$. Anderseits bleibt bei obiger Bestimmung von $c_1$, immer $c_1 < 1$; denn da $c < 1$, so hat man $(1-c)^2 > 0$, $1-2c+c^2 > 0$, also $1+c^2 > 2c$, $(1+c)^2 > 4c$, $1+c > 2\sqrt{c}$, $1 > \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, d. i. $c_1 < 1$. Ferner ist wegen $c < 1$: $\sin(2\varphi_1 - \varphi) < \sin\varphi$, $2\varphi_1 - \varphi < \varphi$, somit $\varphi_1 < \varphi$.

Mittelst der Gl. (25) in Verbindung mit jenen (23) und (24), kann man daher ein elliptisches Integral 1[ter] Art in ein anderes mit grösserem Modulus und kleinerer Amplitude verwandeln.

Die Gl. (25) in umgekehrter Form geschrieben:

$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi), \tag{26}$$

dient dazu, um ein elliptisches Integral $F(c_1, \varphi_1)$ auf ein anderes von kleinerem Modulus und grösserer Amplitude zu reduciren; in diesem Falle sind $c$ und $\varphi$ als Unbekannte zu betrachten, für welche man aus den Glgn. (23) und (24) ohne Schwierigkeit die Werthe findet:

$$c = \frac{1-\sqrt{1-c_1^2}}{1+\sqrt{1-c_1^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{c + \cos 2\varphi_1}. \tag{27}$$

**489.** Die so eben vorgetragenen Sätze gewähren ein sehr bequemes Mittel zur näherungsweisen Berechnung des elliptischen Integrals $F(c, \varphi)$, wobei man sich entweder der Gleichung (25) oder (26) bedienen kann. Im 1[ten] Falle berechne man, von dem gegebenen Modulus $c$ und der gegebenen Amplitude $\varphi$ ausgehend, eine Reihe, die sogenannte Skale, der Moduli $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_n$ nach den Formeln:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \ldots\ldots\ldots \quad c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}}, \tag{28}$$

so wie eine Reihe von Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi_1 - \varphi) &= c \sin\varphi, \\ \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) &= c_1 \sin\varphi_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= c_{n-1} \sin\varphi_{n-1}, \end{aligned} \tag{29}$$

so hat man, vermöge Gl. (25):

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c_1, \varphi_1),$$

$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+c_1} F(c_2, \varphi_2), \ldots\ldots F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{2}{1+c_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$

folglich:

$$F(c,\varphi)=\frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\cdot\frac{2}{1+c_2}\cdots\cdots\frac{2}{1+c_{n-1}}F(c_n,\varphi_n),$$

oder, mit Rücksicht auf die Glgn. (28):

$$F(c,\varphi)=\sqrt{c_n}\sqrt{\frac{c_1c_2c_3\ldots\ldots c_n}{c}}F(c_n,\varphi_n).$$

Die Reihe der Moduli ist eine steigende, und man wird sehr bald zu einem solchen gelangen, welcher, mit Rücksicht auf den beabsichtigten Grad der Genauigkeit, $=1$ angenommen werden kann. Ist $c_n$ dieser Modulus und $\varphi_n=\Phi$ die correspondirende Amplitude, welche, wie aus den Glgn. (29) erhellt, einen Grenzwerth der Bögen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ darstellt, so hat man

$$F(c_n,\varphi_n)=\int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin\varphi^2}}=l\,\mathrm{tg}\left(45^0+\frac{1}{2}\Phi\right),$$

somit:

$$F(c,\varphi)=l\,\mathrm{tg}\left(45^0+\frac{1}{2}\Phi\right)\sqrt{\frac{c_1c_2c_3\ldots\ldots}{c}}. \qquad (30)$$

Will man sich hingegen der Formel (26) bedienen, so berechne man eine Skale abnehmender Moduli und wachsender Amplituden nach den Formeln:

$$c_1=\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{1+\sqrt{1-c^2}},\ c_2=\frac{1-\sqrt{1-c_1^2}}{1+\sqrt{1-c_1^2}},\ \ldots c_n=\frac{1-\sqrt{1-c^2_{n-1}}}{1+\sqrt{1-c^2_{n-1}}}, \qquad (31)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1=\frac{\sin2\varphi}{c+\cos2\varphi},\ \mathrm{tg}\,\varphi_2=\frac{\sin2\varphi_1}{c_1+\cos2\varphi_1},\ \ldots.\ \mathrm{tg}\,\varphi_n=\frac{\sin2\varphi_{n-1}}{c_{n-1}+\cos2\varphi_{n-1}}; \qquad (32)$$

man hat dann nach Gl. (26):

$$F(c,\varphi)=\frac{1+c_1}{2}F(c_1,\varphi_1),$$

$$F(c_1,\varphi_1)=\frac{1+c_2}{2}F(c_2,\varphi_2),\ \ldots.\ F(c_{n-1},\varphi_{n-1})=\frac{1+c_n}{2}F(c_n,\varphi_n),$$

folglich:

$$F(c,\varphi)=\frac{1+c_1}{2}\cdot\frac{1+c_2}{2}\cdots\cdots\frac{1+c_n}{2}F(c_n,\varphi_n).$$

Die abnehmenden Moduli $c_1, c_2, \ldots$ nähern sich sehr rasch der Grenze 0; ist nun mit genügender Genauigkeit, $c_n=0$, und $\varphi_n$ die correspondirende Amplitude, so hat man:

$$F(c_n,\varphi_n)=\int_0^{\varphi_n}d\varphi=\varphi_n,$$

somit, wenn $\frac{\varphi_n}{2^n}=\Phi$ gesetzt wird:

$$F(c,\varphi)=\Phi.(1+c_1)(1+c_2)(1+c_3)\ldots.., \qquad (33)$$

welche Formel in so ferne noch etwas einfacher ist, als jene (30), als sie keinen logarithmischen Faktor enthält. Man wird sich daher in der Regel dieser Formel bedienen; nur wenn $c$ sehr nahe an 1 liegt, gewährt die Rechnung mit steigenden Modulis nach (30) den Vortheil einer rascheren Näherung.

Die etwas unbequeme Rechnung nach den Formeln (31) und (32) erleichtert man sich durch Einführung von Hülfswinkeln $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots.$ mittelst der Gleichungen:

$$c = \sin\lambda,\ c_1 = \sin\lambda_1,\ c_2 = \sin\lambda_2,\ \ldots\ldots;$$

man hat dann, wie man sehr leicht findet:

$$\begin{aligned} \sin\lambda &= c, & \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) &= \cos\lambda \operatorname{tg}\varphi, \\ \sin\lambda_1 &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda^2, & \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) &= \cos\lambda_1 \operatorname{tg}\varphi_1, \\ \sin\lambda_2 &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda_1^2, & \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) &= \cos\lambda_2 \operatorname{tg}\varphi_2, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned} \tag{34}$$

$$F(c,\varphi) = \Phi\sqrt{\frac{\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos\lambda_3 \ldots\ldots}{\cos\lambda}}. \tag{35}$$

Man sieht leicht, dass mittelst dieser Formeln auch die umgekehrte Aufgabe gelöst werden kann, nämlich die Amplitude $\varphi$ zu bestimmen, welche zu einem gegebenen Werthe $u$ des Integrals $F(c,\varphi)$ gehört. Berechnet man nämlich zunächst, den ersteren der beiden angeführten Wege betretend, die Skale $c_1, c_2, c_3, \ldots. c_n$ der steigenden Moduli bis zu jenem $c_n$, welcher $=1$ gesetzt werden kann, so folgt aus (30), da $\Phi = \varphi_n$:

$$l \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_n\right) = u\sqrt{\frac{c}{c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots\ldots}},$$

woraus sich $\varphi_n$ ergibt; aus diesem Werthe leitet man successive mittelst der Formeln (29), zurückrechnend, die Werthe von $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots\ldots \varphi_2, \varphi_1$ und endlich $\varphi = \sin \operatorname{am} u$ ab.

Ganz ähnlich ist das Verfahren, wenn man sich zu diesem Zwecke der Formeln (33) oder (35) bedienen will.

### b) Die elliptischen Integrale zweiter Art.

**490.** Das elliptische Integral zweiter Art ist durch die Gleichung

$$E(c,\varphi) = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}$$

definirt. Um zuvörderst zu einem Fundamentaltheoreme für diese Integrale zu gelangen, betrachten wir zwei ähnlich geformte: $E(c,\varphi)$ und $E(c,\psi)$, schreiben dieselben in der Form:

$$E(c,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{(1-c^2\sin\varphi^2)\,d\varphi}{\Delta\varphi};\quad E(c,\psi)=\int_0^\psi\frac{(1-c^2\sin\psi^2)\,d\psi}{\Delta\psi},\quad (m)$$

wo, wie bisher, $\Delta\varphi=\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}$ ist, und nehmen wieder an, dass die beiden Amplituden $\varphi$, $\psi$ mittelst der Gleichung (1), §. 485:

$$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\mu=\cos\mu \quad (1)$$

von einander abhängen, welche Gleichung bekanntlich [§. 485] die Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}=0, \quad (4)$$

und

$$F(c,\varphi)+F(c,\psi)=F(c,\mu) \quad (5)$$

nach sich zieht, wenn $\mu$ als constant betrachtet wird.

Diess vorausgesetzt, differenziren wir die beiden Gleichungen $(m)$, und erhalten durch Addition derselben:

$$dE(c,\varphi)+dE(c,\psi)=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}-c^2\left[\sin\varphi^2\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\sin\psi^2\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right],$$

d. i. mit Rücksicht auf (4):

$$dE(c,\varphi)+dE(c,\psi)=c^2(\sin\psi^2-\sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \quad (n)$$

Durch Differenziation der Gl. (1) ergibt sich aber, da $\mu$ constant ist:

$$\Delta\mu\,.\,d(\sin\varphi\sin\psi)=-\sin\varphi\cos\psi\,d\varphi-\cos\varphi\sin\psi\,d\psi,$$

oder nach Elimination von $d\psi$ mit Hülfe der Gl. (4):

$$\Delta\mu\,.\,d(\sin\varphi\sin\psi)=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}(\cos\varphi\sin\psi\Delta\psi-\sin\varphi\cos\psi\Delta\varphi).$$

Anderseits zieht man aus den Glgn. (6) und (9) [§. 485] durch Division:

$$\frac{\sin\mu}{\Delta\mu}=\frac{\cos\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi+\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi}{\Delta\varphi\,\Delta\psi-c^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi},$$

und erhält durch Multiplication dieser Gleichung mit der vorhergehenden nach leichter Reduction:

$$\sin\mu\,.\,d(\sin\varphi\sin\psi)=(\sin\psi^2-\sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \quad (p)$$

Hiemit verwandelt sich die Gl. $(n)$ in:

$$dE(c,\varphi)+dE(c,\psi)=c^2\sin\mu\,.\,d(\sin\varphi\sin\psi),$$

woraus durch Integration folgt:

$$E(c,\varphi)+E(c,\psi)=Const.+c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi.$$

Beachtet man nun, dass für $\psi=0$, kraft der Gl. (1), $\varphi=\mu$ wird, so hat man, da $E(c,0)=0$ ist: $E(c,\mu)=Const.$, somit:

$$E(c,\varphi)+E(c,\psi)=E(c,\mu)+c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi. \quad (36)$$

Das in dieser Gleichung ausgesprochene Theorem ist, wie man sieht, analog jenem in Gl. (5) für elliptische Integrale erster Art enthaltenen, indem vermöge desselben immer ein elliptisches Integral zweiter Art, $E(c,\mu)$, angegeben werden kann, welches unter Zusatz einer algebraischen Grösse der Summe zweier Integrale gleicher Art von demselben Modulus gleich ist; zur Bestimmung der Amplitude $\mu$ dienen die aus (1) folgenden Formeln (6), (7), (8), §. 485.

Für $\mu = \frac{1}{2}\pi$ verwandelt sich Gl. (36) in:

$$E(c,\varphi) + E(c,\psi) = E^1(c) + c^2 \sin\varphi \sin\psi, \qquad (37)$$

wo die beiden Amplituden $\varphi$, $\psi$ mittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

von einander abhängen.

**491.** Es seien wieder, wie in §. 488, $c$, $c_1$ zwei Moduli, und $\varphi$, $\varphi_1$ zwei Amplituden, welche durch die Gleichungen:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \ldots (23), \quad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = c \sin\varphi \ldots\ldots (24)$$

mit einander verbunden sind, aus welchen, auf dem dort betretenen Wege, die Relationen:

$$d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{c\cos\varphi + \Delta\varphi}{2}$$

und $\qquad (n)$

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

sich ergeben. Durch Elimination von $d\varphi_1$ erhält man hieraus:

$$(1+c)\sqrt{1-c_1^2 \sin\varphi_1^2} = c\cos\varphi + \Delta\varphi,$$

und durch Multiplication dieser Gleichung mit jener $(n)$:

$$(1+c)\Delta\varphi_1\, d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{(c\cos\varphi + \Delta\varphi)^2}{2}$$

$$= \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{c^2\cos\varphi^2 + 2c\cos\varphi\,\Delta\varphi + \Delta\varphi^2}{2}$$

$$= \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{c^2 - 1 + 2\Delta\varphi^2 + 2c\cos\varphi\,\Delta\varphi}{2},$$

d. i.

$$(1+c)\Delta\varphi_1 \cdot d\varphi_1 = d\varphi \cdot \Delta\varphi - \frac{1-c^2}{2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + c\cos\varphi\, d\varphi.$$

Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich:

$$(1+c)\,E(c_1,\varphi_1) = E(c,\varphi) - \frac{1-c^2}{2}F(c,\varphi) + c\sin\varphi, \tag{38}$$

woraus erhellt, dass jedes elliptische Integral erster Art durch zwei elliptische Integrale zweiter Art ausgedrückt werden kann.

**492.** Um zu einer bequemen Methode zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $E(c,\varphi)$ zu gelangen, betrachten wir das allgemeinere Integral:

$$G = \int_0^\varphi \frac{A+B\sin\varphi^2}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}\,d\varphi = \int_0^\varphi (A+B\sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{39}$$

welches für $A=1$, und $B=-c^2$ in $E(c,\varphi)$ sich verwandelt. Setzen wir:

$$c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1},\quad \sin(2\varphi-\varphi_1) = c_1\sin\varphi_1,$$

aus welchen Gleichungen, auf dem in §. 488 betretenen Wege ($c$, $\varphi$ mit $c_1$, $\varphi_1$ vertauschend) die Relationen:

$$\sin\varphi^2 = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi_1\Delta\varphi_1 + c_1\sin\varphi_1^2),$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1+c_1}{2}\cdot\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

sich ergeben, so geht das obige Integral, durch Substitution dieser Werthe von $\sin\varphi^2$ und $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ über in:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1+c_1}{2}\int_0^{\varphi_1}\left(A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}Bc_1\sin\varphi_1^2-\frac{1}{2}B\cos\varphi_1\Delta\varphi_1\right)\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} \\ &= \frac{1+c_1}{2}\int_0^{\varphi_1}\left(A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}Bc_1\sin\varphi_1^2\right)\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \frac{1+c_1}{2}\cdot\frac{B}{2}\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$A_1 = A+\frac{1}{2}B,\quad B_1 = \frac{1}{2}Bc_1,$$

so wird:

$$G = \frac{1+c_1}{2}\int_0^{\varphi_1}(A_1+B_1\sin\varphi_1^2)\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi} - \frac{1+c_1}{2}\,\frac{B}{2}\sin\varphi_1,$$

oder

$$G = \frac{1+c_1}{2}\left(G_1 - \frac{1}{2}B\sin\varphi_1\right), \tag{40}$$

wo das Integral

$$G_1 = \int_0^{\varphi_1}(A_1+B_1\sin\varphi_1^2)\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

aus $A_1$, $B_1$, $c_1$, $\varphi_1$ eben so gebildet ist, wie $G$ aus $A$, $B$, $c$, $\varphi$.

Diess vorausgesetzt, berechnen wir, von den gegebenen Werthen $c$, $\varphi$ ausgehend, eine Skale abnehmender Moduli und die entsprechenden Amplituden mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, & \sin(2\varphi - \varphi_1) &= c_1 \sin\varphi_1, \\ c_1 &= \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}, & \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) &= c_2 \sin\varphi_2, \\ &\dots\dots & &\dots\dots \\ c_{n-1} &= \frac{2\sqrt{c_n}}{1+c_n}, & \sin(2\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= c_n \sin\varphi_n, \end{aligned} \tag{41}$$

und setzen, die obige Reihe der Integrale $G$, $G_1$ fortsetzend:

$$G_2 = \int_0^{\varphi_2} (A_2 + B_2 \sin\varphi_2^2) \frac{d\varphi_2}{\varDelta\varphi_2}, \dots\dots G_n = \int_0^{\varphi_n} (A_n + B_n \sin\varphi_n^2) \frac{d\varphi_n}{\varDelta\varphi_n},$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= A + \frac{1}{2}B, & B_1 &= \frac{1}{2}Bc_1, \\ A_2 &= A_1 + \frac{1}{2}B_1, & B_2 &= \frac{1}{2}B_1 c_2, \\ &\dots\dots & &\dots\dots \\ A_n &= A_{n-1} + \frac{1}{2}B_{n-1}, & B_n &= \frac{1}{2}B_{n-1} c_n, \end{aligned} \tag{42}$$

ist, so hat man, vermöge der Gl. (40):

$$\begin{aligned} G &= \frac{1+c_1}{2}\left(G_1 - \frac{1}{2}B \sin\varphi_1\right), \\ G_1 &= \frac{1+c_2}{2}\left(G_2 - \frac{1}{2}B_1 \sin\varphi_2\right), \\ G_2 &= \frac{1+c_3}{2}\left(G_3 - \frac{1}{2}B_2 \sin\varphi_3\right), \\ &\dots\dots\dots \\ G_{n-1} &= \frac{1+c_n}{2}\left(G_n - \frac{1}{2}B_{n-1} \sin\varphi_n\right). \end{aligned}$$

Multipliciren wir nun die zweite dieser Gleichungen mit $\frac{1+c_1}{2}$, die dritte mit $\frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2}$, u. s. w., die letzte mit $\frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} \dots \frac{1+c_{n-1}}{2}$, und addiren dieselben, so kommt:

$$\begin{aligned} G = \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} \dots\dots \frac{1+c_n}{2} G_n - \\ - \frac{1}{2}\Big[\frac{1+c_1}{2} B \sin\varphi_1 + \frac{1+c_1}{2} \cdot \frac{1+c_2}{2} B_1 \sin\varphi_2 + \dots \\ + \frac{1+c_1}{2} \dots \frac{1+c_n}{2} B_{n-1} \sin\varphi_n\Big]. \end{aligned} \tag{m}$$

Aus den Glgn. (42) ergibt sich übrigens noch durch successive Substitution:

$$B_1 = \frac{c_1}{2}B,\ B_2 = \frac{c_1 c_2}{2^2}B, \ldots\ldots B_n = \frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_n}{2^n}B, \qquad (n)$$

$$A_n = A + \frac{1}{2}B\left(1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 c_2}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n-1}}{2^{n-1}}\right).$$

Vermöge der zwischen den Modulis $c$, $c_1$, $c_2$, .... bestehenden Relationen (41) nehmen diese Grössen ab und nähern sich rasch der Grenze 0; es sei nun, mit Rücksicht auf den beabsichtigten Grad der Genauigkeit $c_n = 0$, so ist auch $B_n = 0$, $\varDelta\varphi_n = 1$, somit:

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} A_n d\varphi_n = A_n \varphi_n.$$

Setzen wir also:

$$\frac{\varphi_n}{2^n} = \varPhi,\ \lim A_n = \alpha,$$

wo also

$$\alpha = A + \frac{1}{2}B\left(1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 c_2}{2^2} + \frac{c_1 c_2 c_3}{2^3} + \ldots\right), \qquad (43)$$

ist, so erhalten wir:

$$G = \alpha\varPhi(1 + c_1)(1 + c_2)(1 + c_3) \ldots\ldots - P,$$

wo der Kürze halber mit $P$ das eingeklammerte Polynom im zweiten Theile der Gl. ($m$) bezeichnet ist. Dieses Polynom erhält eine einfachere Form, wenn wir bemerken, dass

$$\frac{1 + c_1}{2} = \frac{\sqrt{c_1}}{c},\ \frac{1 + c_2}{2} = \frac{\sqrt{c_2}}{c_1},\ \frac{1 + c_3}{2} = \frac{\sqrt{c_3}}{c_2}, \ldots\ldots$$

ist, also, mit Rücksicht auf die Glgn. ($n$):

$$\frac{1 + c}{2}B = \frac{\sqrt{c_1}}{c}B,\ \frac{1 + c_1}{2} \cdot \frac{1 + c_2}{2}B_1 = \frac{1}{2}B\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{c},$$

$$\frac{1 + c_1}{2} \cdot \frac{1 + c_2}{2} \cdot \frac{1 + c_3}{2} \cdot B_2 = \frac{1}{4}B\frac{\sqrt{c_1 c_2 c_3}}{c}, \text{ u. s. w.}$$

Erinnert man sich nun noch, dass [§. 489, Gl. (33)]:

$$\varPhi \cdot (1 + c_1)(1 + c_2)(1 + c_3) \ldots\ldots = F(c, \varphi),$$

ist, so hat man:

$$\int_0^{\varphi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}} d\varphi =$$

$$= F(c, \varphi)\left[A + \frac{1}{2}B\left(1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 c_2}{4} + \frac{c_1 c_2 c_3}{8} + \ldots\right)\right] -$$

$$- \frac{B}{c}\left[\frac{\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1 + \frac{\sqrt{c_1 c_2}}{4}\sin\varphi_2 + \frac{\sqrt{c_1 c_2 c_3}}{8}\sin\varphi_3 + \ldots\ldots\right]. \qquad (44)$$

Hieraus folgt für $A=1$, $B=-c^2$:

$$E(c,\varphi)=F(c,\varphi)\left[1-\frac{1}{2}c^2\left(1+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{4}c_1c_2+\frac{1}{8}c_1c_2c_3+\ldots\right)\right]+$$
$$+c\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{c_1c_2}\sin\varphi_2+\frac{1}{8}\sqrt{c_1c_2c_3}\sin\varphi_3+\ldots\right]. \quad (45)$$

Für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ wird $\varphi_1=\pi$, $\varphi_2=2\pi$, .... somit das vollständige Integral:

$$E^1(c)=F^1(c)\left[1-\frac{1}{2}c^2\left(1+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{4}c_1c_2+\frac{1}{8}c_1c_2c_3+\ldots\right)\right]. \quad (46)$$

Zur Berechnung der Grössen $c_1$, $c_2$, ...., $\varphi_1$, $\varphi_2$, .... kann man sich wieder mit Vortheil der Formeln (34), §. 489 bedienen.

**493.** Die Länge des, vom Endpunkte der kleinen Axe gezählten elliptischen Bogens $BM$ (Fig. 54) wird bekanntlich [§. 459, Beisp. 2] ausgedrückt durch:

$$BM=a\int_0^\varphi\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}\,d\varphi,$$

wenn $a$ die halbe grosse Axe, $c$ die Excentricität bezeichnet, und $\varphi$ den Winkel $BCm$ bedeutet, welchen die kleine Axe mit dem Halbmesser des Punktes $m$ bildet, in welchem der über der grossen Axe construirte Kreis, von der Ordinate des Endpunktes $M$ des Bogens geschnitten wird. Es ist demnach, wie schon in §. 484 bemerkt wurde, der elliptische Bogen

$$BM=aE(c,\varphi),$$

woraus für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$: $AB=aE^1(c)$ folgt; der elliptische Quadrant wird also durch das vollständige elliptische Integral 2ter Art ausgedrückt.

Die Gl. (37) mit $a$ multiplicirt, lautet:

$$aE(c,\varphi)+aE(c,\psi)=aE^1(c)+ac^2\sin\varphi\sin\psi,$$

mit der entsprechenden Amplitudengleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{a}{b}.$$

Schreibt man die erstere Gleichung in der Form:

$$aE(c,\varphi)-[aE^1(c)-aE(c,\psi)]=ac^2\sin\varphi\sin\psi,$$

so drückt sie den von Fagnani gefundenen Satz aus, dass sich zu jedem vom Endpunkte der kleinen Axe gezählten Bogen ein anderer vom Endpunkte der grossen Axe gezählter Bogen angeben lässt, welcher von ersterem um eine algebraische Grösse differirt.

Da, wenn man $\varphi$ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen lässt, $\psi$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 abnimmt, so muss es einen Werth von $\varphi$ geben, für welchen $\varphi=\psi$ wird; er bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi^2 = \frac{a}{b} \text{ oder } \sin\varphi^2 = \frac{a}{a+b},$$

und es wird für diesen Werth obige Differenz:

$$ac^2 \sin\varphi \sin\psi = ac^2 \sin\varphi^2 = a - b;$$

d. h. es gibt immer einen Punkt $M$ in der Ellipse, für welchen die Differenz der beiden Bogen $BM$ und $AM$ der Differenz der Halbaxen gleich ist.

Analoge Eigenschaften bietet die Lemniscate dar. Wir haben in §. 459 für den vom Endpunkte $A$ der Axe $AA'$ (Fig. 57) gezählten Bogen $AM = s$ den Ausdruck:

$$s = e\sqrt{2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin\theta^2}}$$

erhalten, wo $e = OF = OF'$, $\theta = \angle AOM$. Mittelst der Substitution $\sin\theta\sqrt{2} = \sin\varphi$ verwandelt sich derselbe in

$$s = e\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varphi^2}} = eF\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right),$$

und wird demnach durch ein elliptisches Integral 1ter Art ausgedrückt, dessen Amplitude $\varphi$ aus der Gl.: $\sin\varphi = \sin\theta\sqrt{2}$ sich bestimmt, dessen Modulus aber constant und $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

In ähnlicher Weise können die elliptischen Integrale bei der Rectification der Hyperbel benützt werden. Es seien $a$, $b$ die erste und zweite Halbaxe, $e = \sqrt{a^2+b^2}$ die lineare Excentricität, $OP = x$, $MP = y$ (Fig. 65) die Coordinaten eines Punktes $M$ der Hyperbel. Machen wir $OD = \frac{b^2}{e}$ (gleich dem Abstande der Richtlinie vom Brennpunkte), ziehen durch den Punkt $D$ die $VV'$ senkrecht auf $OA$, $ME$ senkrecht auf $VV'$, und nehmen wir den Winkel $AOE = \varphi$ als neue unabhängige Veränderliche, so wird $y = \frac{b^2}{e}\operatorname{tg}\varphi$, welcher Werth, in die Gleichung der Hyperbel: $b^2x^2 = a^2y^2 + a^2b^2$ substituirt, für $x$ den Ausdruck:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}$$

darbietet, wenn der Kürze wegen

$$c = \frac{a}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$dy = \frac{b^2 d\varphi}{e \cos\varphi^2}, \quad dx = \frac{a(1-c^2)\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^2 \sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

und man erhält durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, als Ausdruck des Bogens $s = AM$, wenn man bedenkt, dass derselbe für $\varphi = 0$ verschwindet:

$$s = \frac{b^2}{e}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 \sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Differenzirt man aber den Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\varphi \sqrt{1-c^2\sin\varphi^2} = \operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi,$$

so kommt:

$$\begin{aligned} d(\operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi) &= \frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^2} - \frac{c^2 \sin\varphi^2\, d\varphi}{\Delta\varphi} \\ &= \frac{1 - c^2\sin\varphi^2 - c^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{\cos\varphi^2\,\Delta\varphi}\, d\varphi \\ &= \frac{1 - c^2 + c^2\cos\varphi^2 - c^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{\cos\varphi^2\,\Delta\varphi}\, d\varphi \\ &= \frac{1 - c^2 - (1-c^2)\cos\varphi^2 + \cos\varphi^2\Delta\varphi^2}{\cos\varphi^2\,\Delta\varphi}\, d\varphi, \end{aligned}$$

d. i.

$$d(\operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi) = \frac{(1-c^2)\, d\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta\varphi} - \frac{(1-c^2)\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \Delta\varphi\, d\varphi. \qquad (m)$$

Hieraus folgt, wenn man von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ integrirt, und beachtet, dass $1 - c^2 = \frac{b^2}{e^2}$ ist:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi = \frac{b^2}{e^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\Delta\varphi} - \frac{b^2}{e^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^\varphi \Delta\varphi \,.\, d\varphi,$$

folglich, wenn man den hyperbolischen Bogen $s = AM$ mit $H(c, \varphi)$ bezeichnet:

$$H(c, \varphi) = \frac{b^2}{e} F(c, \varphi) - eE(c, \varphi) + e \operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi.$$

Ein hyperbolischer Bogen kann demnach immer durch ein elliptisches Integral erster und zweiter Art ausgedrückt werden.

Verbindet man diese Gleichung mit jener (38) so erhält man:

$$H(c, \varphi) = eE(c, \varphi) - 2e(1 + c)\, E(c_1, \varphi_1) + e \operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi + 2ec\sin\varphi,$$

wo $c_1$ und $\varphi_1$ den Gleichungen (23) und (24) zu entnehmen sind. Diese Gleichung spricht den von Landen gefundenen Satz aus, dass jeder hyperbolische Bogen $H(c, \varphi)$ durch die beiden elliptischen Bögen $E(c, \varphi)$ und $E(c_1, \varphi_1)$ sich ausdrücken lässt.

c) Die elliptischen Integrale dritter Art.

**494.** Das elliptische Integral dritter Art ist durch die Gleichung

$$\Pi(n, c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin\varphi^2)\,\Delta\varphi}$$

definirt, wo, wie bisher, $\Delta\varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}$ ist, und $n$ eine beliebige positive oder negative Zahl bedeutet, welche der Parameter genannt werden mag. Gehen wir wieder von den Gleichungen:

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\mu, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0$$

aus, so ist:

$$d\Pi(n, c, \varphi) + d\Pi(n, c, \psi) = \frac{d\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\,\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{(1 + n\sin\psi^2)\,\Delta\psi}$$

$$= n \,.\, \frac{d\varphi}{\Delta\psi} \,.\, \frac{\sin\psi^2 - \sin\varphi^2}{(1 + n\sin\varphi^2)(1 + n\sin\psi^2)},$$

d. i. vermöge der, schon in §. 490 benützten Relation

$$\sin\mu \,.\, d(\sin\varphi\sin\psi) = (\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}:$$

$$d\Pi(n, c, \varphi) + d\Pi(n, c, \psi) = \frac{n\sin\mu \,.\, d(\sin\varphi\sin\psi)}{(1 + n\sin\varphi^2)(1 + n\sin\psi^2)}$$

$$= \frac{n\sin\mu\,dq}{1 + np + n^2q^2},$$

wenn wir

$$\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 = p, \quad \sin\varphi\sin\psi = q$$

setzen. Es ist aber:

$$\cos\varphi\cos\psi = \sqrt{1 - \sin\varphi^2} \,.\, \sqrt{1 - \sin\psi^2} = \cos\mu + q\Delta\mu,$$

woraus folgt:

$$1 - p + q^2 = \cos\mu^2 + 2q\cos\mu\,\Delta\mu + q^2\Delta\mu^2,$$

$$p = \sin\mu^2 - 2q\cos\mu\,\Delta\mu + c^2q^2\sin\mu^2.$$

Setzt man diesen Werth in den zweiten Theil der obigen Gleichung ein und integrirt, so kommt:

$$\Pi(n, c, \varphi) + \Pi(n, c, \psi) =$$

$$= \int_0^q \frac{n\sin\mu\,dq}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\Delta\mu + nq^2(n + c^2\sin\mu^2)} + C,$$

wobei das Integral rechter Hand so genommen werden mag, dass es für $q = 0$ verschwinde. Für $\psi = 0$ wird dann gleichzeitig $q = 0$, $J = 0$, $\varphi = \mu$, $\Pi(n, c, \psi) = \Pi(n, c, 0) = 0$, somit $C = \Pi(n, c, \mu)$, und daher $\quad \Pi(n, c, \varphi) + \Pi(n, c, \psi) = \Pi(n, c, \mu) + J,$

wenn wir mit $J$ das besagte Integral bezeichnen. Aus Gl. (1) §. 424 findet man nun sehr leicht

$$\int_0^q \frac{dq}{A+Bq+Cq^2} = \frac{2}{\sqrt{4AC-B^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{q\sqrt{4AC-B^2}}{2A+Bq},$$

welches Integral, mit $n \sin\mu$ multiplicirt, in $J$ übergeht, wenn

$$A = 1 + n \sin\mu^2,\quad B = -2n\cos\mu\,\Delta\mu,\quad C = n(n + c^2 \sin\mu^2)$$

gesetzt wird. Die Substitution dieser Werthe gibt, nach leichter Reduktion:

$$\sqrt{4AC-B^2} = 2n \sin\mu\sqrt{\alpha},$$

$$2A + Bq = 2(1 + n - n\cos\varphi\cos\psi\cos\mu),$$

wo der Kürze wegen:

$$(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right) = \alpha$$

gesetzt ist. Hiemit erhalten wir endlich:

$$\Pi(n,c,\varphi) + \Pi(n,c,\psi) =$$

$$\Pi(n,c,\mu) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} \frac{n\sqrt{\alpha}\,\sin\varphi\sin\psi\sin\mu}{1+n-n\cos\varphi\cos\psi\cos\mu}. \tag{47}$$

Für ein negatives $\alpha$ verwandelt sich auf bekannte Weise das mit arc tg behaftete Zusatzglied in einen logarithmischen Ausdruck.

Das in der Gl. (47) ausgedrückte Theorem ist, wie man sieht, analog den beiden, in den Gleichungen:

$$F(c,\varphi) + F(c,\psi) = F(c,\mu)$$

$$E(c,\varphi) + E(c,\psi) = E(c,\mu) + c^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\mu,$$

für elliptische Integrale erster und zweiter Art ausgesprochenen Sätzen; das Zusatzglied, welches für Integrale erster Art verschwindet, ist für jene der zweiten Art ein algebraischer Ausdruck, während es bei den Integralen dritter Art von einem Kreisbogen oder Logarithmus abhängt. Auch hier dienen selbstverständlich wieder die Formeln (6), (7), (8), §. 485, zur Bestimmung von $\mu$ aus $\varphi$ und $\psi$.

**495.** Unter den zahlreichen merkwürdigen Beziehungen, welche zwischen diesen Integralen bestehen, wollen wir noch folgende besonders hervorheben. Es sei

$$z = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi},$$

so hat man, diese Gleichung differenzirend, nach leichter Reduktion:

$$dz = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{1 - c^2 \sin\varphi^4}{\cos\varphi^2 \cdot \Delta\varphi^2},$$

und durch Division mit der identischen Gleichung:

$$1 + \alpha z^2 = \frac{\varDelta\varphi^2 + \alpha \operatorname{tg}\varphi^2}{\varDelta\varphi^2}$$

ergibt sich:

$$\frac{dz}{1+\alpha z^2} = \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} \cdot \frac{1 - c^2 \sin\varphi^4}{\cos\varphi^2 \varDelta\varphi^2 + \alpha \sin\varphi^2}.$$

Es sei nun wieder, wie oben:

$$\alpha = (1+n)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right),$$

so wird, durch Substitution dieses Werthes, der Nenner

$$\cos\varphi^2 \varDelta\varphi^2 + \alpha\sin\varphi^2 = (1 + n\sin\varphi^2)\left(1 + \frac{c^2}{n}\sin\varphi^2\right),$$

somit:

$$\frac{dz}{1+\alpha z^2} = \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} \cdot \frac{1 - c^2\sin\varphi^4}{(1+n\sin\varphi^2)\left(1 + \frac{c^2}{n}\sin\varphi^2\right)},$$

oder:

$$\frac{dz}{1+\alpha z^2} = \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}\left\{\frac{1}{1+n\sin\varphi^2} + \frac{1}{1+\frac{c^2}{n}\sin\varphi^2} - 1\right\};$$

hieraus folgt durch Integration, da $\varphi$ mit $z$ verschwindet:

$$\int_0^z \frac{dz}{1+\alpha z^2} = \Pi(n, c, \varphi) + \Pi\left(\frac{c^2}{n}, c, \varphi\right) - F(c, \varphi); \qquad (m)$$

es ist aber

$$\int_0^z \frac{dz}{1+\alpha z^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} z\sqrt{\alpha},$$

folglich:

$$\Pi(n, c, \varphi) + \Pi\left(\frac{c^2}{n}, c, \varphi\right) = F(c, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\alpha}\,.\operatorname{tg}\varphi}{\varDelta\varphi}, \qquad (48)$$

wo

$$\alpha = (1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right).$$

Ist der Parameter $n$ negativ, so hat man, unter $n$ seinen Zahlenwerth verstanden:

$$\Pi(-n, c, \varphi) + \Pi\left(-\frac{c^2}{n}, c, \varphi\right) = F(c, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\alpha}\,.\operatorname{tg}\varphi}{\varDelta\varphi}, \qquad (49)$$

und

$$\alpha = (1-n)\left(1-\frac{c^2}{n}\right).$$

Wenn $n$ positiv, so ist offenbar auch $\alpha$ immer positiv. Ist aber $n$ negativ, so wird, da immer $c^2 < 1$:

$\alpha$ positiv, wenn $c^2 < n < 1$,

$\alpha$ negativ, wenn $0 < n < c^2$, oder wenn $n > 1$;

für den Fall eines negativen $\alpha$ tritt dann an die Stelle der Gl. (49) die folgende:

$$\Pi(-n, c, \varphi) + \Pi\left(-\frac{c^2}{n}, c, \varphi\right) = F(c, \varphi) + \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}}\, l\, \frac{\Delta\varphi + \sqrt{-\alpha}\,.\,\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi - \sqrt{-\alpha}\,.\,\operatorname{tg}\varphi}. \tag{50}$$

Ist, dem Zahlenwerthe nach, $n > c$, so ist $\frac{c^2}{n} < c$; mittelst der vorstehenden Formeln ist man daher immer im Stande, die Funktion $\Pi(n, c, \varphi)$, wenn $n > c$, auf eine andere von demselben Modulus und derselben Amplitude zurückzuführen, deren Parameter kleiner ist, als der Modulus.

Obige Formeln werden unbrauchbar, wenn $n = -c^2$, oder $n = -1$ ist, weil dann $\alpha = 0$ wird; diese beiden Specialfälle lassen sich jedoch leicht unmittelbar erledigen. In der That geht für beide Fälle obige Gl. ($m$) über in:

$$\int_0^z dz = \Pi(-1, c, \varphi) + \Pi(-c^2, c, \varphi) - F(c, \varphi),$$

d. i. mit Rücksicht auf den Werth von $z$:

$$\Pi(-1, c, \varphi) + \Pi(-c^2, c, \varphi) = F(c, \varphi) + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{$n$}$$

Es ist nun, vermöge der Definition der Funktion $\Pi$:

$$\Pi(-1, c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 \Delta\varphi};$$

die Gl. ($m$), §. 493, gibt aber, von $\varphi = 0$, bis $\varphi = \varphi$ integrirt:

$$\operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi = (1 - c^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 \Delta\varphi} - (1 - c^2)\, F(c, \varphi) + E(c, \varphi);$$

folglich ist:

$$\Pi(-1, c, \varphi) = F(c, \varphi) - \frac{1}{1 - c^2} E(c, \varphi) + \frac{\operatorname{tg}\varphi \,.\, \Delta\varphi}{1 - c^2}. \tag{51}$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Gl. ($n$) erhält man dann:

$$\Pi(-c^2, c, \varphi) = \frac{1}{1 - c^2} E(c, \varphi) - \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - c^2)\,.\,\Delta\varphi}. \tag{52}$$

Für $n = \pm c$ wird $\alpha = (1 \pm c)^2$, folglich, vermöge der Gl. (48):

$$\Pi(c, c, \varphi) = \frac{1}{2} F(c, \varphi) + \frac{1}{2(1 + c)} \operatorname{arc\,tg} \frac{(1 + c)\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{53}$$

$$\Pi(-c, c, \varphi) = \frac{1}{2} F(c, \varphi) + \frac{1}{2(1 - c)} \operatorname{arc\,tg} \frac{(1 - c)\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}. \tag{54}$$

**496.** Zur näherungsweisen Berechnung der Funktion $\Pi(n, c, \varphi)$ kann man ein ähnliches Verfahren, wie früher bei der Berechnung der Funktion $E(c, \varphi)$ in Anwendung bringen. Dabei ist immer die Voraussetzung gestattet, dass, dem Zahlenwerthe nach, $n < c$ sei, da die Specialfälle: $n = -1$, $n = -c^2$, $n = \pm c$ bereits in den Formeln (51) bis (54) erledigt sind, der Fall $n > c$ aber mittelst der Formeln (48) bis (50) auf jenen: $n < c$ reducirt werden kann.

Betrachten wir nun das allgemeinere Integral:

$$L = \int_0^\varphi \frac{A + B \sin\varphi^2}{1 + n \sin\varphi^2} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

welches für $A = 1$, $B = 0$, in $\Pi(n, c, \varphi)$ übergeht. Schreiben wir dasselbe in der Form:

$$L = \int_0^\varphi \frac{A + nA \sin\varphi^2 + (B - nA)\sin\varphi^2}{1 + n \sin\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

und setzen:

$$A = a, \quad B - nA = b, \tag{55}$$

so wird

$$L = \int_0^\varphi \left\{a + \frac{b \sin\varphi^2}{1 + n \sin\varphi^2}\right\} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Mittelst der, schon wiederholt [§. 489 u. 492] benützten Substitution:

$$c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1 + c_1}, \quad \sin(2\varphi - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1,$$

woraus noch

$$\sin\varphi^2 = \frac{1}{2}(1 + c_1 \sin\varphi_1^2 - \cos\varphi_1 \varDelta\varphi_1),$$

und

$$\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{1 + c_1}{2} \cdot \frac{d\varphi_1}{\varDelta\varphi_1}$$

folgt, verwandelt sich dieses Integral in:

$$L = \frac{1 + c_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \left\{a + \frac{\frac{1}{2}b(1 + c_1 \sin\varphi_1^2 - \cos\varphi_1 \varDelta\varphi_1)}{1 + \frac{1}{2}n(1 + c_1 \sin\varphi_1^2 - \cos\varphi_1 \varDelta\varphi_1)}\right\} \frac{d\varphi_1}{\varDelta\varphi_1}, \tag{m}$$

welches wieder, durch Einführung der Hülfsgrössen:

$$c'^2 = 1 - c^2,$$

$$n_1 = \frac{n(n + c^2)}{(1 + n)(1 + c')^2}, \quad b_1 = b \frac{c^2 + 2n + n^2}{2(1 + n)^2 (1 + c')^2},$$

in folgendes übergeht:

$$L = \frac{1+c_1}{2}\int_0^{\varphi_1}\left\{a + \frac{b}{2(1+n)} + \frac{b_1 \sin\varphi_1^2}{1+n_1\sin\varphi_1^2}\right\}\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} -$$

$$-\frac{1+c_1}{2}\cdot\frac{b}{2(1+n)}\int_0^{\varphi_1}\frac{\cos\varphi_1\, d\varphi_1}{1+n_1\sin\varphi_1^2}.\text{*)}$$

*) Um diese Transformation zu bewerkstelligen, multiplicire man Zähler und Nenner des in der Klammer der Gl. $(m)$ stehenden Bruches mit

$$1+\frac{1}{2}n(1+c_1\sin\varphi_1^2+\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1),$$

so wird der Nenner:

$$=1+n(1+c_1\sin\varphi_1^2)+\frac{1}{4}n^2(1+2c_1\sin\varphi_1^2+c_1^2\sin\varphi_1^4-\cos\varphi_1^2\,\Delta\varphi_1^2),$$

$$=1+n+n\sin\varphi_1^2\left[\frac{1}{4}(1+c_1^2)+c_1\left(1+\frac{1}{2}n\right)\right].$$

Aus der Gleichung $c=\frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}$ folgt aber:

$$c_1=\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{1+\sqrt{1-c^2}}=\frac{1-c'}{1+c'},\quad 1+c_1^2=\frac{2(1+c'^2)}{(1+c')^2},$$

womit die in $n\sin\varphi_1^2$ multiplicirte Grösse sich verwandelt in:

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{1+c'^2}{(1+c')^2}+\frac{1-c'}{1+c'}\left(1+\frac{1}{2}n\right)=\frac{n+c^2}{(1+c')^2};$$

nach Substitution dieses Werthes wird der Nenner

$$=1+n+\frac{n(n+c^2)}{(1+c')^2}\sin\varphi_1^2$$

$$=(1+n)\left[1+\frac{n(n+c^2)}{(1+n)(1+c')^2}\sin\varphi_1^2\right]=(1+n)(1+n_1\sin\varphi_1^2).$$

Der Zähler wird durch die erwähnte Multiplication:

$$=\frac{1}{2}b(1+c_1\sin\varphi_1^2-\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1)+\frac{1}{4}bn(1+2c_1\sin\varphi_1^2+c_1^2\sin\varphi_1^4-\cos\varphi_1^2\,\Delta\varphi_1^2)$$

$$=\frac{1}{2}b\left[1+c_1\sin\varphi_1^2+\frac{1}{2}n(1+c_1)^2\sin\varphi_1^2\right]-\frac{1}{2}b\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1,$$

oder, wenn man die Werthe: $c_1=\frac{1-c'}{1+c'}$, $1+c_1=\frac{2}{1+c'}$ einsetzt, und in der Klammer die Grösse:

$$n_1\sin\varphi_1^2-\frac{n(n+c^2)}{(1+n)(1+c')^2}\sin\varphi_1^2=0$$

addirt:

$$=\frac{1}{2}b\left[1+n_1\sin\varphi_1^2-\frac{n(n+c^2)}{(1+n)(1+c')^2}\sin\varphi_1^2+\frac{1-c'}{1+c'}\sin\varphi_1^2+\frac{2n}{(1+c')^2}\sin\varphi_1^2\right]-$$

$$-\frac{1}{2}b\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1$$

$$=\frac{1}{2}b\left[1+n_1\sin\varphi_1^2+\frac{c^2+2n+n^2}{(1+n)(1+c')^2}\sin\varphi_1^2\right]-\frac{1}{2}b\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1$$

$$=\frac{1}{2}b(1+n_1\sin\varphi_1^2)+(1+n)\,b_1\sin\varphi_1^2-\frac{1}{2}b\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1.$$

Die Substitution des so transformirten Bruches in die Gl. $(m)$ führt sofort zu der im Texte angeführten Form.

Setzen wir daher noch

$$a_1 = a + \frac{b}{2(1+n)},$$

$$L_1 = \int_0^{\varphi_1} \left(a_1 + \frac{b_1 \sin\varphi_1^2}{1+n_1\sin\varphi_1^2}\right) \frac{d\varphi_1}{\varDelta\varphi_1},$$

so wird:

$$L = \frac{1+c_1}{2}\left\{L_1 - \frac{b}{2(1+n)}\int_0^{\varphi_1}\frac{\cos\varphi_1\, d\varphi_1}{1+n_1\sin\varphi_1^2}\right\}.$$

Nun ist

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{1+n\sin\varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\varphi}\frac{d.\sqrt{n}\sin\varphi}{1+n\sin\varphi^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n}.\sin\varphi)}{\sqrt{n}},$$

folglich, wenn wir allgemein die Funktion:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n_i}\sin\varphi_i)}{\sqrt{n_i}} = [n_i, \varphi_i]$$

setzen:

$$L = \frac{1+c_1}{2}\left\{L_1 - \frac{b}{2(1+n)}[n_1, \varphi_1]\right\}.$$

Es sei nun $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ eine Skale abnehmender Moduli mit den zugehörigen Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$, welche, von den gegebenen Grössen $c$, $\varphi$ ausgehend, mittelst der Formeln (41), §. 492, oder (31), (32), §. 489, zu berechnen sind. Setzt man dann der Kürze halber

$$1+c_1 = k_1,\ 1+c_2 = k_2,\ 1+c_3 = k_3, \ldots\ldots$$

$$1-c^2 = c'^2,\ 1-c_1^2 = c'^2_1,\ 1-c_2^2 = c'^2_2, \ldots\ldots$$

ferner:

$$n_1 = \frac{n(n+c^2)}{(1+n)(1+c')^2},\ a_1 = a + \frac{b}{2(1+n)},\ b_1 = b\frac{c^2+2n+n^2}{2(1+n)^2(1+c')^2}$$

$$n_2 = \frac{n_1(n_1+c_1^2)}{(1+n_1)(1+c'_1)^2},\ a_2 = a_1 + \frac{b_1}{2(1+n_1)},\ b_2 = b_1\frac{c_1^2+2n_1+n_1^2}{2(1+n_1)^2(1+c'_1)^2}, \quad (56)$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

und bezeichnet endlich mit $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ Integrale, welche beziehungsweise aus $a_1, b_1, n_1, c_1, \varphi_1$; $a_2, b_2, n_2, c_2, \varphi_2$; etc. ebenso gebildet sind, wie $L$ aus $a, b, n, c, \varphi$, so bestehen folgende Gleichungen:

$$L = \frac{k_1}{2}\left\{L_1 - \frac{b}{2(1+n)}[n_1, \varphi_1]\right\},$$

$$L_1 = \frac{k_2}{2}\left\{L_2 - \frac{b_1}{2(1+n_1)}[n_2, \varphi_2]\right\},$$

$$L_2 = \frac{k_3}{2}\left\{L_3 - \frac{b_2}{2(1+n_2)}[n_3, \varphi_3]\right\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$L_{r-1} = \frac{k_r}{2}\left\{L_r - \frac{b_{r-1}}{2(1-n_{r-1})}[n_r, \varphi_r]\right\}.$$

Durch Addition derselben, nachdem die 2^te^ mit $\frac{1}{2}k_1$, die 3^te^ mit $\frac{1}{2}k_1 \cdot \frac{1}{2}k_2$, u. s. w., die letzte mit $\frac{1}{2}k_1\frac{1}{2}k_2 \ldots\ldots \frac{1}{2}k_{r-1}$ multiplicirt worden, erhält man:

$$L = k_1 k_2 k_3 \ldots . k_r . \frac{L_r}{2^r} -$$

$$-\left\{\frac{k_1 b}{2^2(1+n)}[n_1, \varphi_1] + \frac{k_1 k_2 b_1}{2^3(1+n_1)}[n_2, \varphi_2] + \ldots + \frac{k_1 k_2 \ldots . k_r b_{r-1}}{2^{r+1}(1+n_{r-1})}[n_r, \varphi_r]\right\}.$$

Die Reihe der Moduli: $c, c_1, c_2, \ldots$ ist bekanntlich eine abnehmende, deren Glieder sich rasch der Nulle nähern; dasselbe gilt, und in noch höherem Grade, von der Reihe der Parameter $n, n_1, n_2, \ldots\ldots$ Um diess einzusehen, setze man:

$$n = \mu c, \quad n_1 = \mu_1 c_1, \quad n_2 = \mu_2 c_2, \ldots\ldots,$$

und beachte, dass $\mu < 1$, da nach unserer Voraussetzung $n < c$ ist. Nun hat man:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{c}{c_1} = \frac{n+c^2}{(1+n)(1+c')^2} \cdot \frac{c}{c_1} =$$

$$= \frac{c(n+c^2)}{(1+n)(1+c')^2} \cdot \frac{1+c'}{1-c'} = \frac{n+c^2}{c(1+n)} = \frac{\mu+c}{1+\mu c},$$

folglich:

$$1 - \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{(1-\mu)(1-c)}{1+\mu c}, \quad 1 + \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{(1+\mu)(1+c)}{1+\mu c}.$$

Die zweiten Theile dieser beiden Gleichungen sind nun, es mag $n$, und in Folge dessen auch $\mu$, positiv oder negativ sein, offenbar stets positiv, weil $\mu$ sowohl, als $c$ kleiner sind als 1. Folglich müssen auch die ersten Thei^1^e gleichzeitig positiv sein, es mag $\frac{\mu_1}{\mu}$ positiv oder negativ sein, was nur dann möglich ist, wenn, dem Zahlenwerthe nach, $\frac{\mu_1}{\mu} < 1$; es ist demnach $\mu_1 < \mu$, und aus denselben Gründen auch $\mu_2 < \mu_1$, $\mu_3 < \mu_2$, u. s. w. Da nun $\mu < 1$, so sind $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ echte Brüche, folglich $n_1 < c_1$, $n_2 < c_2$, u. s. w.

Diess vorausgesetzt sei mit Rücksicht auf den beabsichtigten Grad der Genauigkeit $c_{r-1} = 0$ zu setzen, so ist um so mehr $n_{r-1} = 0$, ferner auch $b_r = 0$, und

$$a_r = \alpha = a + \frac{b}{2(1+n)} + \frac{b_1}{2(1+n_1)} + \frac{b_2}{2(1+n_2)} + \ldots + \frac{b_{r-1}}{2(1+n_{r-1})}, \quad (57)$$

$$L_r = \int_0^{\varphi_r} a_r\, d\varphi_r = a_r \,.\, \varphi_r = 2^r \,.\, \alpha\Phi,$$

wenn

$$\frac{\varphi_r}{2^r} = \Phi$$

gesetzt wird. Man hat daher:

$$\int_0^{\varphi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = k_1 k_2 k_3 \ldots .\, k_r \alpha\Phi -$$

$$-\left\{\frac{k_1 b}{2^2(1+n)}[n_1, \varphi_1] + \frac{k_1 k_2 b_1}{2^3(1+n_1)}[n_2, \varphi_2] + \frac{k_1 k_2 k_3 b_2}{2^4(1+n_2)}[n_3, \varphi_3] + \ldots .\right\}, \quad (58)$$

oder auch:

$$\int_0^{\varphi} \frac{A + B\sin\varphi_2}{1 + n\sin\varphi^2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \alpha\Phi(1 + c)(1 + c_1)(1 + c_2) \ldots\ldots -$$

$$-\frac{1}{2c}\left\{\frac{b\sqrt{c_1}}{1+n}[n_1, \varphi_1] + \frac{b_1\sqrt{c_1 c_2}}{c_1(1+n_1)}[n_2, \varphi_2] + \frac{b_2\sqrt{c_1 c_2 c_3}}{c_1 c_2(1+n_2)} + \ldots\ldots\right\}, \quad (59)$$

wo

$$[n_i, \varphi_i] = \frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{n_i}\,.\sin\varphi_i)}{\sqrt{n_i}}, \text{ wenn } n_i \text{ positiv,}$$

und

$$[n_i, \varphi_i] = \frac{1}{2\sqrt{n_i}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{n_i}\sin\varphi_i}{1 - \sqrt{n_i}\sin\varphi_i}, \text{ wenn } n_i \text{ negativ ist.}$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\varphi_3 = 4\pi$, $\varphi_4 = 8\pi$, u. s. w.; in Folge dessen verschwinden die mit den Funktionen $[n_i, \varphi_i]$ behafteten Glieder, und da $\Phi = \frac{2^{r-1}\pi}{2^r} = \frac{1}{2}\pi$ wird, so hat man für das vollständige Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}\pi\alpha(1 + c)(1 + c_1)(1 + c_2) \ldots . \quad (60)$$

### d) Integration von Differenzialformeln, welche eine Wurzelgrösse aus einem Polynome 4ten Grades enthalten.

**497.** Die allgemeinste Form der Integrale, welche wir im Folgenden betrachten, ist in der Formel $\int F(x, \sqrt{R})\, dx$ enthalten, wo mit $R$ das Polynom 4ten Grades:

$$R = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

bezeichnet ist. Auf diese Form lassen sich übrigens noch viele andere

Integrale zurückführen, z. B. solche, welche zwei Wurzelgrössen 2ten Grades: $\sqrt{a+bx+cx^2}$ und $\sqrt{a_1+b_1x+c_1x^2}$ enthalten, da nach Wegschaffung der einen Wurzelgrösse mittelst der in §. 427 gelehrten Substitutionen, die andere auf den 4ten Grad ansteigt.

Bemerken wir zunächst, dass das obige Integral immer von dem einfacheren: $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ abhängig gemacht werden kann, wo $P$ eine ganze oder gebrochene rationale Funktion bedeutet. Denn wie auch die Funktion $F(x, \sqrt{R})$ beschaffen sein mag, so kann sie doch immer auf die Form: $\frac{U+V\sqrt{R}}{U_1+V_1\sqrt{R}}$ gebracht werden, unter $U$, $V$, $U_1$, $V_1$, rationale Funktionen von $x$ verstanden; durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $U_1 - V_1\sqrt{R}$ erhält man dann:

$$F(x, \sqrt{R}) =$$

$$= \frac{(U+V\sqrt{R})(U_1-V_1\sqrt{R})}{U_1^2-V_1^2R} = \frac{UU_1-VV_1R}{U_1^2-V_1^2R} - \frac{(UV_1-VU_1)R}{U_1^2-V_1^2R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}},$$

d. i.

$$F(x, \sqrt{R}) = Q + \frac{P}{\sqrt{R}},$$

wo $Q$ und $P$, wie man sieht, rationale Funktionen von $x$ bedeuten. Wir können uns daher im Folgenden auf die Betrachtung des Integrals

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}} = \int \frac{Pdx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

beschränken.

Zu einer weiteren Vereinfachung führt die Substitution

$$x = \frac{m+ny}{1+y},$$

indem die noch unbestimmten Coefficienten $m$ und $n$ sich jederzeit so bestimmen lassen, dass aus dem Polynome $R$ die Glieder mit den ungeraden Potenzen der Veränderlichen verschwinden. Es seien zu diesem Ende $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Wurzeln der Gleichung $R = 0$, so ist:

$$R = e(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

Führen wir in diesen Ausdruck den obigen Werth von $x$ ein, ordnen das Produkt nach Potenzen von $y$, und setzen die Coefficienten von $y$ und $y^3$ gleich Null, so erhalten wir zur Bestimmung von $m$ und $n$ folgende Gleichungen:

$$(m-\alpha)(n-\beta) + (n-\alpha)(m-\beta) = 0,$$
$$(m-\gamma)(n-\delta) + (n-\gamma)(m-\delta) = 0,$$

oder:

$$2mn - (\alpha + \beta)(m + n) + 2\alpha\beta = 0,$$
$$2mn - (\gamma + \delta)(m + n) + 2\gamma\delta = 0.$$

Diese Gleichungen geben zunächst:

$$m + n = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)} = g,$$
$$mn = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)} = h,$$

und hieraus findet man:

$$m = \frac{1}{2}(g + \sqrt{g^2 - 4h}), \quad n = \frac{1}{2}(g - \sqrt{g^2 - 4h}).$$

Die Ausführbarkeit der in Rede stehenden Transformation ist nun an die Bedingung gebunden, dass diese Werthe von $m$ und $n$ reell seien, wozu erfordert wird, dass die Grösse: $g^2 - 4h$ positiv sei, was in der That, wie sich leicht zeigen lässt, immer der Fall ist. Durch Substitution obiger Werthe von $g$ und $h$ erhält man nämlich nach leichter Reduktion:

$$\frac{1}{4}(g^2 - 4h) = \frac{(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)]^2}.$$

Sind nun sämmtliche vier Wurzeln reell, so kann man dieselben auf beliebige Weise ordnen, und folglich immer annehmen, dass $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ sei, wodurch dann die vorstehende Grösse nothwendig positiv ausfällt.

Besitzt aber die Gleichung $R = 0$ auch imaginäre Wurzeln, so können diese nur paarweise vorkommen. Sei also

$$\alpha = \lambda + \mu\sqrt{-1}, \quad \beta = \lambda - \mu\sqrt{-1},$$

$\gamma$ und $\delta$ aber reell, so wird

$$\frac{1}{4}(g^2 - 4h) = \frac{[(\lambda - \gamma)^2 + \mu^2][(\lambda - \delta)^2 + \mu^2]}{[2\lambda - (\gamma + \delta)]^2},$$

welche Grösse offenbar positiv ist. Dasselbe ist der Fall, wenn alle vier Wurzeln imaginär sind, wie man sich leicht überzeugt.

Hiebei verdienen noch folgende specielle Fälle eine Erwähnung. Ist $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$, so wird

$$\sqrt{R} = \sqrt{e}(x - \alpha)(x - \beta),$$

also rational.

Wäre eine der Wurzeln $\alpha$, $\beta$, einer der Wurzeln $\gamma$, $\delta$ gleich, z. B. $\alpha = \gamma$, so hat man

$$\sqrt{R} = \sqrt{e}(x - \alpha)\sqrt{(x - \beta)(x - \delta)},$$

und das Integral gehört dann zu den in §. 427 betrachteten Formen welche sich jederzeit mittelst Logarithmen oder Kreisbögen integriren lassen.

Ist endlich $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, so wird

$$R=e[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]\,[x^2-(\alpha+\beta)x+\gamma\delta],$$

welcher Ausdruck mittelst der Substitution $x=z+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ die Form

$$R=e(a_1+b_1z^2+c_1z^4)$$

annimmt.

Wir sind daher immer im Stande, aus dem Polynome $R$ die ungeraden Potenzen der Veränderlichen wegzuschaffen, und somit berechtiget, das in Rede stehende Integral in der Form

$$\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}=\int\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

vorauszusetzen.

Wir können endlich noch annehmen, dass auch die rationale Funktion $P$ keine ungeraden Potenzen von $x$ enthalte. Denn wie dieselbe auch beschaffen sein möge, so kann sie immer auf die Form:

$$P=\frac{M+Nx}{M'+N'x}$$

gebracht werden, wo $M$, $N$, $M'$, $N'$ gerade Funktionen von $x$ bedeuten, welche keine ungeraden Potenzen von $x$ enthalten. Dann ist aber

$$P=\frac{(M+Nx)(M'-N'x)}{M'^2-N'^2x^2}=$$

$$=\frac{MM'-NN'x^2}{M'^2-N'^2x^2}+\frac{(M'N-MN')x}{M'^2-N'^2x^2}=K+Lx,$$

wo $K$ und $L$ offenbar gerade Funktionen von $x$ sind. Hiedurch wird

$$\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}=\int\frac{Kdx}{\sqrt{R}}+\int\frac{Lx\,dx}{\sqrt{R}};$$

da nun das zweite der beiden Integrale rechter Hand mittelst der Substitution $x^2=y$ in das folgende:

$$\frac{1}{2}\int\frac{L'dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$$

übergeht, welches nach §. 427 immer entwickelt werden kann, so haben wir uns nur noch mit dem ersteren zu beschäftigen, in welchem $K$ nur gerade Potenzen von $x$ enthält.

**498.** Die Funktion $P$ in dem Integrale:

$$\int\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}},$$

welche wir, dem Vorausgehenden zu Folge, als eine gerade betrachten dürfen, ist entweder eine ganze oder eine gebrochene Funktion.

Im ersten Falle hat sie die Form

$$P = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots,$$

und unser Integral zerfällt augenscheinlich in eine Reihe von Integralen, von der Form

$$V = \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}} = \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Man hat aber:

$$d.x^{2n-3}\sqrt{R} = (2n-3)\,x^{2n-4}\sqrt{R} + \frac{\beta x^{2n-2} + 2\gamma x^{2n}}{\sqrt{R}}$$

$$= \alpha(2n-3)\frac{x^{2n-4}\,dx}{\sqrt{R}} + \beta(2n-2)\frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{R}} + \gamma(2n-1)\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{R}},$$

folglich, wenn man integrirt, und für das letzte Integral rechter Hand auflöst:

$$V = \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{x^{2n-3}\sqrt{R}}{\gamma(2n-1)} -$$

$$- \frac{\beta(2n-2)}{\gamma(2n-1)}\int \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{R}} - \frac{\alpha(2n-3)}{\gamma(2n-1)}\int \frac{x^{2n-4}dx}{\sqrt{R}}.$$

Mittelst dieser Reduktionsformel wird, wie man sieht, indem man successive $n = 2, 3, 4, \ldots$ setzt, das Integral $V$ von den beiden Integralen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} \text{ und } \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

abhängig gemacht.

Im zweiten Falle, wenn $P$ eine gebrochene Funktion ist, entwickle man nach Absonderung der etwa in ihr enthaltenen ganzen Funktion, die übrig bleibende echt gebrochene Funktion (indem man vorübergehend $x^2 = y$ setzt) in einfache Partialbrüche, deren allgemeine Form:

$$\frac{M}{(y-a)^n} = \frac{M}{(x^2-a)^n}$$

sein wird. Dadurch reducirt sich die Entwickelung unseres Integrals theils auf den vorher betrachteten Fall, theils auf die Entwickelung von Integralen von der Form:

$$U = \int \frac{dx}{(x^2-a)^n\sqrt{R}}.$$

Um auch für dieses Integral eine Reduktionsformel zu gewinnen, differenziren wir die Grösse $\frac{x\sqrt{R}}{(x^2-a)^{n-1}}$ und erhalten:

$$d.\frac{x\sqrt{R}}{(x^2-a)^{n-1}}=\frac{(\sqrt{R}.dx+xd\sqrt{R})(x^2-a)-2(n-1)x^2\sqrt{R}.dx}{(x^2-a)^n}.$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$d.\frac{x\sqrt{R}}{(x^2-a)^{n-1}}=\frac{Ax^6+Bx^4+Cx^2+D}{(x^2-a)^n}.\frac{dx}{\sqrt{R}}=Q\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

wo der Kürze wegen

$$A=-(2n-5)\gamma,\qquad C=-(2n-3)\alpha-2a\beta,$$
$$B=-(2n-4)\beta-3a\gamma,\qquad D=-a\alpha$$

gesetzt ist. Mittelst der Substitution $x^2-a=z$, oder $x^2=z+a$ verwandelt sich aber der in $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ multiplicirte Faktor $Q$ in:

$$Q=\frac{A'z^3+B'z^2+C'z+D'}{z^n}=\frac{A'}{z^{n-3}}+\frac{B'}{z^{n-2}}+\frac{C'}{z^{n-1}}+\frac{D'}{z^n}$$
$$=\frac{A'}{(x^2-a)^{n-3}}+\frac{B'}{(x^2-a)^{n-2}}+\frac{C'}{(x^2-a)^{n-1}}+\frac{D'}{(x^2-a)^n},$$

wo

$$A'=A,\qquad C'=3Aa^2+2Ba+C,$$
$$B'=3Aa+B,\qquad D'=Aa^3+Ba^2+Ca+D,$$

so dass man also hat:

$$d.\frac{x\sqrt{R}}{(x^2-a)^{n-1}}=\frac{A'dx}{(x^2-a)^{n-3}\sqrt{R}}+$$
$$+\frac{B'dx}{(x^2-a)^{n-2}\sqrt{R}}+\frac{C'dx}{(x^2-a)^{n-1}\sqrt{R}}+\frac{D'dx}{(x^2-a)^n\sqrt{R}}.$$

Hieraus folgt durch Integration, und Auflösung nach dem letzten Integrale rechter Hand:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a)^n\sqrt{R}}=\frac{x\sqrt{R}}{D'(x^2-a)^{n-1}}-$$
$$\frac{C'}{D'}\int\frac{dx}{(x^2-a)^{n-1}\sqrt{R}}-\frac{B'}{D'}\int\frac{dx}{(x^2-a)^{n-2}\sqrt{R}}-\frac{A'}{D'}\int\frac{dx}{(x^2-a)^{n-3}\sqrt{R}},$$

wo, wie aus den obigen Gleichungen leicht gefunden wird:

$$A'=-(2n-5)\gamma,$$
$$B'=-(2n-4)(3a\gamma+\beta),$$
$$C'=-(2n-3)(3a^2\gamma+2a\beta+\alpha),$$
$$D'=-(2n-2)(a^3\gamma+a^2\beta+a\alpha).$$

Mittelst dieser Reduktionsformel kann nun zunächst $\int\frac{dx}{(x^2-a)^2\sqrt{R}}$, dann aber successive $\int\frac{dx}{(x^2-a)^3\sqrt{R}}$, $\int\frac{dx}{(x^2-a)^4\sqrt{R}}$, u. s. w. durch die Integrale:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{\sqrt{R}},\quad \int\frac{(x^2-a)\,dx}{\sqrt{R}}=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}-a\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

ausgedrückt werden, von welchen wir den beiden letzteren schon oben begegneten, so dass in diesem Falle nur eine neue Form hinzutritt.

Aus den bisherigen Untersuchungen geht demnach hervor, dass die Entwickelung des Integrals:

$$\int\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

zuletzt auf die Entwickelung der drei Integrale:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}\ldots(\mathrm{I}),\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}\ldots(\mathrm{II}),$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}\ldots(\mathrm{III})$$

zurückgeführt werden kann, welche, wie im Folgenden gezeigt werden wird, stets durch elliptische Integrale sich ausdrücken lassen.

**499.** Zum Behufe dieser Reduktion zerlegen wir das Trinom $R=\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$ in zwei binomische Faktoren des zweiten Grades; die Gleichung $R=0$, als quadratische behandelt, gibt nämlich:

$$x^2=-\frac{\beta}{2\gamma}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4\gamma^2}-\frac{\alpha}{\gamma}};$$

folglich ist

$$R=\gamma\left(x^2+\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma}\right)\left(x^2+\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma}\right),$$

und es werden immer, wie man sieht, beide Faktoren gleichzeitig reell oder imaginär sein, je nachdem die Grösse $\beta^2-4\alpha\gamma$ positiv oder negativ ist. Lassen wir vorläufig letzteren Fall bei Seite, also beide Faktoren reell sein, so hat $R$ im Allgemeinen die Form:

$$R=(\lambda+\mu x^2)(\lambda'+\mu' x^2),$$

wo $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ reelle positive oder negative Grössen bedeuten, und eine leichte Ueberlegung lehrt, dass die verschiedenen Fälle, welche aus der Verschiedenheit der Vorzeichen dieser vier Grössen hervorgehen können, sich auf folgende fünf Formen reduciren:

1) $R=r^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)$
2) $R=r^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)$
3) $R=r^2(1+p^2x^2)(x^2-q^2)$
4) $R=r^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)$
5) $R=r^2(p^2-x^2)(x^2-q^2)$,

wobei gleichzeitig den Ausdrücken von $R$ die für die folgenden Transformationen geeignetste Gestalt gegeben wurde, was offenbar immer möglich ist. Eine einfache Substitution genügt um in jedem dieser Fälle die Grösse $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ auf die Form $\frac{m d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$ zu bringen, wo $c<1$, und $m$ eine constante Grösse.

1. Fall. $R=r^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)$.

Es sei $p$ der grössere der beiden Coefficienten $p$ und $q$, und man setze

$$x=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{p},\quad \frac{p^2-q^2}{p^2}=c^2,$$

so wird:

$$1+p^2x^2=1+\operatorname{tg}\varphi^2=\sec\varphi^2=\frac{1}{\cos\varphi^2};$$

$$1+q^2x^2=1+\frac{q^2}{p^2}\operatorname{tg}\varphi^2=\frac{p^2\cos\varphi^2+q^2\sin\varphi^2}{p^2\cos\varphi^2}=\frac{1-c^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2},$$

$$\frac{R}{r^2}=\frac{1-c^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^4};\quad dx=\frac{d\varphi}{p\cos\varphi^2},$$

somit

$$\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{pr}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

2. Fall. $R=r^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)$.

Hier muss $qx<1$, $x<\frac{1}{q}$ sein, weil sonst $\sqrt{R}$ imaginär würde; setzen wir also:

$$x=\frac{\cos\varphi}{q},\quad c^2=\frac{p^2}{p^2+q^2},$$

so wird:

$$\frac{dx}{\sqrt{R}}=-\frac{c}{rp}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

welcher Ausdruck mittelst der Substitution: $\operatorname{cotg}\varphi=\sqrt{1-c^2}\operatorname{tg}\psi$ positiv gemacht werden kann und die Form

$$\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{c}{rp}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin\psi^2}}$$

erhält.

3. Fall. $R=r^2(1+p^2x^2)(x^2-q^2)$.

Da $x>q$ sein muss, setze man:

$$x=\frac{q}{\cos\varphi},\quad c^2=\frac{1}{1+p^2q^2}$$

womit

$$\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{c}{r}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

wird.

4. Fall. $R = r^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)$.

Sei wieder $p > q$, so muss $px < 1$ sein; man setze daher:

$$x = \frac{\sin\varphi}{p}, \quad c = \frac{q}{p},$$

so hat man:

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{pr} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

welche Transformation man von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{p}$ benutzen wird. Von $x = \frac{1}{p}$ bis $x = \frac{1}{q}$ wird $\sqrt{R}$ imaginär, reell aber wieder von $x = \frac{1}{q}$ bis $x = \infty$; für den letzten Fall schreiben wir $R$ in der Form

$$R = r^2(p^2x^2-1)(q^2x^2-1),$$

und setzen, da für $p > q$, $qx > 1$ sein muss:

$$x = \frac{1}{q\sin\varphi}, \quad c = \frac{q}{p},$$

womit sich

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = -\frac{1}{rp} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

ergibt, welcher Ausdruck wieder mittelst der Substitution $\operatorname{cotg}\varphi = \sqrt{1-c^2}\operatorname{tg}\psi$ die positive Form:

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{rp} \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin\psi^2}}$$

annimmt.

5. Fall. $R = r^2(p^2-x^2)(x^2-q^2)$.

Auch in diesem Falle kann man $p > q$ voraussetzen, da dieses Produkt auch in der Form $R = r^2(q^2-x^2)(x^2-p^2)$ geschrieben werden kann. Macht man nun

$$x^2 = \frac{q^2}{1-c^2\sin\varphi^2}, \quad c^2 = \frac{p^2-q^2}{p^2},$$

so wird

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{rp} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Mit Hülfe dieser Substitutionen wird demnach in allen Fällen das Integral (I):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

auf das elliptische Integral erster Art:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

reducirt.

Was die beiden anderen Integrale (II) und (III) betrifft, so beachte man, dass die für $x$ substituirten Werthe der Reihe nach in folgender Gestalt geschrieben werden können:

$$x^2 = \frac{\sin\varphi^2}{p^2 - p^2\sin\varphi^2}, \quad x^2 = \frac{1-\sin\varphi^2}{q^2}, \quad x^2 = \frac{q^2}{1-\sin\varphi^2},$$

$$x^2 = \frac{\sin\varphi^2}{p^2}, \quad x^2 = \frac{1}{q^2\sin\varphi^2}, \quad x^2 = \frac{q^2}{1-c^2\sin\varphi^2},$$

und daher sämmtlich in der allgemeinen Form

$$x^2 = \frac{f+g\sin\varphi^2}{h+k\sin\varphi^2}$$

enthalten sind. Durch Substitution dieses Werthes von $x^2$ in den rationalen Faktor des Zählers oder beziehungsweise Nenners verwandeln sich aber die Integrale (II) und (III) in ein Integral von der Form:

$$\int \frac{A+B\sin\varphi^2}{C+D\sin\varphi^2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} \qquad (m)$$

oder etwas einfacher:

$$\int \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}, \qquad (m^*)$$

wenn wir noch der Kürze wegen $\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2} = \varDelta\varphi$ setzen.

Nun ist identisch, wie man sich leicht überzeugt:

$$\int \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\,\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{B}{n}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{nA-B}{n}\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\varDelta\varphi}, \qquad (n)$$

und somit das in Rede stehende Integral in zwei elliptische Integrale, beziehungsweise der 1[ten] und 3[ten] Art, zerlegt.

Diese Zerlegung wird jedoch unmöglich, wenn $n=0$; in diesem Falle hat man aber:

$$\int (A+B\sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{B+c^2A}{c^2}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{B}{c^2}\int\varDelta\varphi\, d\varphi, \qquad (p)$$

womit das Integral auf zwei elliptische Integrale der 1[ten] und 2[ten] Art zurückgeführt ist.

Ist endlich in $(m)$ $C=0$, in welchem Falle $(m^*)$ aus $(m)$ nicht abgeleitet werden kann, so zerfällt das Integral $(m)$ in die beiden folgenden:

$$\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} \text{ und } \int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2.\varDelta\varphi}.$$

Um das zweite dieser beiden Integrale zu reduciren, differenziren wir die Grösse $\varDelta\varphi\,.\,\mathrm{cotg}\,\varphi$, und erhalten nach leichter Umformung:

$$d(\varDelta\varphi\,.\,\mathrm{cotg}\,\varphi) = -\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\varDelta\varphi} + \frac{c^2\sin\varphi^2 d\varphi}{\varDelta\varphi};$$

hieraus folgt durch Integration:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\,\varDelta\varphi}=\int c^2\sin\varphi^2\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}-\operatorname{cotg}\varphi\,.\,\varDelta\varphi,$$

oder, wenn wir für das Integral rechter Hand die Gl. $(p)$ in Anspruch nehmen, $A=0$, $B=c^2$ setzend:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\,\varDelta\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}-\int\varDelta\varphi\,.\,d\varphi-\operatorname{cotg}\varphi\,.\,\varDelta\varphi. \qquad (q)$$

**500.** Es erübrigt noch die Betrachtung des oben bei Seite gesetzten Falles, wenn beide Faktoren des 2ten Grades des Trinoms $R=\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$ imaginär sind. Da in diesem Falle $\alpha$ und $\gamma$ gleiche Zeichen haben, und $\beta<2\sqrt{\alpha\gamma}$ sein muss, überdiess immer die Voraussetzung zulässig ist, dass $\alpha$ und $\gamma$ positiv sind, weil im Gegenfalle $\sqrt{R}$ für jeden Werth von $x$ imaginär würde; so kann man

$$R=\alpha+\beta x^2+\gamma x^4=\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos\theta+\mu^2x^4$$

setzen, indem hieraus für $\lambda$, $\mu$, $\theta$ die unter den erwähnten Umständen immer möglichen Werthe:

$$\lambda=\sqrt{\alpha};\quad \mu=\sqrt{\gamma},\quad \cos\theta=\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

sich ergeben. Setzt man nun:

$$x=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi,\quad c=\sin\frac{1}{2}\theta,$$

so findet man:

$$dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\frac{d\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2},\quad R=\frac{\lambda^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}(1-c^2\sin\varphi^2),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

somit:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

womit das Integral (I) wieder auf das elliptische Integral 1ter Art zurückgeführt ist.

Durch Substitution obiger Werthe von $x^2$ und $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ verwandelt sich ferner das Integral (II) in:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\int\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2.\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Nun ist:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{(1-\cos\varphi)^2}{\sin\varphi^2} = \frac{2-\sin\varphi^2-2\cos\varphi}{\sin\varphi^2},$$

somit:

$$\int \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2.\Delta\varphi} - \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi^2.\Delta\varphi}.$$

Von den drei Integralen rechter Hand ist das erste durch die Gl. $(q)$ im vorhergehenden §. bestimmt; das letzte wird mittelst der Substitution $c\sin\varphi = x$:

$$\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi^2.\Delta\varphi} = c\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -c\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi};$$

es ist folglich, da $\frac{1}{\sin\varphi} - \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$:

$$\int \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2\int\Delta\varphi\, d\varphi + 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.\Delta\varphi,$$

und hiemit das Integral (II) auf elliptische Integrale $1^{\text{ter}}$ und $2^{\text{ter}}$ Art zurückgeführt.

Was endlich das Integral (III) anbelangt, so hat man, durch Substitution obiger Werthe von $x$ und $\frac{dx}{\sqrt{R}}$:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}} = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{a\mu}{\lambda}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{a\mu}{\lambda} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} - \frac{a\mu}{\lambda} = \frac{\lambda+a\mu}{\lambda}.\frac{k-\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$

wenn der Kürze wegen

$$k = \frac{\lambda-a\mu}{\lambda+a\mu}$$

gesetzt wird; somit

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{a\mu}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda+a\mu}.\frac{1+\cos\varphi}{k-\cos\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda+a\mu}.\frac{(1+\cos\varphi)(k+\cos\varphi)}{k^2-\cos\varphi^2}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+a\mu}\left\{\frac{(k+1)-\sin\varphi^2}{(k^2-1)+\sin\varphi^2} + \frac{(k+1)\cos\varphi}{(k^2-1)+\sin\varphi^2}\right\},$$

folglich:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}} =$$

$$= \frac{1}{2(\lambda+a\mu)}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\int\frac{(k+1)-\sin\varphi^2}{(k^2-1)+\sin\varphi^2}.\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{(\lambda+a\mu)^2}\int\frac{\cos\varphi}{(k^2-1)+\sin\varphi^2}.\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Das erste dieser beiden Integrale ist durch die Gl. ($n$) im vorhergehenden §. gegeben; es wird, wenn man Kürze halber

$$n = \frac{1}{k^2 - 1} = -\frac{(\lambda + a\mu)^2}{4a\lambda\mu}$$

setzt:

$$\int \frac{(k+1) - \sin\varphi^2}{(k^2-1) + \sin\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{\lambda - a\mu}{2a\mu} \int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta\varphi}.$$

Das zweite integrirt man unmittelbar mittelst der Substitution: $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{c^2 + y^2}}$, wodurch sich ergibt:

$$\int \frac{\cos\varphi}{(k^2 - 1) + \sin\varphi^2} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -n \int \frac{dy}{c^2 + n + y^2} = -\frac{n}{\sqrt{c^2+n}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{c^2+n}}$$

$$= -\frac{n}{\sqrt{c^2+n}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi\sqrt{c^2+n}},$$

und das in Rede stehende Integral (III) ist hiemit auf elliptische Integrale $1^{\text{ter}}$ und $3^{\text{ter}}$ Art zurückgeführt.

---

# FÜNFTES KAPITEL.

## INTEGRATION DER DIFFERENZIALGLEICHUNGEN.

---

### I. Von den Differenzialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen.

**501.** Jede Gleichung, welche eine Beziehung zwischen mehreren veränderlichen Grössen und deren Differenzialquotienten ausdrückt, heisst eine Differenzialgleichung. Die Ordnung des höchsten in derselben erscheinenden Differenzialquotienten bestimmt die Ordnung der Gleichung, so dass also die Gleichung von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung ist, wenn der höchste darin enthaltene Differenzialquotient der $n^{\text{ten}}$ Ordnung angehört.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitte mit den Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen, deren allgemeine Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

ist, und betrachten zunächst die Gleichungen vom ersten Grade, d. i. solche, welche nur die erste Potenz des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ enthalten. Durch Auflösung nach diesem Differenzialquotienten erhält die Gleichung (1) die Form: $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$, d. i. wenn man $\varphi(x, y) = -\frac{P}{Q}$ setzt:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y) = -\frac{P}{Q}, \text{ oder } P dx + Q dy = 0, \tag{2}$$

wo $P$ sowohl als $Q$ im Allgemeinen Funktionen von $x$ und $y$ sein werden.

Die Aufgabe der Integration einer solchen Gleichung kommt nun offenbar darauf hinaus, eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ zu finden, welche die Eigenschaft hat, dass der daraus abgeleitete Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ gleich sei der gegebenen Funktion $\varphi(x,y)$, oder mit anderen Worten und allgemeiner ausgedrückt: dass die aus dieser Gleichung in Funktion von $x$ gezogenen Werthe von $y$ und $\frac{dy}{dx}$, in die Gl. (1) substituirt, diese letztere Gleichung identisch machen.

Jede Gleichung zwischen $x$ und $y$, welche dieser Bedingung Genüge leistet, heisst ein Integral oder eine Integralgleichung (primitive oder endliche Gleichung) der Differenzialgleichung (1).

Es sei nun $F(x, y, C) = 0$ das Integral der Gleichung (1) und $C$ eine in demselben enthaltene constante Grösse und man ziehe aus derselben die Werthe

$$y = \psi(x, C), \quad \frac{dy}{dx} = \psi'(x, C), \tag{3}$$

so wird, der Voraussetzung zufolge, durch Substitution derselben in die Gleichung (1), diese Gleichung identisch; die Gl. (1) ist daher eine unmittelbare Folge der Glgn. (3) und muss daher aus letzteren durch Elimination einer Grösse, etwa der Constanten $C$ abgeleitet werden können, welch' letztere eben dadurch aus der Differenzialgleichung verschwunden sein wird. Hiebei kann man der Constanten $C$ jeden beliebigen Werth beigelegt denken, da das Ergebniss der Elimination, d. i. die Gl. (1) von dem der eliminirten Grösse beigelegten Werthe offenbar unabhängig ist. Hieraus folgt, dass der Differenzialgleichung (1) unendlich viele Integrale Genüge leisten,

welche sich von einander nur durch die einer gewissen Constante beigelegten Werthe unterscheiden, und dass daher das Integral einer vorgelegten Differenzialgleichung, wenn es dieselbe Allgemeinheit besitzen soll, wie die letztere, eine willkürliche Constante enthalten muss, über welche man nach Belieben verfügen kann, und welche in der Differenzialgleichung nicht erscheint. Ein solches mit einer willkürlichen Constante versehenes Integral heisst das allgemeine Integral der Gl. (1). Dasselbe kann übrigens nur eine willkürliche Constante enthalten, da man aus zwei Gleichungen nur eine Grösse eliminiren kann.

Aus dem allgemeinen Integrale lassen sich dadurch, dass man der willkürlichen Constante verschiedene besondere Werthe beilegt, unendlich viele besondere Integrale ableiten, welche wir particuläre Integrale nennen. Der wesentliche Charakter eines particulären Integrals besteht also darin, dass es durch Specialisirung des Werthes der arbiträren Constante aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht.

Es geschieht jedoch nicht selten, dass eine endliche Gleichung zwischen $x$ und $y$, welche keine willkürliche Constante enthält, einer gegebenen Differenzialgleichung Genüge leistet, ohne dass man im Stande wäre, die erstere aus dem allgemeinen Integrale der letzteren dadurch abzuleiten, dass man der willkürlichen Constante einen bestimmten besonderen Werth beilegt. Dergleichen primitive Gleichungen, welche somit in dem allgemeinen Integrale als specielle Fälle nicht enthalten sind, werden singuläre Integrale oder besondere Auflösungen genannt. Wir kommen später auf dieselben zurück.

**502.** Die Aufgabe der Integration einer Differenzialgleichung von der Form (1) lässt eine sehr einfache geometrische Deutung zu. In der That, bringen wir die Gl. (1) auf die Form:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \tag{1}$$

und betrachten $x$ und $y$ als zwei rechtwinklige Coordinaten eines Punktes in der Ebene, so erhellt sogleich, dass diese Gleichung die trigonometrische Tangente des Winkels gibt, unter welchem die, an einen beliebigen Punkt $x, y$ einer noch unbekannten Curve gezogene Tangente der Abscissenaxe begegnet. Die obige Gleichung integriren heisst nichts anderes, als die Gleichung dieser Curve suchen, oder — geometrisch gesprochen — diese Curve construiren. Die Construction kann nun mit Hülfe der Differenzialgleichung in folgender Weise ausgeführt werden.

Wählen wir einen beliebigen ersten Punkt $M$ (Fig. 66), dessen Coordinaten $OP = x = a$, $MP = y = b$ sind, so gibt obige Gleichung für diesen Punkt $\frac{dy}{dx} = \varphi(a, b)$; ziehen wir durch $M$ eine Gerade $MT$, welche mit der Axe der $x$ einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $\varphi(a, b)$ ist, so wird diese Gerade eine erste Tangente an die gesuchte Curve sein. Da in der Nähe des Berührungspunktes $M$ die Tangente mit der Curve sehr nahe zusammenfällt, so wird man einen auf der Tangente $MT$ sehr nahe an $M$ liegenden Punkt $M'$ als einen Punkt der Curve betrachten dürfen, dessen Coordinaten $OP' = a'$, $M'P' = b'$ nunmehr bekannt sind. Für diesen Punkt gilt nun die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \varphi(a', b')$, mittelst welcher man durch $M'$ eine zweite Tangente $M'T'$ ziehen kann, auf welcher man nun einen dritten Punkt $M''$ wählt. Auf diese Weise fortfahrend erhält man ein Polygon $MM'M''\ldots.$, welches sich um so mehr einer stetigen Curve nähern wird, je näher man die Punkte $M, M', M'', \ldots$ an einander nimmt. Die Gleichung dieser Curve ist das Integral der vorgelegten Differenzialgleichung.

Die geometrische Bedeutung einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung besteht daher darin, dass sie die Gestalt einer Curve bestimmt, sobald man irgend einen Punkt derselben willkürlich angenommen hat. Je nach der Wahl dieses Punktes wird aber die Curve eine andere Lage in der Ebene, ja im Allgemeinen auch eine andere Gestalt annehmen, so dass also jeder Differenzialgleichung der 1ten Ordnung unendlich viele verschiedene Curven entsprechen, welche jedoch sämmtlich einen gemeinschaftlichen, eben durch die Differenzialgleichung ausgesprochenen Charakter besitzen, darin bestehend, dass die Neigung der Curve gegen die Abscissenaxe in jedem ihrer Punkte eine gegebene Funktion der Coordinaten dieses Punktes ist.

Hieraus erhellt nun unmittelbar, dass die Integralgleichung, wenn sie dieselbe Allgemeinheit wie die Differenzialgleichung haben, also alle Curven darstellen soll, welche in letzterer enthalten sind, eine willkürliche Constante enthalten müsse, durch deren Particularisirung man alle einzelnen Curven aus der Integralgleichung hervorgehen lassen kann.

Diese mit einer willkürlichen Constante versehene Integralgleichung:

$$F(x, y, C) = 0$$

ist das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Ertheilt man der Constante einen speciellen bestimmten Werth, so geht daraus ein particuläres Integral hervor, welches sofort eine bestimmte von den unendlich vielen im allgemeinen Integrale begriffenen Curven ausdrückt.

Sind endlich diese Curven so beschaffen, dass je zwei unendlich nahe aufeinanderfolgende sich durchschneiden, so bildet die stetige Folge dieser Durchschnittspunkte eine neue, die sogenannte einhüllende Curve [§. 376], welche bekanntlich die Eigenschaft hat, dass die Tangente an irgend einem ihrer Punkte auch die eingehüllten in diesem Punkte sich schneidenden Curven berührt, daher, für einen solchen Punkt, die Neigung der eingehüllten sowohl als der einhüllenden Curve gegen die Abscissenaxe durch eine und dieselbe Funktion der Coordinaten dieses Punktes, nämlich durch Gl. (1), gegeben ist. Hieraus folgt aber nothwendig, dass die Gl. (1) auch der einhüllenden Curve, wenn eine solche existirt, angehört, und durch Integration die Gleichung dieser Curve darbieten muss. Diese letztere Gleichung ist nun ein singuläres Integral oder eine besondere Auflösung der Gleichung (1); sie kann keine willkürliche Constante enthalten, weil die, alle in der Gleichung $F(x,y,C)=0$ begriffenen Curven, einhüllende Curve eine vollkommen bestimmte krumme Linie ist; sie kann auch aus dem allgemeinen Integrale nicht abgeleitet werden, weil die einhüllende Curve eine von den eingehüllten Curven gänzlich verschiedene Linie ist.

**503.** Kehren wir nun zur Gleichung

$$Pdx + Qdy = 0 \text{ oder } P + Qy' = 0 \qquad (1)$$

zurück, auf welche Form jede Differenzialgleichung 1ter Ordnung gebracht werden kann. Es ist möglich, dass man in dem ersten Theile dieser Gleichung unmittelbar das vollständige Differenzial einer Funktion $u = F(x,y)$ von $x$ und $y$ erkennt, d. h. dass $Pdx + Qdy = dF(x,y)$ ist; das allgemeine Integral der Gleichung:

$$Pdx + Qdy = dF(x,y) = 0$$

ist dann offenbar $F(x,y) = C$, wo $C$ die willkürliche Constante. So würde z. B. der Gleichung $ydx + xdy = 0$, wie man auf den ersten Blick erkennt, das allgemeine Integral: $xy = C$ entsprechen.

Der Ausdruck $Pdx + Qdy$ kann jedoch auch das vollständige Differenzial einer Funktion $u = F(x,y)$ sein, ohne dass diess sogleich in die Augen fällt, was jedoch nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten $P$, $Q$ der Bedingungsgleichung

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \tag{2}$$

Genüge leisten. Denn soll identisch

$$Pdx + Qdy = du = dF(x,y) = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

sein, so muss $P = \frac{du}{dx}$, $Q = \frac{du}{dy}$ sein; dann ist aber $\frac{dP}{dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$, aus welchen Gleichungen die (2) unmittelbar folgt [Vgl. §. 326].

Im Falle nun die Bedingungsgleichung der Integrabilität (2) erfüllt ist, kann das Integral der Gl. (1) d. i. die Funktion $u = F(x,y)$ jederzeit leicht ermittelt werden. Beachtet man nämlich, dass $P$ der Differenzialquotient der Funktion $u$ ist, nach $x$ genommen, so wird man offenbar alle Glieder von $u$ wieder erhalten, welche von $x$ abhängen, indem man $Pdx$ nach $x$ integrirt. Man hat daher

$$u = \int Pdx + Y,$$

wo $Y$ den blos von $y$ abhängenden Bestandtheil von $u$ bezeichnet, also kein $x$ enthält; hieraus findet man, nach $y$ differenzirend:

$$\frac{du}{dy} = \int \frac{dP}{dy}dx + \frac{dY}{dy},$$

d. i. da $\frac{du}{dy} = Q$:

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy}dx.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung kann $x$ nicht enthalten, da ja der Voraussetzung nach $Y$ frei ist von $x$; in der That ist der Differenzialquotient des $2^{\text{ten}}$ Theiles, nach $x$ genommen, zufolge der Gl. (2), gleich Null. Aus der letzten Gleichung folgt nun:

$$Y = \int \left[ Q - \int \frac{dP}{dy}dx \right] dy,$$

womit

$$u = \int Pdx + \int \left[ Q - \int \frac{dP}{dy}dx \right] dy - C$$

wird, wenn $C$ die willkürliche Constante bezeichnet. Das allgemeine Integral der Gl. (1) ist demnach:

$$\int Pdx + \int \left[ Q - \int \frac{dP}{dy}dx \right] dy = C, \tag{3}$$

wo die Integration sich immer nur auf jene Variable bezieht, deren Differenzial unter dem Integralzeichen steht.

Auf demselben Wege würde man, von der Gleichung $u = \int Q dy + X$ ausgehend,

$$\int Q dy + \int \left[ P - \int \frac{dQ}{dx} dy \right] dx = C \qquad (4)$$

finden, welcher Ausdruck von jenem (2) nicht wesentlich verschieden ist.

Beispiel. Es sei die Gleichung:

$$\frac{x}{(x-y)^2} dx - \frac{2x-y}{(x-y)^2} dy = 0$$

gegeben, so ist $P = \frac{x}{(x-y)^2}$, $Q = -\frac{2x-y}{(x-y)^2}$; $\frac{dP}{dy} = \frac{2x}{(x-y)^3}$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{2x}{(x-y)^3}$, somit die Bedingungsgleichung (2) erfüllt. Man hat nun:

$$\int P dx = \int \frac{x dx}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x-y} + l(x-y),$$

$$\int \frac{dP}{dy} dx = \int \frac{2x\, dx}{(x-y)^3} = -\frac{2x-y}{(x-y)^2}, \text{ folglich } Q - \int \frac{dP}{dy} dx = 0;$$

das gesuchte Integral ist daher:

$$l(x-y) - \frac{y}{x-y} = C,$$

oder wenn man $lC$ statt $C$ schreibt:

$$l\frac{x-y}{C} - \frac{y}{x-y} = 0.$$

Man wird übrigens leicht einsehen, dass der hier in Rede stehende Fall nur dann eintreten kann, wenn die gegebene Differenzialgleichung das unmittelbare Resultat der Differenziation der primitiven Gleichung ist, und letztere zuvor auf eine solche Form gebracht wurde, dass durch die Differenziation selbst die willkürliche Constante verschwindet.

**504.** Der einfachste Fall, welcher sich bei der Integration der Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ darbieten kann, ist jener, in welchem sich eine Trennung oder Sonderung der Variablen bewerkstelligen lässt, d. i. wenn die Gleichung auf die Form

$$X dx + Y dy = 0 \qquad (1)$$

gebracht werden kann, wo $X$ und $Y$ — wie im Folgenden immer — Funktionen bedeuten, von welchen die erste nur $x$, die zweite nur $y$ enthält. In diesem Falle reducirt sich die Aufgabe, wie man sieht,

auf blosse Quadraturen, d. i. auf die Integration von Differenzialformeln mit einer einzigen Veränderlichen. Als Integral der Gl. (1) hat man offenbar

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C.$$

Die allgemeinste Gleichungsform, welche die Trennung der Veränderlichen unmittelbar gestattet, ist:

$$XY\,dx + X_1 Y_1\,dy = 0.$$

Durch Division mit $YX_1$ verwandelt sich dieselbe in:

$$\frac{X}{X_1}\,dx + \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0,$$

deren Integral sofort

$$\int \frac{X}{X_1}\,dx + \int \frac{Y_1}{Y}\,dy = C$$

ist.

Beisp. Die gegebene Gleichung sei:

$$y(a^2x^2 - 1)\,dx - x\,dy = 0;$$

durch Division mit $xy$ geht dieselbe über in:

$$\frac{a^2x^2 - 1}{x}\,dx - \frac{dy}{y} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind, und durch Integration beider Glieder folgt:

$$\frac{1}{2}a^2x^2 - lx - ly = C,$$

oder wenn man $-lC$ statt $C$ schreibt:

$$\frac{1}{2}a^2x^2 = l\frac{xy}{C}, \quad y = C\frac{e^{\frac{1}{2}a^2x^2}}{x}.$$

**505.** Nicht selten gelingt die Trennung der Veränderlichen mit Hülfe der Substitution neuer Variablen. Ein bemerkenswerthes Beispiel hiezu bietet zunächst die sogenannte lineare Differenzialgleichung 1ter Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0, \tag{1}$$

deren charakteristisches Merkmal darin besteht, dass $y$ und $\frac{dy}{dx}$ nur in der 1ten Potenz, und nicht ineinander multiplicirt vorkommen. Da $y$ jedenfalls eine Funktion von $x$ ist, so können wir uns diese Grösse als Produkt zweier Funktionen von $x$: $u$ und $v$, vorstellen. Setzen wir also $y = uv$, so wird die Gl. (1):

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + Xuv + X_1 = 0,$$

oder

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Xv\right) + v\frac{du}{dx} + X_1 = 0.$$

Die beiden Funktionen $u$, $v$ sind vorerst nur an die eine Bedingung gebunden, dass das Produkt $uv = y$ sei; wir können sie demnach noch einer zweiten Bedingung unterwerfen, und setzen zu diesem Ende:

$$\frac{dv}{dx} + Xv = 0,$$

welche Gleichung aber, kraft der vorausgehenden, die folgende:

$$v\frac{du}{dx} + X_1 = 0$$

nothwendig nach sich zieht. Diese beiden Gleichungen dienen nun zur Bestimmung von $u$ und $v$.

Aus der ersten, welche die Trennung der Veränderlichen zulässt, folgt sofort: $\frac{dv}{v} = -Xdx$, und durch Integration $lv + lC = -\int Xdx$, wenn man die Integrationsconstante in der Form $lC$ beifügt; somit

$$v = \frac{1}{C}e^{-\int Xdx}.$$

Die zweite der obigen Gleichungen gibt: $du + \frac{X_1}{v}dx = 0$, folglich, wenn man den oben für $v$ erhaltenen Werth substituirt und integrirt:

$$u = C' - C\int X_1 e^{\int X\,dx} dx,$$

wo $C'$ wieder eine willkürliche Constante.

Hiemit erhält man nun als Integral der Gl. (1):

$$y = e^{-\int X\,dx}\left(C - \int X_1 e^{\int X\,dx} dx\right), \tag{2}$$

wo in der Klammer statt der willkürlichen Grösse $\frac{C'}{C}$ einfach $C$ geschrieben ist.

Beisp. 1) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - x^2 = 0$; hier ist

$$X = \frac{1}{x},\quad X_1 = -x^2, \text{ folglich:}$$

$$\int X\,dx = \int\frac{dx}{x} = lx;\quad e^{-\int X\,dx} = e^{-lx} = \frac{1}{x};$$

$$\int X_1 e^{\int X\,dx} dx = -\int x^3dx = -\frac{1}{4}x^4; \text{ somit}$$

$$y = \frac{1}{x}\left(C + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}.$$

2) $$dy - y\,dx = e^x\,dx; \text{ man hat}$$

$$X = -1,\ \int X dx = -x,\ e^{-\int X dx} = e^x;$$

$$X_1 = -e^x,\ \int X_1\,e^{\int X dx} dx = -\int e^x . e^{-x}\,dx = -x;$$

das allgemeine Integral ist daher:

$$y = e^x (C + x).$$

3) $$(1-x^2)\,dy + xy\,dx - a dx = 0;$$

$$X = \frac{x}{1-x^2},\ \int X dx = -\frac{1}{2} l(1-x^2) = -l\sqrt{1-x^2},\ e^{-\int X dx} = \sqrt{1-x^2};$$

$$X_1 = -\frac{a}{1-x^2};\ \int X_1\,e^{\int X dx} dx = -a\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = -\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}},$$

[§. 431, Gl. (1)];

das allgemeine Integral ist daher:

$$y = \sqrt{1-x^2}\left(C + \frac{ax}{\sqrt{1-x^2}}\right) = ax + C\sqrt{1-x^2}.$$

Dieses Verfahren ist auch auf die allgemeinere Gleichung

$$Y' \frac{dy}{dx} + YX + X_1 = 0 \tag{3}$$

anwendbar, in welcher $Y$ eine beliebige Funktion von $y$, und $Y'$ deren Differenzialquotienten (nach $y$) bedeutet. Denn unter dieser Voraussetzung ist:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dy} . \frac{dy}{dx} = Y' . \frac{dy}{dx},$$

und somit die Gleichung (3) übereinstimmend mit

$$\frac{dY}{dx} + YX + X_1 = 0,$$

welche Gleichung dieselbe Form hat, wie (1), und demnach die Entwickelung des Werthes von $Y$ auf dem oben betretenen Wege unmittelbar gestattet. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist daher:

$$Y = e^{-\int X dx}\left(C - \int X_1\,e^{\int X dx} dx\right).$$

Auf die Form der Gl. (3) lässt sich auch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^m = 0 \tag{4}$$

bringen, und demnach auf gleiche Weise integriren. Durch Division mit $y^m$ verwandelt sich nämlich diese Gleichung in:

$$\frac{1}{y^m}\frac{dy}{dx} + \frac{X}{y^{m-1}} + X_1 = 0;$$

setzt man nun $Y = \frac{1}{y^{m-1}}$, so wird $Y' = -\frac{m-1}{y^m}$, $\frac{1}{y^m} = -\frac{Y'}{m-1}$, wodurch die letzte Gleichung in folgende:

$$Y'\frac{dy}{dx} - (m-1)YX - (m-1)X_1 = 0$$

übergeht, welche mit Gl. (3) der Form nach übereinstimmt.

**506.** Bei den sogenannten homogenen Differenzialgleichungen können die Veränderlichen durch Einführung einer neuen Variabeln jederzeit getrennt werden. Die Gl. $Pdx + Qdy = 0$ heisst homogen, wenn $P$ und $Q$ homogene Funktionen von $x$ und $y$ sind, d. i. wenn die Summe der Exponenten von $x$ und $y$ in allen Gliedern von $P$ und $Q$ dieselbe ist. In Folge dieser Eigenschaft kann nämlich jede homogene Gleichung des 1[ten] Grades auf die Form:

$$\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \tag{1}$$

gebracht werden; setzt man nun

$$y = xt, \quad dy = xdt + t\,dx,$$

so geht diese Gleichung über in:

$$xdt + [t + \varphi(t)]\,dx = 0,$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{dt}{t + \varphi(t)} = 0,$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind, und deren allgemeines Integral:

$$lx + \int\frac{dt}{t + \varphi(t)} = C$$

ist.

Beisp. Es sei die homogene Gleichung

$$(ay - x)\,dy + (ax + y)\,dx = 0$$

zu integriren; mittelst obiger Substitution verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$\frac{(at-1)\,dt}{t^2+1} + \frac{adx}{x} = 0,$$

deren Integral sofort

$$\frac{1}{2}al(t^2+1) - \operatorname{arc\,tg} t + alx = C$$

ist. Schreibt man $lC$ statt $C$, so erhält man nach leichter Reduction durch Vereinigung der logarithmischen Glieder und Wiederherstellung des Werthes von $t = \frac{y}{x}$:

$$l\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\text{ oder}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}},$$

als allgemeines Integral der vorgelegten Gleichung.

Bisweilen gelingt es, eine nicht homogene Differenzialgleichung der $1^{ten}$ Ordnung durch eine geeignete Substitution neuer Variabeln in eine homogene umzuformen, auf welche sodann die eben vorgetragene Integrationsmethode angewendet werden kann. Diess ist der Fall bei der Gleichung:

$$(ax+by+c)\,dx+(fx+gy+h)\,dy=0, \tag{2}$$

in welcher $P$ und $Q$ lineare Funktionen von $x$ und $y$ sind.

Setzt man nämlich $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$, wo $\xi$ und $\eta$ die neuen Veränderlichen, so kommt:

$$(a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c)d\xi+(f\xi+g\eta+f\alpha+g\beta+h)\,d\eta=0,$$

welche Gleichung sich sofort in die homogene Differenzialgleichung

$$(a\xi+b\eta)\,d\xi+(f\xi+g\eta)\,d\eta=0$$

verwandelt, wenn man die beiden Constanten $\alpha$, $\beta$ aus den Gleichungen

$$a\alpha+b\beta+c=0,\quad f\alpha+g\beta+h=0$$

bestimmt. Diese Bestimmung ist immer möglich, den Fall ausgenommen, wenn $ag-bf=0$, oder $\frac{a}{f}=\frac{b}{g}=k$ wäre, weil dann $\alpha$ und $\beta$ unendlich würden. In diesem speciellen Falle erhält aber die Gl. (2) die Form:

$$(fx+gy)(kdx+dy)+cdx+hdy=0,$$

und geht durch die Substitution: $fx+gy=z$ über in:

$$(z+h)\,dz+[(kg-f)\,z+cg-hf]\,dx=0$$

in welcher Gleichung sich die Veränderlichen, durch Division mit dem Faktor von $dx$, trennen.

**507.** Wir haben in §. 503 gesehen, dass die Integration der Gleichung

$$Pdx+Qdy=0 \tag{1}$$

immer möglich ist, wenn die linke Seite derselben das vollständige Differenzial einer Funktion $u=F(x,y)=C$ ist, in welchem Falle dieselbe identisch ist mit

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy=0. \tag{2}$$

Es kann aber geschehen, dass die beiden Grössen $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ einen gemein-

schaftlichen Faktor besitzen, nach dessen Unterdrückung erst die Gl. (1) aus der (2) hervorgeht, wo dann die erstere aufhört, ein vollständiges Differenzial zu sein, und der Bedingung der Integrabilität nicht mehr Genüge leistet.

Hätten wir z. B. in dem in §. 503 benützten Beispiele den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{(x-y)^2}$ weggelassen, so würde die Gleichung

$$xdx - (2x-y)\,dy = 0$$

kein vollständiges Differenzial mehr sein, die Bedingungsgleichung $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ nicht erfüllen und daher die Integration auf dem dort betretenen Wege nicht gestatten.

Es käme also darauf an, den Faktor, welcher die Gl. (1) zu einem vollständigen Differenzial macht, wieder herzustellen, um dann ohne Weiteres nach §. 503 integriren zu können. Ein mit dieser Eigenschaft versehener Faktor heisst ein integrirender Faktor.

Man kann leicht zeigen, dass, wie immer die vorgelegte Differenzialgleichung entstanden sein mag, ein solcher Faktor jederzeit existirt. Denn gesetzt, es sei der Ausdruck $Pdx + Qdy$ in (1) ein unvollständiges Differenzial, und $u = F(x,y) = C$, oder $y = f(x, C)$ das allgemeine Integral der Gl. (1), so folgt durch Differenziation der Gl. $u = F(x,y) = C$, die Gl. (2), und man erhält durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus den Gleichungen (1) und (2):

$$\frac{\frac{du}{dx}}{P} = \frac{\frac{du}{dy}}{Q}. \qquad (3)$$

Diese Gleichung kann aber nur eine identische sein, wenn man bedenkt, dass der Werth $y = f(x, C)$, weil er der Voraussetzung nach den Gl. (1) und (2) Genüge leistet, auch die (3) erfüllen muss, da ja letztere nur eine Folge von (1) und (2) ist. Könnte man daher aus (3) einen Werth von $y$ in Funktion von $x$, $y = \varphi(x)$ ziehen, so müsste identisch $\varphi(x) = f(x, C)$ sein, und zwar für jeden Werth der willkürlichen Constante $C$, was absurd ist. Setzt man daher $\frac{du}{dx} : P = \lambda$, so hat man identisch:

$$\frac{du}{dx} = \lambda P,\ \frac{du}{dy} = \lambda Q,$$

$$\lambda Pdx + \lambda Qdy = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = du,$$

woraus erhellt, dass $\lambda$ ein integrirender Faktor ist, welcher den Ausdruck $Pdx + Qdy$ in ein vollständiges Differenzial verwandelt.

Hat man übrigens einen integrirenden Faktor $\lambda$ gefunden, so ist jeder Ausdruck von der Form $\lambda\psi(u)$ ebenfalls ein integrirender Faktor, wo $\psi(u)$ eine willkürliche Funktion von $u$ bedeutet. Denn aus der letzten Gleichung folgt: $Pdx + Qdy = \frac{du}{\lambda}$; soll nun $L$ ein integrirender Faktor sein, so muss

$$LPdx + LQdy = \frac{L}{\lambda}\, du$$

ein vollständiges Differenzial werden, wozu erfordert wird, dass $\frac{L}{\lambda} = \psi(u)$, also $L = \lambda\psi(u)$ sei.

Was nun die Ausmittelung des integrirenden Faktors betrifft, so steht uns zu diesem Zwecke direkt nur die Gleichung:

$$\frac{d.\lambda P}{dy} = \frac{d.\lambda Q}{dx},$$

oder gehörig entwickelt:

$$P\frac{d\lambda}{dy} + \lambda\frac{dP}{dy} = Q\frac{d\lambda}{dx} + \lambda\frac{dQ}{dx} \qquad (4)$$

zu Gebote, welche eben ausspricht, dass der Ausdruck $Pdx + Qdy$ in Gleichung (1) durch Multiplication mit $\lambda$ ein completes Differenzial werde. Diese Gleichung ist aber, weil von partiellen Differenzialien abhängend, in der Regel viel schwieriger aufzulösen, als die vorgelegte (1), so dass sie im Allgemeinen nicht mit Erfolg benutzt werden kann. Nur in besonderen Fällen, wo die Umstände eine gewisse Voraussetzung über die Natur des integrirenden Faktors zulässig machen, kann die Gl. (4) zur Kenntniss desselben führen.

Setzt man z. B. voraus, dass der integrirende Faktor von $y$ nicht abhänge, so ist $\frac{d\lambda}{dy} = 0$, und die Gl. (4) geht über in:

$$Q\frac{d\lambda}{dx} = \lambda\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right);$$

verschwindet nun $y$ aus dieser Gleichung, so ist die Voraussetzung gerechtfertiget, und diese Gleichung liefert zugleich den integrirenden Faktor; man zieht nämlich daraus:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}}{Q}\, dx, \quad l\lambda = \int \frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}}{Q} . dx. \qquad (5)$$

Ebenso verhält es sich, wenn die Voraussetzung $\frac{d\lambda}{dx} = 0$ zur Folge hat, dass die Gl. (4) von $x$ frei wird.

Dieser Fall tritt z. B. ein bei der linearen Differenzialgleichung des 1ten Grades:

$$(Xy + X_1)\, dx + dy = 0, \tag{6}$$

welche wir bereits oben [§. 505] auf anderem Wege integrirten. Nehmen wir an, dass der integrirende Faktor $\lambda$ dieser Gleichung von $y$ unabhängig sei, oder mit anderen Worten, dass die Gl. (6) durch Multiplication mit $\lambda$ linear bleibe, so erhält man, wegen $P = Xy + X_1$, $Q = 1$, mittelst der Gleichung (5) den in der That von $y$ unabhängigen Werth $l\lambda = \int X dx$, oder $\lambda = e^{\int X dx}$; durch Multiplication mit dieser Grösse verwandelt sich die Gl. (6) in folgende:

$$e^{\int X dx}(Xy + X_1)\, dx + e^{\int X dx}\, dy = 0,$$

welche augenscheinlich der Bedingung der Integrabilität entspricht, und sofort die Anwendung der Formel (4), §. 503 gestattet. Man hat nämlich $P = e^{\int X dx}(Xy + X_1)$, $Q = e^{\int X dx}$, somit $\int Q dy = \int e^{\int X dx} y =$ $y e^{\int X dx}$; $\int \frac{dQ}{dx} dy = y X e^{\int X dx}$; und

$$\int \left[ P - \int \frac{dQ}{dx} dy \right] dx =$$

$$= \int \left[ e^{\int X dx}(Xy + X_1) - y X e^{\int X dx} \right] dx = \int X_1 e^{\int X dx}\, dx;$$

hiemit ergibt sich

$$y e^{\int X dx} + \int X_1 e^{\int X dx}\, dx = C$$

als allgemeines Integral der Gl. (6), übereinstimmend mit Gl. (2), §. 505.

**508.** Auch bei homogenen Differenzialgleichungen lässt sich der integrirende Faktor jederzeit angeben.

Ist nämlich $U = F(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Funktion vom $n^{\text{ten}}$ Grade einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, und

$$dU = P dx + Q dy + R dz + \ldots\ldots$$

das vollständige Differenzial derselben, wo $P$, $Q$, $R$, .... die partiellen Differenzialquotienten von $U$ nach $x$, $y$, $z$, .... bedeuten, so ist vermöge des in §. 319 bewiesenen Lehrsatzes von den homogenen Funktionen:

$$nU = Px + Qy + Rz + \ldots.$$

Es sei nun $P dx + Q dy = 0$ eine homogene Differenzialgleichung und $\lambda$ der integrirende Faktor, so ist:

$$\lambda P dx + \lambda Q dy = 0 = dU$$

ein vollständiges Differenzial einer Funktion $U = C$ von $x$ und $y$. Setzen wir nun $\lambda$ ebenfalls als homogen voraus, so folgt aus der letzten Gleichung mit Rücksicht auf obigen Lehrsatz:

$$\lambda P x + \lambda Q y = (n+1)\, U,$$

wenn $n$ der Grad der homogenen Funktionen $\lambda P$ und $\lambda Q$. Durch Division beider Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{P dx + Q dy}{P x + Q y} = \frac{dU}{(n+1)\, U},$$

und da die rechte Seite hier ein vollständiges Differenzial ist, so gilt diess auch von dem Ausdrucke linker Hand, woraus folgt, dass $\lambda = \dfrac{1}{Px + Qy}$ ein integrirender Faktor ist.

Beisp. Der homogenen Differenzialgleichung:

$$(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$$

entspricht der integrirende Faktor $\lambda = \dfrac{1}{(x^2 - y^2)x + 2xy^2} = \dfrac{1}{x^3 + xy^2}$; Durch Multiplication mit demselben, wird unsere Gleichung

$$\frac{x^2 - y^2}{x(x^2 + y^2)}\, dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}\, dy = 0$$

ein vollständiges Differenzial, und man findet mittelst des in §. 503 gelehrten Verfahrens ohne Schwierigkeit: $x^2 + y^2 = Cx$ als allgemeines Integral. Zu diesem Resultate würde man aber einfacher mittelst der Substitution $y = xt$ [§. 506] gelangen, durch welche die Trennung der Variabeln bewirkt wird.

**509.** Betrachten wir nun Differenzialgleichungen der 1ten Ordnung von höherem Grade, d. i. solche, in welchen die Differenzialien $dx$, $dy$, oder der Differenzialquotient $\dfrac{dy}{dx} = y'$ in höheren Potenzen erscheinen. Die allgemeine Form einer Differenzialgleichung der 1ten Ordnung vom $n^{\text{ten}}$ Grade ist:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + U_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + U_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots\ldots + U_{n-1}\frac{dy}{dx} + U_n = 0, \quad (1)$$

wo $U_1$, $U_2$, ...... $U_n$ Funktionen von $x$ und $y$. Der unmittelbare Weg, um zu dem allgemeinen Integral dieser Gleichung zu gelangen, wäre die Auflösung derselben nach $\dfrac{dy}{dx}$. In der That, sind $U_1$, $U_2$, $U_3$, .... $U_n$ die $n$ Wurzeln derselben, so ist sie bekanntlich gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{dy}{dx}-u_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-u_2\right)\left(\frac{dy}{dx}-u_3\right)\ldots\ldots\left(\frac{dy}{dx}-u_n\right)=0; \qquad (2)$$

jeder Werth von $y$, welcher einer der Gleichungen

$$\frac{dy}{dx}-u_1=0,\ \frac{dy}{dx}-u_2=0,\ \ldots\ldots \frac{dy}{dx}-u_n=0 \qquad (3)$$

Genüge leistet, genügt daher auch der Gl. (1) und ist folglich ein Integral derselben. Hiedurch ist die Integration einer Gleichung vom $n^{\text{ten}}$ Grade zurückgeführt auf die Integration von $n$ Gleichungen des $1^{\text{ten}}$ Grades. Sind nun

$$f_1(x,y,C_1)=0,\ f_2(x,y,C_2)=0,\ \ldots\ldots f_n(x,y,C_n)=0$$

die Integrale der Gleichungen (3), so ist

$$f_1(x,y,C_1)\,.\,f_2(x,y,C_2)\ldots\ldots f_n(x,y,C_n)=0$$

das allgemeine Integral der Gleichung (1), denn diese Gleichung umfasst offenbar alle Werthe von $y$, aber auch nur diese, welche der Gl. (1) Genüge leisten.

Man kann übrigens sämmtliche willkürliche Constanten $C_1, C_2, \ldots C_n$, welche in den einzelnen particulären Integralen erscheinen, mit demselben Buchstaben bezeichnen, und die letzte Gleichung, unbeschadet ihrer Allgemeinheit, in der Form:

$$f_1(x,y,C)\,.\,f_2(x,y,C)\ldots\ldots f_n(x,y,C)=0$$

darstellen, weil man offenbar, wenn man diesem einen Buchstaben alle möglichen Zahlenwerthe beilegt, sämmtliche particuläre Integrale erhält, welche jeder Faktor zu liefern fähig ist. Es liegt übrigens auch in der Natur der Sache, dass das Integral einer Differenzialgleichung $1^{\text{ter}}$ Ordnung, gleichviel von welchem Grade, nur eine willkürliche Constante enthalten kann.

Beisp. Die gegebene Gleichung sei: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a^2=0$; durch Auflösung derselben erhält man die Gleichungen $1^{\text{ten}}$ Grades:

$$dy-adx=0,\ dy+adx=0,$$

deren allgemeine Integrale

$$y-ax+C=0,\ y+ax+C=0$$

sind. Das Produkt derselben:

$$(y+C)^2-a^2x^2=0$$

ist somit das Integral der vorgelegten Gleichung.

Diese Methode, so einfach sie ist, begegnet jedoch häufig jenen Schwierigkeiten, mit welchen die Auflösung höherer Gleichungen überhaupt verknüpft ist, daher wir noch einige für specielle Fälle brauchbare Methoden kennen lernen wollen.

Es möge nur noch bemerkt werden, dass die Integration der Gleichung (1) sehr einfach ist, wenn $U_1, U_2, \ldots U_n$ sämmtlich constante Grössen sind. Denn dann ist offenbar auch $\frac{dy}{dx} = a$ eine constante Grösse, folglich $y = ax + C$, wo $C$ die willkürliche Constante; substituirt man den hieraus folgenden Werth von $a = \frac{y-C}{x}$ statt $\frac{dy}{dx}$ in (1), so hat man das gesuchte allgemeine Integral.

**510.** Häufig wird man die vorgelegte Gleichung leichter nach $y$ oder nach $x$ aufzulösen im Stande sein, als nach $\frac{dy}{dx} = y'$, und hiedurch zu einer der beiden Gleichungen

$$y = f(x, y'), \text{ oder } x = f(y, y')$$

gelangen. Die Differenziation einer oder der anderen dieser Gleichungen führt augenscheinlich zu einer Differenzialgleichung erster Ordnung und 1[ten] Grades beziehungsweise zwischen $x$ und $y'$ oder $y$ und $y'$. Kann man nun diese integriren, so erübrigt nur noch die Elimination von $y'$ aus dem erhaltenen Integrale und der gegebenen Differenzialgleichung, um das Integral der letzteren zu erhalten.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung des Verfahrens dienen.

1) Die gegebene Gleichung sei: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - ay = 0$; hieraus folgt $y = \frac{1}{a}y'^3$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{a}y'^2 \cdot \frac{dy'}{dx}$; d. i. $y' = \frac{3}{a}y'^2\frac{dy'}{dx}$ oder $dx = \frac{3}{a}y'dy'$, eine Gleichung, deren Integral ist: $x = \frac{3}{2a}y'^2 + C$, oder $y'^2 = \frac{2}{3}ax + C$, wo $C$ die willkürliche Constante. Aus dieser Gleichung und der gegebenen $y'$ eliminirend, erhält man:

$$\left(\frac{2}{3}ax + C\right)^3 = a^2y^2$$

als Integral der vorgelegten Gleichung.

2) Die Curve zu finden, für welche das aus dem Ursprunge auf irgend eine Tangente der Curve gefällte Perpendikel $= a$ sei.

Die Gleichung der Tangente im Punkte $x, y$ der Curve ist: $\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) = y'(\xi - x)$; das vom Ursprung auf diese Tangente gefällte Perpendikel wird ausgedrückt durch $\frac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$ [§. 171]; folglich ist, der Bedingung der Aufgabe zufolge:

$$\frac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}=a \text{ oder } y-xy'=a\sqrt{1+y'^2} \qquad (l)$$

die Differenzialgleichung der gesuchten Curve, welche wir sofort zu integriren haben.

Durch Differenziation derselben erhält man:

$$0=\frac{dy'}{dx}\left(x+\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

welche Gleichung in die beiden folgenden:

$$\frac{dy'}{dx}=0, \text{ und } x+\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}=0 \qquad (m)$$

zerfällt. Aus der ersten folgt $y'=C$; dieser Werth in die gegebene Gleichung substituirt, gibt:

$$y=Cx+a\sqrt{1+C^2} \qquad (n)$$

als allgemeines, weil mit einer willkürlichen Constante versehenes, Integral der vorgelegten Gleichung. Die gesuchte Curve ist daher eine gerade Linie, welche von der Ordinatenaxe das Stück $a \sec \alpha$ abschneidet, wenn $\alpha$ den ganz willkürlichen, mit $C$ durch die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha=C$ zusammenhängenden, Neigungswinkel der Geraden gegen die Abscissenaxe bedeutet; ein durch einfache geometrische Betrachtung leicht zu bestätigendes Resultat.

Aus der zweiten der Glgn. $(m)$ folgt aber $y'=\pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, woraus sich noch $\sqrt{1+y'^2}=-\frac{ay'}{x}=\mp\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ergibt. Substituirt man diese Werthe in die Gl. $(l)$, so erhält man ein zweites Integral dieser Gleichung:

$$x^2+y^2=a^2,$$

welches, weil mit keiner willkürlichen Constante versehen, und aus dem allgemeinen Integrale $(n)$ auf keine Weise ableitbar, eine besondere Auflösung der Gleichung $(l)$ ist. Es drückt einen Kreis vom Halbmesser $a$ aus, welcher augenscheinlich der Bedingung der Aufgabe gleichfalls Genüge leistet. Dieser Kreis ist nichts anderes als die einhüllende Curve sämmtlicher durch die Gl. $(n)$ ausgedrückten Geraden, wie man sich leicht unmittelbar überzeugt, wenn man aus der Gl. $(n)$ und ihrem nach $C$ genommenen Differenzial, $C$ eliminirt. (Vergl. §. 376).

**511.** Die Gl. (1) im §. 509 lässt sich immer ohne Schwierigkeit integriren, wenn sie in Bezug auf $x$ und $y$ homogen, d. h. von der Form:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \ldots + \varphi_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad (1)$$

ist. Setzt man nämlich $y = xt$, so erhält diese Gleichung die Form $F(y', t) = 0$, aus welcher man

$$y' = f(t) \text{ oder } t = f(y') \qquad (m)$$

zieht. Nun ist $dy = xdt + tdx$, oder $y' = x\frac{dt}{dx} + t$, woraus

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t} \text{ und } lx = \int \frac{dt}{y' - t}$$

folgt, wodurch die Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt ist, weil das Integral rechter Hand mittelst einer der Glgn. $(m)$ von einer einzigen Veränderlichen $t$ oder $y'$ abhängig gemacht werden kann. Im ersten Falle ergibt sich ein Resultat von der Form $lx = \psi(t) + C$, in welchem nur noch $t = \frac{y}{x}$ zu setzen ist, um das Integral der Gleichung (1) zu haben; im zweiten Falle erhält man die Gleichung $lx = \psi(y') + C$, deren Verbindung mit (1) durch Elimination von $y'$ das gesuchte Integral darbietet.

Beisp. Es sei die homogene Gleichung

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{ax + yy'}{\sqrt{ax^2 + y^2}}$$

gegeben, so verwandelt sich dieselbe mit Hülfe der Substitution $y = xt$ in

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{a + ty'}{\sqrt{a + t^2}},$$

aus welcher $y' = t \pm k\sqrt{a + t^2}$ folgt, wenn der Kürze wegen $k = \sqrt{\frac{a-1}{a}}$ gesetzt wird. Dieser Werth in die Gleichung: $y' = x\frac{dt}{dx} + t$ substituirt, gibt:

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{1}{k}\int \frac{dt}{\sqrt{a + t^2}}, \text{ somit } lx = \pm \frac{1}{k}\, l(t + \sqrt{a + t^2}) + C.$$

Durch Wiederherstellung des Werthes von $t = \frac{y}{x}$ folgt hieraus:

$$lx = \pm \frac{1}{k}\, l\left(\frac{y}{x} + \sqrt{a + \frac{y^2}{x^2}}\right) + C,$$

als allgemeines Integral der vorgelegten Gleichung, welchem man auch die Form

$$\left(\frac{x}{C}\right)^k = \pm\left(\frac{y}{x} + \sqrt{a + \frac{y^2}{x^2}}\right)$$

geben kann.

**512.** Aus dem bisher Vorgetragenen ist zu ersehen, dass Differenzialgleichungen erster Ordnung nur dann unter allen Umständen integrirt werden können, wenn sie linear oder homogen sind. Fällt die gegebene Gleichung nicht unter eine dieser Formen, so gelingt die Integration in geschlossener Form nur in besonderen Fällen durch Anwendung von der Form der Gleichung entsprechenden Kunstgriffen, in der Regel durch Substitution neuer Veränderlicher bestehend, worüber sich allgemeine Vorschriften nicht geben lassen.

Als letztes Mittel steht uns die Integration durch Reihen zu Gebote, d. h. die Darstellung des Integrals in Form einer unendlichen Reihe, welche, wenn sie brauchbar sein soll, nothwendig convergiren muss. Gesetzt, es sei $y = f(x) + C$ das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 1ter Ordnung:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

und die Funktion $f(x)$ lasse sich in eine nach Potenzen von $x$ oder allgemeiner von $x - x_0$ fortlaufende, convergirende Reihe entwickeln, so muss diese nothwendig mit der Maclaurin'schen Reihe übereinstimmen, und man hat daher [§. 340, Gl. (5)]:

$$y = f(x) =$$

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} f'''(x_0) + \ldots.$$

Die Gl. (1) bietet den ersten Differenzialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \varphi(x, y)$$

in Funktion von $x$ und $y$ dar, aus welchem man durch fortgesetztes Differenziren die höheren Differenzialquotienten:

$$f''(x) = \varphi'(x, y), \quad f'''(x) = \varphi''(x, y), \quad f''''(x) = \varphi'''(x, y) \ldots\ldots$$

entwickeln kann. Ist nun $y_0$ jener Werth, den die Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ annimmt, und welcher, da man ja die Funktion $f(x)$ nicht kennt, unbestimmt bleibt, so hat man $f(x_0) = y_0$, und:

$$f'(x_0) = \varphi(x_0, y_0), \quad f''(x_0) = \varphi'(x_0, y_0), \quad f'''(x_0) = \varphi''(x_0, y_0) \ldots\ldots,$$

womit:

$$y = y_0 + (x - x_0)\varphi(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{1.2} \varphi'(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} \varphi''(x_0, y_0) + \ldots. \tag{2}$$

wird. Diess ist nun das allgemeine Integral der Gl. (1), denn dieser Werth von $y$ genügt offenbar der Gl. (1) und enthält eine willkürliche Constante $y_0$.

Bisweilen lässt sich die erhaltene Reihe summiren, in welchem Falle man durch Vermittelung der unendlichen Reihe zu einem ge-

schlossenen Ausdrucke des Integrals gelangt. Auch kann es geschehen, dass die Reihe von selbst abbricht, wenn nämlich, von einem Differenzialquotienten angefangen, alle folgenden $=0$ werden.

Setzt man voraus, dass das Integral sich in eine Reihe von der Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ entwickeln lasse, so kann man sich auch der einfachen Maclaurin'schen Formel bedienen; d. h. in obiger Gleichung $x_0 = 0$ setzen. Man erhält dann:

$$y = y_0 + x . \varphi_0 + \frac{x^2}{1.2} \varphi'_0 + \frac{x^3}{1.2.3} \varphi''_0 + \ldots\ldots \qquad (3)$$

wo $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, \ldots$ die Werthe sind, welche die Differenzialquotienten, vom 1ten angefangen annehmen, wenn man darin $x=0$, $y=y_0$ setzt, wo $y_0$ wieder als willkürliche Constante fungirt.

Als Beispiel diene die Gleichung: $dy - ydx = e^x dx$; man zieht daraus:

$$\frac{dy}{dx} = y' = y + e^x;$$

$$y'' = y' + e^x = y + 2e^x;\quad y''' = y'' + e^x = y + 3e^x;\ \text{u. s. w.};$$

$$\varphi(x_0, y_0) = y_0 + e^{x_0};\quad \varphi'(x_0, y_0) = y_0 + 2e^{x_0};\quad \varphi''(x_0, y_0) = y_0 + 3e^{x_0};\ \ldots$$

Diese Werthe in Gl. (2) substituirt, erhält man nach leichter Reduktion:

$$y = [y_0 + (x - x_0)\, e^{x_0}] \left[1 + (x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3} + \ldots\right].$$

Die eingeklammerte Reihe lässt sich summiren, und ist $= e^{x-x_0}$; das gesuchte Integral ist daher:

$$y = [y_0 + (x - x_0)\, e^{x_0}]\, e^{x-x_0},$$

oder einfacher:

$$y = (C + x)\, e^x,$$

wenn man mit $C$ den zu $x_0 = 0$ gehörigen Werth von $y_0$ bezeichnet; übereinstimmend mit dem in §. 505 auf anderem Wege erhaltenen Resultate. Uebrigens hätte in diesem Beispiele mit grösserer Bequemlichkeit die Formel (3) benützt werden können, da, — wie man leicht übersieht, — für $x = 0$ keiner der Differenzialquotienten unendlich wird.

Statt des obigen Verfahrens bedient man sich häufiger mit Vortheil der Methode der unbestimmten Coefficienten. Man setze nämlich:

$$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \ldots\ldots \qquad (4)$$

wo $A_0, A_1, A_2, \ldots$ unbestimmte constante Coefficienten sind und $\alpha$ einen gleichfalls noch unbestimmten Exponenten bedeutet. Substituirt man diesen Werth in die vorgelegte Differenzialgleichung, so erhält man eine Gleichung, welche nothwendig identisch sein muss, und sofort — nach dem Satze der unbestimmten Cofficienten — die Mittel darbietet zur Bestimmung der noch unbestimmten Grössen. Dieses

Verfahren muss aber dann in Anwendung kommen, wenn die Entwickelung von $y$ Potenzen von $x$ mit negativen oder gebrochenen Exponenten enthält, weil in diesem Falle die Maclaurin'sche Reihe nicht anwendbar ist.

Als Beispiel wählen wir die Gleichung:

$$y' + \frac{y}{x} + x = 0$$

und substituiren in dieselbe den Ausdruck (4), so kommt:

$$x + A_0(\alpha + 1)x^{\alpha-1} + A_1(\alpha+2)x^{\alpha} + A_2(\alpha+3)x^{\alpha+1} + \ldots\ldots = 0. \quad (m)$$

Dieser Gleichung leisten wir Genüge, wenn wir $\alpha - 1 = 1$, also $\alpha = 2$ setzen, wodurch dieselbe in

$$(1 + 3A_0)x + 4A_1x^2 + 5A_2x^3 + \ldots\ldots = 0$$

übergeht, und nunmehr

$$A_0 = -\frac{1}{3},\ A_1 = A_2 = A_3 = \ldots\ldots 0$$

setzen. Hiemit erhalten wir $y = -\frac{1}{3}x^2$ als einen der gegebenen Differenzialgleichung Genüge leistenden Werth, welcher jedoch nur als particuläres Integral gelten kann, weil er einer willkürlichen Constante ermangelt. Setzen wir aber $\alpha = -1$, so wird die Gl. $(m)$:

$$x + A_1x^{-1} + 2A_2 + 3A_3x + 4A_4x^2 + \ldots\ldots = 0,$$

und diese ist erfüllt, wenn wir

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ 3A_3 = -1,\ A_4 = A_5 = \ldots\ldots = 0$$

setzen, welche Werthe in die Gl. (4) substituirt:

$$y = \frac{A_0}{x} - \frac{x^2}{3}$$

als allgemeines Integral der vorgelegten Differenzialgleichung geben.

## II. Von den Differenzialgleichungen höherer Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen.

**513.** Dem in §. 501 aufgestellten Begriffe zufolge heisst eine Differenzialgleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn der höchste in derselben vorkommende Differenzialquotient von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Eine solche Gleichung kann allgemein durch die Formel:

$$f(x, y, y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

dargestellt werden, wo $y', y'', y''', \ldots\ldots$ die Differenzialquotienten von $y$, nach $x$ genommen, bedeuten. Jede Funktion von $x$, $y = \varphi(x)$, welche dieser Gleichung Genüge leistet, ist ein Integral derselben. Soll das

Integral einer Differenzialgleichung $n^{ter}$ Ordnung denselben Grad der Allgemeinheit besitzen, welcher der Differenzialgleichung innewohnt, so muss dasselbe mit $n$ willkürlichen Constanten versehen sein, und heisst dann das allgemeine Integral. In der That, ist $y = \varphi(x)$ eine der Gl. (1) Genüge leistende Funktion, also ein Integral derselben, so muss diese Gleichung durch Substitution der Werthe:

$$y = \varphi(x),\ y' = \varphi'(x),\ y'' = \varphi''(x), \ldots\ldots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x) \tag{2}$$

identisch werden, und ist demnach eine unmittelbare Folge der Glgn. (2), deren Anzahl $= n + 1$. Enthält daher $y = \varphi(x)$ $n$ Constante, welche in (1) nicht erscheinen, so führt die Elimination derselben aus den Glgn. (2) nothwendig zur Gl. (1). In der Möglichkeit dieser Ableitung der Gl. (1) aus jenen (2) liegt die Rechtfertigung obiger Behauptung.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man durch geometrische Betrachtungen, ähnlich jenen, zu welchen die Differenzialgleichung $1^{ter}$ Ordnung Anlass bot. Indem die Gl. (1) in letzter Linie eine Beziehung zwischen der unabhängig Veränderlichen $x$ und der abhängig Veränderlichen $y$ aufstellt, drückt sie, wenn wir $x$, $y$ als rechtwinklige Coordinaten betrachten, eine Curve aus, welche wir mit Hülfe dieser Gleichung construiren können. Es genügt, diess für die Differenzialgleichung $2^{ter}$ Ordnung:

$$f(x, y, y', y'') = 0 \tag{3}$$

zu zeigen, da dieselben Betrachtungen sich leicht auf Gleichungen höherer Ordnung übertragen lassen. Aus (3) folgt durch Auflösung nach $y''$:

$$y'' = \psi(x, y, y'). \tag{4}$$

Es sei nun $x_0$, $y_0$ ein willkürlich gewählter Punkt, und $y'_0$ ein gleichfalls willkürlich gewählter Werth von $y'$, welcher zu dem Werthe $x = x_0$ gehören soll, so dass wir also zwei Grössen willkürlich annehmen, nämlich die zur Abscisse $x_0$ gehörige Ordinate $y_0$ und die Neigung der Curve gegen die Abscissenaxe im Punkte $x_0$, $y_0$. Unter $\delta$ eine unendlich kleine Grösse verstanden, bestimmen sofort die Gleichungen:

$$x_1 = x_0 + \delta, \qquad y_1 = y_0 + \delta y'_0,$$
$$x_2 = x_0 + 2\delta, \qquad y_2 = y_1 + \delta y'_1.$$

einen $2^{ten}$ und $3^{ten}$ Punkt der Curve, wo $y'_1$, d. i. die Neigung der Curve im Punkte $x_1, y_1$, aus der Gleichung:

$$y_1' = y_0' + \delta y_0''$$

folgt und $y''_0$ aus der gegebenen Differenzialgleichung (4):

$$y_0'' = \psi(x_0, y_0, y_0')$$

sich bestimmt. Ein 4ter Punkt:

$$x_3 = x_0 + 3\delta, \quad y_3 = y_2 + \delta y_2'$$

ergibt sich mittelst der Gleichungen:

$$y_2' = y_1' + \delta y_1'', \quad y_1'' = \psi(x_1, y_1, y_1');$$

ein fünfter:

$$x_4 = x_0 + 4\delta, \quad y_4 = y_3 + \delta y_3'$$

mittelst der Gleichungen:

$$y_3' = y_2' + \delta y_2'', \quad y_2'' = \psi(x_2, y_2, y_2'),$$

u. s. w.

Bei dieser Construction sind also zwei Grössen, nämlich die der Abscisse $x_0$ entsprechende Ordinate $y_0$ und die Neigung der Curve in diesem Punkte, $y'_0$ willkürlich geblieben, und je nachdem man für diese beiden Grössen diese oder jene Werthe wählt, erhält man andere und andere Curven in unendlicher Anzahl, welche somit sämmtlich in der gegebenen Differenzialgleichung enthalten sind, welche letztere eine bestimmte, allen diesen Curven gemeinschaftliche Eigenschaft ausdrückt. Sie bestimmt Gestalt und Lage der Curve, sobald man einen Punkt, durch welchen dieselbe gehen soll, und die Richtung der Tangente in diesem Punkte als gegeben betrachtet. Das Integral der Gl. (3) ist nichts anderes, als die endliche Gleichung dieser Curven, welche, wenn sie alle in der Differenzialgleichung begriffenen Curven umfassen soll, nothwendig mit zwei willkürlichen Constanten versehen sein muss.

Ein Integral der Gl. (1), welches weniger als $n$ willkürliche Constante enthält, heisst ein particuläres, oder ein singuläres Integral (besondere Auflösung), je nachdem dasselbe aus dem allgemeinen Integral durch Specialisirung des Werthes einer oder mehrerer willkürlichen Constanten abgeleitet werden kann oder nicht.

**514.** Einer Differenzialgleichung $n^{ter}$ Ordnung entsprechen $n$ Differenzialgleichungen $(n-1)^{ter}$ Ordnung, als ebenso viele 1te Integrale, deren jedes mit einer willkürlichen Constante versehen ist. In der That, ist $y = \varphi(x)$ das mit $n$ willkürlichen Constanten behaftete allgemeine Integral der Gleichung $n^{ter}$ Ordnung:

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0,$$

so kann man aus den Gleichungen:

$$y = \varphi(x), \; y' = \varphi'(x), \; y'' = \varphi''(x), \ldots, y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x),$$

$n$ an der Zahl, $n-1$ Constanten eliminiren und gelangt hiedurch zu einer Differenzialgleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, welche noch eine

der $n$ willkürlichen Constanten enthält; der Werth $y = \varphi(x)$ leistet ihr, sowie der Gl. (1) Genüge, und da sie von einer um eine Einheit niedrigeren Ordnung ist, als die Gl. (1), so wird sie ein erstes Integral dieser Gleichung genannt. Nun lässt sich aber diese Elimination auf $n$ verschiedene Weisen vornehmen, je nachdem man die eine oder die andere der $n$ willkürlichen Constanten übrig lässt, so dass also $n$ von einander verschiedene Differenzialgleichungen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, als $1^{\text{te}}$ Integrale der Gl. (1) existiren, deren jedes mit einer anderen willkürlichen Constanten versehen ist. Kann man in einem vorgelegten Falle diese $n$ ersten Integrale der Gl. (1) finden, so erhält man offenbar das allgemeine Integral der Gl. (1) wenn man aus ihnen die Differenzialquotienten $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$ eliminirt.

So folgt z. B. aus der primitiven Gleichung:

$$xy - ax + by = 0 \qquad (m)$$

durch zweimalige Differenziation:

$$y'(x + b) + y - a = 0, \qquad (n)$$

$$y''(x + b) + 2y' = 0; \qquad (p)$$

durch Elimination von $a$ und $b$ aus diesen drei Gleichungen folgt die Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$xyy'' - 2y'(y' - y) = 0, \qquad (q)$$

deren allgemeines mit den zwei willkürlichen Constanten $a$ und $b$ versehenes Integral $(m)$ ist. Eliminirt man aber aus den beiden Gleichungen $(m)$ und $(n)$ einmal $b$, dann $a$, so ergeben sich die beiden Differenzialgleichungen $1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$x^2y' + b(xy' - y) = 0, \quad y^2 + a(xy' - y) = 0,$$

welche, mit je einer willkürlichen Constanten behaftet, die $1^{\text{ten}}$ Integrale der Gl. $(q)$ sind. Die Elimination von $y'$ zwischen diesen beiden Gleichungen, führt wieder zum allgemeinen Integrale $(m)$.

**515.** Beschäftigen wir uns zunächst mit der Integration einiger der einfachsten Formen von Differenzialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

I. Die gegebene Gleichung sei von der Form:

$$y'' = f(y);$$

nun ist $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = y' \dfrac{dy'}{dy}$; hiemit verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$y' \frac{dy'}{dy} = f(y) \quad \text{oder} \quad y'dy' = f(y)\,dy,$$

deren Integral

$$\frac{1}{2}y'^2 = \frac{1}{2}C + \int f(y)\,dy$$

ist, woraus man

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}, \text{ d. i. } dx = \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}}$$

erhält. Durch nochmalige Integration ergibt sich:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}} + C_1$$

als allgemeines Integral der vorgelegten Gleichung.

II. Die Gleichung

$$y'' = f(y')$$

kann, mit Anwendung der soeben benutzten Umformung von $y'' = \frac{dy'}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}$ auf die beiden Formen:

$$\frac{dy'}{dx} = f(y') \text{ und } y'\frac{dy'}{dy} = f(y'),$$

oder:

$$dx = \frac{dy'}{f(y')} \text{ und } dy = \frac{y'\,dy'}{f(y')}$$

gebracht werden, Gleichungen, in welchen die Veränderlichen gesondert, und deren Integrale:

$$x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C, \quad y = \int \frac{y'\,dy'}{f(y')} + C_1$$

sind. Die Elimination von $y'$ aus diesen beiden Gleichungen liefert das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

III. Das in den beiden vorhergehenden Fällen angewendete Verfahren lässt sich leicht auf Gleichungen von der Form:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) \text{ und } y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

ausdehnen, in welchen der $n^{\text{te}}$ Differenzialquotient als Funktion des um eine oder zwei Einheiten niedrigeren Differenzialquotienten ausgedrückt ist.

Wäre z. B. die Gleichung

$$y''' = f(y'')$$

gegeben, so kann man dieselbe in der Form $\frac{dy''}{dx} = f(y'')$ schreiben, woraus man $dx = \frac{dy''}{f(y'')}$ und

$$x = C + \int \frac{dy''}{f(y'')}$$

zieht. Anderseits folgt aus $dy' = y''dx = \frac{y''dy''}{f(y'')}$: $y' = C_1 + \int \frac{y''dy''}{f(y'')}$, und somit:

$$dy = y'dx = C_1\,dx + \frac{dy''}{f(y'')}\int \frac{y''dy''}{f(y'')},$$

woraus

$$y = C_2 + C_1 x + \int \frac{dy''}{f(y'')}\int \frac{y''dy''}{f(y'')}$$

erhalten wird. Durch Elimination von $y''$ aus den für $x$ und $y$ erhaltenen Ausdrücken ergibt sich das allgemeine Integral mit den drei willkürlichen Constanten $C$, $C_1$, $C_2$.

Schreibt man die Gleichung

$$y''' = f(y')$$

in der Form

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = f(y'),$$

so gibt dieselbe nach I. sofort:

$$dx = \frac{dy'}{\sqrt{C + 2\int f(y')\,dy'}},\quad x = C_1 + \int \frac{dy'}{\sqrt{C + 2\int f(y')dy'}};$$

ferner hat man:

$$dy = y'dx = \frac{y'dy'}{\sqrt{C + 2\int f(y')\,dy'}},\quad y = C_2 + \int \frac{y'dy'}{\sqrt{C + 2\int f(y')\,dy'}},$$

und es erübrigt nun nur noch die Elimination von $y'$ aus diesen beiden Gleichungen, um das allgemeine Integral zu erhalten.

IV. Es sei die Gleichung

$$y'' = f(x, y')$$

gegeben, so ist dieselbe gleichbedeutend mit der Differenzialgleichung 1ter Ordnung:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x, y')$$

zwischen den beiden Veränderlichen $x$ und $y'$, deren Integration nach den Lehren des vorhergehenden Abschnittes zu einer Gleichung von der Form $\varphi(x, y', C) = 0$ führt; diese ist gleichfalls eine Differenzialgleichung 1ter Ordnung zwischen $x$ und $y$, und liefert, integrirt, das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

V. In ähnlicher Art behandelt man die Gleichung

$$y'' = f(y, y');$$

in der Form:

$$y'\frac{dy'}{dy} = f(y, y')$$

geschrieben, ist sie offenbar eine Differenzialgleichung 1ter Ordnung

zwischen den Veränderlichen $y$ und $y'$; das Integral derselben, von der Form $\varphi(y, y', C) = 0$, ist wieder eine Differenzialgleichung 1ter Ordnung zwischen $x$ und $y$, deren Integration das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung darbietet.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1) Die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y$ fällt unter die Form I, und man hat somit, da $\int f(y)\,dy = \int a^2y\,dy = \frac{1}{2}a^2y^2$ ist, als allgemeines Integral:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + a^2y^2}} + C_1 = \frac{1}{a} l\,(ay + \sqrt{C + a^2y^2}) + C_1.$$

Schreibt man diesen Ausdruck in der Form:

$$a(x - C_1) = l(ay + \sqrt{C + a^2y^2}), \text{ oder}$$

$$ay + \sqrt{C + a^2y^2} = e^{ax}.\, e^{-aC_1} = C' e^{ax},$$

und macht rational, so erhält man $2C' e^{ax} ay = C'^2 e^{2ax} - C$, und hieraus:

$$y = Ae^{ax} + Be^{-ax},$$

wo $A$ und $B$ die willkürlichen Constanten bedeuten.

2) Für die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y^2$ findet man auf demselben Wege

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C - a^2y^2}} + C_1 = \frac{1}{a} \text{ arc sin } \frac{ay}{\sqrt{C}} + C_2,$$

und hieraus: $y = \frac{\sqrt{C}}{a} \sin a(x - C_2)$, d. i. wenn man auflöst, und die Constanten ändert,

$$y = A \sin ax + B \cos ax.$$

3) Die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser constant ($= a$) ist. Diese Bedingung wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = a, \text{ oder } y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)^{3/2},$$

welche, nach II, für $x$ und $y$ die Werthe:

$$x = a \int \frac{dy'}{(1 + y'^2)^{3/2}} + C = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} + C,$$

$$y = a \int \frac{y'dy'}{(1 + y'^2)^{3/2}} + C_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}} + C_1$$

darbietet, aus welchen durch Elimination von $y'$:

$$(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = a^2$$

als Gleichung der gesuchten Curve folgt, welche demnach ein Kreis vom Halbmesser $a$ mit willkürlich gewähltem Mittelpunkte ist.

4) Die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser der Normale proportional ist. Man hat dieser Bedingung gemäss als Differenzialgleichung der gesuchten Curve:

$$\mp \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = my\sqrt{1+y'^2}, \text{ oder}$$

$$1 + y'^2 = \pm myy'',$$

welche Gleichung die unter V. betrachtete Form besitzt, und wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Krümmungshalbmesser und die Normale auf entgegengesetzten Seiten der Curve liegen oder auf derselben Seite. Durch die Substitution $y'' = y' \frac{dy'}{dy}$ verwandelt sich dieselbe in $\frac{dy}{y} = \pm m \frac{y'dy'}{1+y'^2}$, deren Integral: $lCy = \pm \frac{m}{2} l(1+y'^2) = l(1+y'^2)^{\pm \frac{m}{2}}$, d. i.:

$$Cy = (1+y'^2)^{\pm \frac{m}{2}}$$

ist. Hieraus zieht man: $y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{(Cy)^{\pm \frac{2}{m}} - 1}$, somit:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(Cy)^{\pm \frac{2}{m}} - 1}}, \quad x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{(Cy)^{\pm \frac{2}{m}} - 1}},$$

oder wenn man $\frac{1}{b}$ statt $C$ schreibt:

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{\pm \frac{2}{m}} - 1}},$$

wo $a$ und $b$ die willkürlichen Constanten. Für $m = 1$ und $m = 2$ lässt sich dieses Integral unter endlicher Form darstellen. Man erhält:

Für $m = 1$ mit dem oberen Zeichen:

$$x - a = b \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - b^2}} = bl \frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b},$$

oder wenn man nach $y$ auflöst,

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x-a}{b}} + e^{-\frac{x-a}{b}}\right),$$

die Gleichung einer Kettenlinie, deren Axe senkrecht steht auf der Axe der $x$, und deren tiefstem Punkte die willkürlichen Coordinaten $x = a$, $y = b$ entsprechen.

Für $m = 1$ mit dem unteren Zeichen:

$$x - a = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = -\sqrt{b^2 - y^2},$$

die Gleichung eines **Kreises** von willkürlichem Halbmesser $= b$, dessen Mittelpunkt in der Axe der $x$ liegt, in dem willkürlichen Abstande $= a$ vom Ursprunge.

Für $m = 2$ mit dem oberen Zeichen:

$$x - a = \sqrt{b}\int\frac{dy}{\sqrt{y-b}} = 2\sqrt{b(y-b)}, \text{ d. i.}$$

$$y = \frac{a^2 + 4b^2}{4b} - \frac{a}{2b}x + \frac{x^2}{4b},$$

die Gleichung einer **Parabel** [§. 234 Anmerk.], deren Axe senkrecht steht auf der Axe der $x$, deren Scheitel in dem willkürlichen Punkte $x = a$, $y = b$ liegt, und deren Parameter $= 4b$ ist.

Für $m = 2$ mit dem unteren Zeichen:

$$x - a = \int dy\sqrt{\frac{y}{b-y}} = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{by - y^2}}, \text{ d. i.}$$

$$x - a = \frac{b}{2}\arcsin\frac{2y-b}{b} - \sqrt{by - y^2},$$

die Gleichung einer **Cycloide**, deren Grundlinie die Axe der $x$, Halbmesser des Erzeugungskreises $= \frac{1}{2}b$. Man bringt diese Gleichung leicht auf die Form der Gl. (2) der Cycloide in §. 238, wenn man beachtet, dass $\arcsin u = \arccos(-u) - \frac{1}{2}\pi$ ist, und die Grösse $\frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}\pi$ mit der willkürlichen Constante $a$ vereiniget werden kann.

**516.** Von besonderer Wichtigkeit sind die **linearen** Differenzialgleichungen, in welchen $y$ und die Differenzialquotienten dieser Funktion nur in der ersten Potenz und nicht in einander multiplicirt erscheinen. Die allgemeine Form einer linearen Differenzialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist hiernach:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_{n-1}y' + P_n y = f(x), \quad (1)$$

wo $P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$ die Variable $y$ nicht enthalten, also Funktionen von $x$, oder Constanten sind. Ist $f(x) = 0$, also die Gleichung von der Form:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_{n-1}y' + P_n y = 0 \quad (2)$$

so heisst sie eine **reducirte** lineare Differenzialgleichung, oder eine solche **ohne zweiten Theil**; im Gegenfalle, wenn $f(x)$ von 0 verschieden ist, eine **complete** Gleichung (oder mit zweitem Theil).

Es wird später [§. 526] gezeigt werden, dass das allgemeine Integral der completen Gleichung (1) jederzeit entwickelt werden kann,

sobald man jenes der reducirten Gl. (2) anzugeben im Stande ist, daher wir uns zunächst mit der letzteren, als der einfacheren Form beschäftigen wollen.

Sind $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_i$ Funktionen von $x$, welche der Gl. (2) Genüge leisten, d. i. particuläre Integrale dieser Gleichung, so wird auch der Ausdruck

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots\ldots + C_iy_i$$

die Gleichung befriedigen, somit ein Integral derselben sein, wenn $C_1$, $C_2, \ldots. C_i$ willkürliche Constanten bezeichnen. Denn, substituirt man diesen Werth von $y$ in die Gl. (2), so verwandelt sich der erste Theil derselben, wenn man sogleich nach den $C$ ordnet, in folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & C_1(y_1^{(n)} + P_1y_1^{(n-1)} + P_2y_1^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_ny_1) \\ + & C_2(y_2^{(n)} + P_1y_2^{(n-1)} + P_2y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_ny_2) \\ + & C_3(y_3^{(n)} + P_1y_3^{(n-1)} + P_2y_3^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_ny_3) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & C_i(y_i^{(n)} + P_1y_i^{(n-1)} + P_2y_i^{(n-2)} + \ldots\ldots + P_ny_i), \end{aligned}$$

welcher Ausdruck sich sofort auf Null reducirt, weil vermöge der Voraussetzung, dass $y_1, y_2, \ldots., y_i$ der Gl. (2) Genüge leisten, jedes der eingeklammerten Polynome für sich verschwindet.

Ist man daher im Stande, $n$ particuläre Integrale $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ der Differenzialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung (2) anzugeben, so ist das allgemeine Integral derselben:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots\ldots + C_ny_n.$$

**517.** Kennt man $m$ particuläre Integrale der reducirten Gl. (2), so kann die Integration dieser Gleichung immer auf die Integration einer linearen Differenzialgleichung von der Ordnung $n - m$ zurückgeführt werden.

In der That, ist $y_1$ ein particuläres Integral der Gl. (2), so setze man:

$$y = y_1 \int z dx, \tag{3}$$

wo $z$ eine noch unbekannte Funktion von $x$; durch Substitution dieses Werthes von $y$ in die Gl. (2) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} & [y_1^{(n)} + P_1y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + P_{n-1}y_1' + P_ny_1]\int zdx \\ + & Q_{n-1}z + Q_{n-2}z' + \ldots\ldots + Q_2z^{(n-3)} + Q_1z^{(n-2)} + y_1z_{(n-1)} \end{aligned}\right\} = 0,$$

wo $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots. Q_{n-1}$ bekannte Funktionen von $x$ sind, nämlich:

$$Q_1 = \binom{n}{1}y_1' + P_1y_1,$$
$$Q_2 = \binom{n}{2}y_1'' + P_1\binom{n-1}{1}y_1' + P_2y_1,$$

u. s. w.

Zufolge der Voraussetzung, dass $y_1$ ein der Gl. (2) Genüge leistender Werth von $y$ ist, verschwindet aber der polynomische Faktor von $\int z dx$, wodurch sich die letzte Gleichung in folgende verwandelt:

$$z^{(n-1)} + \frac{Q_1}{y_1} z^{(n-2)} + \frac{Q_2}{y_1} z^{(n-3)} + \ldots\ldots + \frac{Q_{n-2}}{y_1} z' + \frac{Q_{n-1}}{y_1} z = 0, \quad (4)$$

welche sofort zur Bestimmung von $z$ dient, und nur mehr von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist; findet man $z_1, z_2, \ldots\ldots z_{n-1}$ als particuläre Integrale dieser Gleichung, so sind:

$$y_1, \; y_2 = y_1 \int z_1 dx, \; y_3 = y_1 \int z_2 dx, \ldots\ldots y_n = y_1 \int z_{n-1} dx$$

die $n$ particulären Integrale der Gl. (2). Kennt man nun noch ein zweites particuläres Integral dieser Gleichung, z. B. $y_2$, so gibt sich hiedurch ein particuläres Integral $z_1$ der Gl. (4) zu erkennen; denn aus der Gleichung:

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx \text{ folgt } z_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),$$

und mit Hülfe dieses Integrals wird man nun wieder die Gl. (4) auf eine andere von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung zurückführen, indem man $z = z_1 \int v dx$ setzt. Auf diese Weise fortfahrend, sieht man leicht, dass jedes der gegebenen $m$ particulären Integrale der Gl. (2) dazu dient, um den Ordnungsexponenten um eine Einheit herabzudrücken, so dass man schliesslich zu einer Gleichung von der Ordnung $(n-m)$ gelangt.

Sei z. B. die lineare Differenzialgleichung $3^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben:

$$x^3 lx y''' - x^2(1-3lx) y'' - xy' + y = 0, \quad (m)$$

welcher, wie man sich durch Substitution leicht überzeugt, die beiden Werthe

$$y = x = y_1 \text{ und } y = \frac{1}{x} = y_2$$

Genüge leisten. Mittelst dieser beiden particulären Integrale kann man nun die Gl. $(m)$ auf eine andere $1^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen, deren Integral sodann das noch fehlende dritte particuläre Integral darbietet. Setzen wir zu diesem Ende $y = y_1 \int z dx = x \int z dx$, so verwandelt sich durch Substitution dieses Werthes die Gl. $(m)$ in folgende:

$$x^2 lx z'' + x(6lx-1) z' + 3(2lx-1) z = 0. \quad (n)$$

Ein Integral dieser Gleichung ist sofort:

$$z_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3};$$

wir setzen daher $z = z_1 \int v dx = -\frac{2}{x^3} \int v dx$, und erhalten durch Substitution dieses Werthes in die Gl. $(n)$:

$$lx \cdot v' - \frac{1}{x} v = 0 \text{ oder } lx \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x},$$

eine Differenzialgleichung 1[ter] Ordnung, welche durch Trennung der Veränderlichen die Form $\frac{v}{dv} = \frac{dx}{xlx}$ annimmt, woraus folgt:

$$lv = \int \frac{dx}{xlx} = l(lx), \text{ d. i. } v = lx;$$

hiemit wird nun das zweite particuläre Integral der Gl. $(n)$:

$$z_2 = z_1 \int v dx = -\frac{2}{x^3} \int lx\, dx = 2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{lx}{x^2}\right),$$

wo der constante Faktor 2 auch weggelassen werden kann, da er sich mit der willkürlichen Constante verbindet. Endlich hat man für das dritte particuläre Integral der Gl. $(m)$:

$$y_3 = y_1 \int z_2 dx = x \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{lx}{x^2}\right) dx = lx.$$

Das allgemeine Integral der Gl. $(m)$ ist daher:

$$y = Cx + \frac{C_1}{x} + C_2 lx.$$

**518.** Da man keine allgemeinen Methoden besitzt, nach welchen die Integration der reducirten linearen Differenzialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn die Coefficienten $P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$ beliebige Funktionen von $x$ bedeuten, ausgeführt werden könnte, so erübrigt nur die Betrachtung besonderer Fälle, in welchen eben die Beschaffenheit der Coefficienten die Auffindung particulärer Integrale gestattet.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn sämmtliche Coefficienten constante Grössen sind. Die Gleichung sei also:

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + A_{(n-1)} y' + A_n y = 0, \qquad (1)$$

und $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ reelle Constanten.*) Setzen wir $y = e^{\theta x}$, wo $\theta$ eine noch unbestimmte Constante, so wird $y' = \theta e^{\theta x}$, $y'' = \theta^2 e^{\theta x}$, $\ldots. y^{(n-1)} = \theta^{n-1} e^{\theta x}$, $y^{(n)} = \theta^n e^{\theta x}$, und die Gl. (1) verwandelt sich durch Substitution dieser Werthe in folgende:

$$\theta^n + A_1 \theta^{n-1} + A_2 \theta^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}\theta + A_n = 0. \qquad (2)$$

Sind daher $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, $n$ an der Zahl, so genügt offenbar jeder der Werthe

*) Wäre der zweite Theil der Gleichung statt mit 0 mit einer constanten Grösse $= B$ besetzt, so genügt es offenbar, $y = \eta + \frac{B}{A_n}$ zu setzen, um die Gleichung auf die Form (1) zu bringen.

$$e^{\theta_1 x},\ e^{\theta_2 x},\ e^{\theta_3 x},\ \ldots\ldots,\ e^{\theta_n x}$$

der Gl. (1) und ist sofort ein particuläres Integral derselben. Das allgemeine Integral der Gl. (1) ist dann, vermöge des in §. 516 erwiesenen Satzes:

$$y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + C_3 e^{\theta_3 x} + \ldots\ldots C_n e^{\theta_n x}. \tag{3}$$

Hat die Gl. (2) auch imaginäre Wurzeln, so erscheinen die entsprechenden Glieder des allgemeinen Integrals (3) unter imaginärer Form, welche jedoch, da wir die Coefficienten in (1) reell voraussetzen, nur scheinbar ist, und leicht beseitiget werden kann. In der That, sind $\theta_r = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\theta_{r+1} = \alpha - \beta\sqrt{-1}$ ein Paar conjugirter Wurzeln der Gl. (2), so werden die correspondirenden Glieder des allgemeinen Integrals, Kürze halber $\sqrt{-1} = i$ gesetzt:

$$C_r e^{(\alpha+\beta i)x} + C_{r+1} e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}[C_r e^{\beta x i} + C_{r+1} e^{-\beta x i}] =$$

$$= e^{\alpha x}[C_r(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_{r+1}(\cos\beta x - i\sin\beta x)] =$$

$$= e^{\alpha x}[(C_r + C_{r+1})\cos\beta x + i(C_r - C_{r+1})\sin\beta x];$$

setzen wir nun $C_r + C_{r+1} = B$, $i(C_r - C_{r+1}) = B'$, so wird dieser Ausdruck:

$$= e^{\alpha x}(B\cos\beta x + B'\sin\beta x), \tag{4}$$

wo nun $B$ und $B'$ zwei neue willkürliche Constanten sind, für welche sich aus den Bedingungen einer praktischen Aufgabe reelle Werthe ergeben werden.

Der Ausdruck (3) des allgemeinen Integrals bedarf einer Modifikation, wenn die Gl. (2) wiederholte Wurzeln enthält. Ist nämlich z. B. $\theta_1 = \theta_2$, so ziehen sich die beiden ersten Glieder auf das eine: $(C_1 + C_2)\,e^{\theta_1 x} = C' e^{\theta_1 x}$ zusammen, da die Summe $C_1 + C_2$ offenbar nur die Stelle einer einzigen willkürlichen Constanten vertreten kann; hiedurch hört nun (3) auf, das allgemeine, mit $n$ Constanten versehene Integral zu sein, und erfordert eine Ergänzung. Betrachten wir zu diesem Zwecke $\theta_1$ und $\theta_2$ zuerst als ungleich, und setzen wir $\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon$, so werden die beiden ersten Glieder in (3):

$$C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{(\theta_1+\varepsilon)x} = e^{\theta_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{\theta_1 x}\left[C_1 + C_2\left(1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \ldots\right)\right]$$

$$= e^{\theta_1 x}\left(B_1 + B_2 x + \frac{B_2 \varepsilon x^2}{2} + \ldots\ldots\right),$$

wenn wir nämlich $e^{\varepsilon x}$ in eine Reihe entwickeln, und $C_1 + C_2 = B_1$, $C_2\varepsilon = B_2$ setzen, wo nun $B_1$, $B_2$ zwei neue willkürliche Constanten bedeuten. Dieser Ausdruck leistet jedenfalls der Gl. (1) Genüge,

wenn nur $\theta_1$ und $\theta_1 + \varepsilon$ Wurzeln der Gl. (2) sind, gleichgültig, welchen Werth auch $\varepsilon$ besitzen möge. Lassen wir also $\varepsilon$ in Null übergehen, wodurch beide Wurzeln einander gleich werden, so verwandelt sich obiger Ausdruck in folgenden:

$$e^{\theta_1 x}(B_1 + B_2 x),$$

welcher sofort an die Stelle der beiden ersten Glieder in (3) tritt, wenn die Wurzel $\theta_1$ in der Gl. (2) zweimal vorhanden ist.

Sind drei gleiche Wurzeln, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ vorhanden, so betrachte man zuerst $\theta_3$ als verschieden von $\theta_1 = \theta_2$, und man hat, $\theta_3 = \theta_1 + \varepsilon$ setzend, für das, diesen 3 Wurzeln entsprechende particuläre Integral:

$$e^{\theta_1 x}(B_1 + B_2 x) + C_3 e^{(\theta_1 + \varepsilon)x} = e^{\theta_1 x}(B_1 + B_2 x + C_3 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{\theta_1 x}\left[B_1 + C_3 + (B_2 + C_3\varepsilon)x + \frac{C_3\varepsilon^2}{2}x^2 + \frac{C_3\varepsilon^3}{2.3}x^3 + \frac{C_3\varepsilon^4}{2.3.4}x^4 + \ldots\right]$$

$$= e^{\theta_1 x}\left[E_1 + E_2 x + E_3 x^2 + \varepsilon\left(\frac{E_3}{3}x^3 + \frac{E_3\varepsilon}{3.4}x^4 + \ldots\right)\right],$$

wo $B_1 + C_3 = E_1$, $B_2 + C_3\varepsilon = E_2$, $\frac{1}{2}C_3\varepsilon^2 = E_3$ gesetzt wurde. Dieser Ausdruck leistet der Gl. (1) Genüge, wenn $\theta_1$ eine zweifache und $\theta_1 + \varepsilon$ eine einfache Wurzel der Gl. (2) ist, was immer für einen Werth auch $\varepsilon$ haben mag. Lassen wir nun $\varepsilon$ in 0 übergehen, wodurch wir $\theta_1$ als dreifache Wurzel der Gl. (2) erklären, so wird obiger Ausdruck:

$$= e^{\theta_1 x}(E_1 + E_2 x + E_3 x^2).$$

Auf diese Weise fortschliessend, gelangt man zu dem Resultate, dass eine der Gl. (2) $p$ mal zukommende Wurzel $\theta$ in das allgemeine Integral den mit $p$ willkürlichen Constanten versehenen Bestandtheil:

$$e^{\theta x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_{p-1} x^{p-1})$$

einführt.

Ist endlich die imaginäre Wurzel $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ in der Gl. (2) $p$ mal vorhanden, so ist, wie man nach dem Vorausgehenden leicht findet:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x(E_0 + E_1 x + E_2 x^2 + \ldots + E_{p-1}x^{p-1}) +$$
$$+ e^{\alpha x}\sin\beta x(G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + \ldots + G_{p-1}x^{p-1}),$$

der von diesen Wurzeln, $2p$ an der Zahl, herrührende Bestandtheil des allgemeinen Integrals.

Beisp. 1) $\frac{d^2y}{dx^2} - a^2 y = 0$; hieraus folgt für $y = e^{\theta x}$: $\theta^2 - a^2 = 0$, $\theta = \pm a$, somit ist das allgemeine Integral: $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$.

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0$; $\theta^2 + a^2 = 0$, $\theta = \pm a\sqrt{-1}$; das allgemeine Integral ist daher, vermöge (4): $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$.

3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + by = 0$; $\theta^2 - 2a\theta + b = 0$; $\theta = a \pm \sqrt{a^2-b}$.

Es ist daher: wenn $a^2 > b$: $y = C_1 e^{(a+\sqrt{a^2-b})x} + C_2 e^{(a-\sqrt{a^2-b})x}$;

wenn $a^2 = b$: $y = e^{ax}(C_1 + C_2 x)$;

wenn $a^2 < b$: $y = e^{ax}(C_1 \cos x\sqrt{b-a^2} + C_2 \sin x\sqrt{b-a^2})$.

4) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$; $\theta^3 - 3\theta + 2 = 0$; $\theta = 1, 1, -2$;

somit $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-2x}$.

**519.** Ist die lineare Differenzialgleichung von der Form:

$$(a+bx)^n y^{(n)} + A_1(a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + \\ + A_2(a+bx)^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1}(a+bx)y' + A_n y = 0, \quad (1)$$

wo $a$, $b$, $A_1$, $A_2$, ...., $A_n$ constante Grössen, so setze man:

$$y = (a+bx)^\alpha,$$

wo $\alpha$ eine noch unbestimmte constante Grösse.

Die Substitution dieses Ausdruckes, sowie seiner Differenzialquotienten:

$$y' = \alpha b(a+bx)^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)b^2(a+bx)^{\alpha-2}, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n}$$

verwandelt die Gl. (1), nach Unterdrückung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktors $(a+bx)^\alpha$, in folgende:

$$\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n+1)b^n + \\ + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)A_1 b^{n-1} + \ldots + \alpha A_{n-1}b + A_n = 0, \quad (2)$$

woraus hervorgeht, dass der Werth $y = (a+bx)^\alpha$ der Differenzialgleichung (1) Genüge leisten wird, wenn wir $\alpha$ eine Wurzel der Gl. (2) sein lassen. Diese Gleichung ist nach $\alpha$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade; bezeichnen wir daher mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, .... $\alpha_n$ die Wurzeln derselben, so sind

$$(a+bx)^{\alpha_1},\ (a+bx)^{\alpha_2}, \ldots\ldots, (a+bx)^{\alpha_n}$$

particuläre Integrale der Gl. (1), $n$ an der Zahl, und das allgemeine Integral derselben:

$$y = C_1(a+bx)^{\alpha_1} + C_2(a+bx)^{\alpha_2} + \ldots\ldots C_n(a+bx)^{\alpha_n}, \quad (3)$$

vorausgesetzt, dass sämmtliche Wurzeln von einander verschieden sind.

Im Falle gleicher Wurzeln ziehen sich die entsprechenden Glieder in (3) in ein einziges zusammen, wodurch (3) aufhören würde, das allgemeine Integral zu sein. Der im vorigen §. betretene Weg verhilft auch hier ohne Schwierigkeit zur Completirung desselbem. Ist nämlich $\alpha_2 = \alpha_1$ und man setzt vorläufig $\alpha_2 = \alpha_1 + \varepsilon$, so werden die beiden ersten Glieder in (3), wenn man Kürze halber $X$ statt $(a+bx)$ schreibt:

$$C_1X^{\alpha_1}+C_2X^{\alpha_1+\varepsilon}=X^{\alpha_1}(C_1+C_2X^{\varepsilon})=X_1^{\alpha_1}(C_1+C_2e^{\varepsilon lX})=$$
$$=X^{\alpha_1}\left[C_1+C_2\left(1+\varepsilon lX+\frac{\varepsilon^2(lX)^2}{1.2}+\frac{\varepsilon^3(lX)^3}{1.2.3}+\ldots..\right)\right],$$

d. i. wenn man $C_1+C_2=B_1$, $C_2\varepsilon=B_2$ setzt:

$$=X^{\alpha_1}\left[B_1+B_2lX+\varepsilon\left(\frac{B_2(lX)^2}{1.2}+\frac{B_2\varepsilon(lX)^3}{1.2.3}+\ldots.\right)\right],$$

somit für $\varepsilon=0$:

$$(a+bx)^{\alpha_1}[B_1+B_2l(a+bx)].$$

Allgemein, ist $\alpha_1=\alpha_2=\ldots.=\alpha_p$ eine $p$fache Wurzel der Gl. (2), so tritt an die Stelle der $p$ ersten Glieder in (3) der Ausdruck:

$$(a+bx)^{\alpha_1}[C_1+C_2\{l(a+bx)\}+C_3\{l(a+bx)\}^2+\ldots.+C_p\{l(a+bx)\}^{p-1}].$$

Sind ferner $\alpha_1$, $\alpha_2$, ein Paar conjugirte imaginäre Wurzeln der Gl. (2), $=\alpha\pm\beta i$, wo $i=\sqrt{-1}$, so werden die entsprechenden Glieder in (3):

$$C_1X^{\alpha+\beta i}+C_2X^{\alpha-\beta i}=X^{\alpha}(C_1X^{\beta i}+C_2X^{-\beta i})=$$
$$=X^{\alpha}(C_1e^{\beta ilX}+C_2e^{-\beta ilX})=$$
$$=X^{\alpha}[C_1(\cos\beta lX+i\sin\beta lX)+C_2(\cos\beta lX-i\sin\beta lX)],$$

d. i., wenn man $C_1+C_2=B_1$, $(C_1-C_2)i=B_2$ setzt:

$$=(a+bx)^{\alpha}[B_1\cos\beta l(a+bx)+B_2\sin\beta l(a+bx)].$$

Beisp. $4x^3\frac{d^3y}{dx^3}+16x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+2y=0$. Diese Gleichung, durch 4 dividirt, fällt unter die Form der Gl. (1), und es ist für diesen Fall: $a=0$, $b=1$, $A_1=4$, $A_2=\frac{1}{4}$, $A_3=\frac{1}{2}$; die Gl. (2) wird hiernach: $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+4\alpha(\alpha-1)+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2}=0$, d. i. $\alpha^3+\alpha^2-\frac{7}{4}\alpha+\frac{1}{2}=0$, welcher die Wurzeln $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und $-2$ entsprechen. Das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ist daher:

$$y=\sqrt{x}(C_1+C_2lx)+C_3x^{-2}.$$

**520.** Sind die Coefficienten einer linearen Differenzialgleichung Funktionen von $x$ vom ersten Grade, d. i. die Gleichung von der Form:

$$(a_n+b_nx)y^{(n)}+$$
$$+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y^{(n-1)}+\ldots..+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0,\ldots \quad (1)$$

so lässt dieselbe jederzeit particuläre Integrale zu, von der Form:

$$y=\int_{u'}^{u''}e^{ux}\,Vdu, \quad (2)$$

wo $V$ eine Funktion von $u$, $u'$ und $u''$ aber schicklich gewählte Integrationsgrenzen bezeichnen, welche — sowie die Funktion $V$ — so zu bestimmen sind, dass der Ausdruck (2) der Gl. (1) Genüge leiste. Zu diesem Behufe substituiren wir denselben in die Gl. (1) und gelangen hiedurch, da

$$y' = \int_{u'}^{u''} ue^{ux}\, Vdu;\; y'' = \int_{u'}^{u''} u^2 e^{ux}\, Vdu, \ldots\ldots, y^{(n)} = \int_{u'}^{u''} u^n e^{ux}\, Vdu$$

ist, zu der Gleichung:

$$\int_{u'}^{u''} (U_0 + U_1 x)\, e^{ux}\, Vdu = 0, \tag{3}$$

wo der Kürze wegen

$$U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 u + a_0,$$
$$U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 u + b_0$$

gesetzt ist. Schreiben wir die letzte Gleichung in der Form:

$$\int_{u'}^{u''} U_0 e^{ux}\, Vdu + x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{ux}\, Vdu = 0,$$

und wenden auf das zweite Integral den Satz der theilweisen Integration an, welchem zufolge:

$$x \int U_1 e^{ux}\, Vdu = e^{ux}\, U_1 V - \int e^{ux} \frac{d(U_1 V)}{du} . du$$

ist, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$\left\{ e^{ux}\, U_1 V \right\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{ux} \left[ U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} \right] du = 0, \tag{4}$$

wo das Symbol $\left\{ e^{ux}\, U_1 V \right\}_{u'}^{u''}$ die Differenz der beiden Werthe bedeutet, welche der Ausdruck $e^{ux}\, U_1 V$ für $u = u'$ und $u = u''$ annimmt, und welcher Gleichung sofort für jeden Werth von $x$ Genüge zu leisten ist. Diess geschieht offenbar, wenn wir

$$U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} = 0 \tag{5}$$

setzen, und für $u'$ und $u''$ solche Werthe wählen, welche der Gleichung

$$\left\{ e^{ux}\, U_1 V \right\}_{u'}^{u''} = 0 \tag{6}$$

genügen, d. h. dem Ausdruck $e^{ux}\, U_1 V$ einerlei Werth ertheilen. Die Gl. (5) verhilft nun zur Kenntniss der Funktion $V$; aus ihr folgt nämlich, durch Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dV}{V} = \frac{U_0}{U_1} du - \frac{dU_1}{U_1},$$

somit:

$$lV = \int \frac{U_0}{U_1} du - lU_1 + C,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = U \tag{7}$$

setzen, und die Constante in der Form $lC$ beifügen:

$$V = \frac{C}{U_1} e^U. \tag{8}$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gl. (6) verwandelt dieselbe in folgende:

$$\left\{ Ce^{ux+U} \right\}_{u'}^{u''} = 0, \tag{9}$$

welcher offenbar genügt wird, wenn man für $u'$ und $u''$ zwei Wurzeln der Gleichung:

$$e^{ux+U} = A \tag{10}$$

wählt, wo $A$ eine beliebige Zahl bedeuten kann, für welche in der Regel 0 genommen werden mag. Sind nun $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ Wurzeln der Gleichung (9), $k$ an der Zahl, so kann man der Reihe nach statt $u'$ und $u''$ setzen: $u_1, u_2$; oder $u_1, u_3$; $u_1, u_4$; ..... $u_1, u_k$, und erhält auf diese Weise $k-1$ particuläre Integrale der Gl. (1), nämlich:

$$y_1 = C_1 \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{ux+U}}{U_1} du,$$

$$y_2 = C_2 \int_{u_1}^{u_3} \frac{e^{ux+U}}{U_1} du, \ldots . \; y_{k-1} = C_{k-1} \int_{u_1}^{u_k} \frac{e^{ux+U}}{U_1} du,$$

welche in der Regel unter sich verschieden ausfallen werden, und deren Summe:

$$y = C_1 \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{ux+U}}{U_1} du + C_2 \int_{u_1}^{u_3} \frac{e^{ux+U}}{U_1} du + \ldots + C_{k-1} \int_{u_1}^{u_k} \frac{e^{ux+U}}{U_1} du \tag{11}$$

der Gl. (1) vermöge ihrer linearen Form, ebenfalls Genüge leistet. Ist $k = n + 1$, so besitzt man in (10) das allgemeine, mit $n$ willkürlichen Constanten versehene Integral der Gl. (1).

Man kann sich *a posteriori* leicht überzeugen, dass der Ausdruck (11) die Gl. (1) erfülle; der erste Theil dieser Gleichung geht nämlich durch Substitution des besagten Ausdruckes und seiner Differenzialquotienten über in:

$$C_1 \left\{ \int_{u_1}^{u_2} e^{ux+U} \frac{U_0}{U_1} du + x \int_{u_1}^{u_2} e^{ux+U} du \right\}$$

$$+ C_2 \left\{ \int_{u_1}^{u_3} e^{ux+U} \frac{U_0}{U_1} du + x \int_{u_1}^{u_3} e^{ux+U} du \right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C_{k-1} \left\{ \int_{u_1}^{u_k} e^{ux+U} \frac{U_0}{U_1} du + x \int_{u_1}^{u_k} e^{ux+U} du \right\};$$

durch Vereinigung je zweier in einer Klammer stehenden Integrale, und mit Rücksicht auf die Gl. (7), aus welcher $\frac{U_0}{U_1} du = \frac{dU}{du} du$ folgt, gibt man diesem Substitutionsresultate leicht die Form:

$$C_1 \int_{u_1}^{u_2} e^{ux+U} \left( x + \frac{dU}{du} \right) du +$$
$$+ C_2 \int_{u_1}^{u_3} e^{ux+U} \left( x + \frac{dU}{du} \right) du + \ldots\ldots + C_{k-1} \int_{u_1}^{u_k} e^{ux+U} \left( x + \frac{dU}{du} \right) du,$$

in welcher, wie man sieht, die angezeigten Integrationen unmittelbar ausführbar sind; hiedurch ergibt sich der Ausdruck:

$$C_1 \left\{ e^{ux+U} \right\}_{u_1}^{u_2} + C_2 \left\{ e^{ux+U} \right\}_{u_1}^{u_3} + \ldots\ldots + C_{k-1} \left\{ e^{ux+U} \right\}_{u_1}^{u_k}, \qquad (12)$$

dessen einzelne Glieder, in Folge der Bestimmung der Grenzwerthe $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_k$, mittelst Auflösung der Gl. (9) oder (10), jedes für sich verschwinden. Uebrigens erkennt man hieraus, dass es nicht einmal nothwendig ist, die Integrationsgrenzen so, wie bisher angenommen wurde, zu bestimmen, welcher Bestimmungsweise (nämlich aus Gl. (9)) zufolge, jedes einzelne Glied der Summe (12) verschwindet; es reicht vielmehr hin, wenn die Summe (12) als Ganzes sich auf 0 reducirt, was offenbar der Fall ist, wenn die Ausdrücke

$$\left\{ e^{ux+U} \right\}_{u_1}^{u_2}; \left\{ e^{ux+U} \right\}_{u_1}^{u_3}; \ldots\ldots; \left\{ e^{ux+U} \right\}_{u_1}^{u_k}$$

sämmtlich denselben von 0 verschiedenen Werth $B$ annehmen, und überdiess zwischen den willkürlichen Constanten die Relation

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_{k-1} = 0$$

festgesetzt wird; oder, wenn obige Ausdrücke die verschiedenen constanten, oder mit derselben Funktion von $x$ als Faktor verbundenen Werthe $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{k-1}$ annehmen, und gleichzeitig die Bedingungsgleichung

$$C_1 B_1 + C_2 B_2 + \ldots\ldots + C_{k-1} B_{k-1} = 0$$

hinzugefügt wird.

Die soeben gelehrte Integrationsmethode besteht daher kurz in Folgendem: nachdem man die Polynome $U_0$ und $U_1$ gebildet, verschafft man sich das Integral:

$$U = \int \frac{U_0}{U_1} du, \qquad (7)$$

und sucht sodann die Wurzeln der Gleichung:

$$e^{ux + U} = 0;$$

sind diese $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$, so hat man in (11) das gesuchte Integral, welches das allgemeine oder ein unvollständiges sein wird, je nachdem die Gl. (10) $n + 1$ Wurzeln oder deren weniger darbietet.

Es kann übrigens der Fall eintreten, dass die Funktion $y = e^{ux}$ der Gl. (1) Genüge leistet, also ein Integral derselben ist, unter $u$ eine noch zu bestimmende Constante verstanden. Durch Substitution dieses Werthes von $y$ geht nämlich (1) über in:

$$(U_0 + U_1 x) e^{ux} = 0;$$

haben nun die Polygone $U_0$, $U_1$ den gemeinschaftlichen Faktor $u - \alpha$, so ist für $u = \alpha$ diese Gleichung identisch für jeden Werth von $x$ erfüllt, und somit $e^{\alpha x}$ ein Integral der Gl. (1).

Besitzen aber die beiden Polygone den gemeinschaftlichen Faktor $(u - \alpha)^p$, so genügt der Gl. (1) nicht nur $e^{\alpha x}$, sondern auch $xe^{\alpha x}$, $x^2 e^{\alpha x}, \ldots, x^{p-1} e^{\alpha x}$, folglich, vermöge der linearen Form der (1), auch:

$$e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_p x^{p-1}),$$

wofür der Beweis ganz in derselben Weise wie in §. 518 (für den dort betrachteten Fall gleicher Wurzeln) geführt wird.

**521.** Als Beispiel zur Anwendung der im vorigen §. gelehrten, von Laplace herrührenden Methode möge die Gleichung 2ter Ordnung:

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad (A)$$

betrachtet werden, wobei wir, da diese Methode nicht in allen Fällen zu einer brauchbaren Integralform führt, Spitzer's Analyse*) folgen, welche mit Anwendung geeigneter Transformationen in allen Fällen ein befriedigendes Integral dieser Gleichung darbietet.

Man hat nun für obige Gleichung:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0},$$

und es können bei Auflösung dieses Bruches in Partialbrüche folgende vier Fälle eintreten:

---

*) Studien über die Integration linearer Differenzialgleichungen von Prof. Simon Spitzer. 3 Theile. Wien 1860—62, 1. Thl. S. 4—40.

$$1)\quad \frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta},$$

wenn die Gl. $U_1 = 0$ zwei verschiedene Wurzeln hat;

$$2)\quad \frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha},$$

wenn die Gl. $u_1 = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat;

$$3)\quad \frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u-\alpha},$$

wenn $b_2 = 0$ ist; endlich:

$$4)\quad \frac{U_0}{U_1} = a_2 u^2 + a_1 u + a_0,$$

wenn $b_1 = b_2 = 0$ ist.

Erster Fall. Es sei:

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}; \tag{1}$$

man kann in diesem Falle die Gl. ($A$) auch in folgender Form schreiben:

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + \\ + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]\,y = 0, \tag{$A_1$}$$

welche sich ergibt, wenn man in ($A$) für $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_0$, $b_1$, die aus der für jeden Werth von $u$ identischen Gl. (1) folgenden Werthe:

$$a_0 = b_2[-A\beta - B\alpha + m\alpha\beta], \quad b_0 = b_2\alpha\beta$$
$$a_1 = b_2[A + B - m(\alpha+\beta)], \quad b_1 = -b_2(\alpha+\beta)$$
$$a_2 = b_2 m,$$

substituirt.

Man hat nun:

$$U = \int \frac{U_0}{U_1}\,du = mu + Al(u-\alpha) + Bl(u-\beta)$$
$$= mu + l(u-\alpha)^A(u-\beta)^B,$$

und die Gl. (10) des vor. §. zur Bestimmung der Integrationsgrenzen wird hiemit: $e^{ux+U} = e^{u(m+x)}(u-\alpha)^A(u-\beta)^B = 0.$

I. Es seien nun $A$ und $B$ positive Zahlen, oder imaginäre, deren reelle Bestandtheile positiv sind, so genügen dieser Gleichung die Werthe $u = \alpha$ und $u = \beta$, und man hat daher vermöge Gl. (1) des vorigen §., als Integral der Gl. ($A$) oder ($A_1$):

$$y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du. \tag{2}$$

II. Sind $A$ und $B$ reell, ganz und positiv, so ist die in (2) angezeigte Integration in endlicher Form ausführbar; durch wiederholte Anwendung des theilweisen Integrirens erhält man nämlich leicht:

$$\int e^{u(m+x)}\varphi(u)\,du = e^{u(m+x)}\left[\frac{\varphi(u)}{m+x} - \frac{\varphi'(u)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(u)}{(m+x)^3} - \dots\right] \quad (m)$$

somit:

$$y = y_1 - y_2,$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{\beta(m+x)}\left[\frac{\varphi(\beta)}{m+x} - \frac{\varphi'(\beta)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\beta)}{(m+x)^3} - \dots\right], \\ y_2 &= e^{\alpha(m+x)}\left[\frac{\varphi(\alpha)}{m+x} - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\alpha)}{(m+x)^3} - \dots\right], \\ &\varphi(u) = (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ist; die Reihen innerhalb der eckigen Klammern brechen offenbar ab, weil $\varphi(u)$ eine ganze algebraische Funktion von $u$. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass nicht nur der Ausdruck $y = y_1 - y_2$, sondern jeder der beiden Bestandtheile $y_1$ und $y_2$ für sich der Gl. ($A$) Genüge leisten. Denn die Substitution von $y_1$ in die Gl. ($A$) liefert ein Resultat von der Form $e^{\beta(m+x)}P$, wo

$$P = A_0 + \frac{A_1}{m+x} + \frac{A_2}{(m+x)^2} + \frac{A_3}{(m+x)^3} + \dots$$

und $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ constante Zahlen; in gleicher Weise erhält man durch die Substitution von $y_2$ ein Resultat von der Form $e^{\alpha(m+x)}Q$, wo $Q$ ein Ausdruck von derselben Form ist wie $P$, von diesem nur durch die Werthe der Zähler $A_0, A_1, A_2, \dots$ sich unterscheidend. Das Ergebniss der Substitution: $y = y_1 - y_2$ in die Gl. ($A$) wird daher sein: $e^{\beta(m+x)}P - e^{\alpha(m+x)}Q$, welcher Ausdruck — da $y_1 - y_2$ ein Integral der Gl. ($A$) ist, — der Nulle gleich sein muss; diess ist aber nur dann möglich, wenn jeder der beiden Bestandtheile für sich verschwindet. Denn im Gegenfalle würde der obige Ausdruck, der Nulle gleich gesetzt, auf die Gleichung

$$e^{(\beta-\alpha)(m+x)} = \frac{Q}{P}$$

führen, was ungereimt ist, weil eine Exponentialgrösse einem algebraischen rationalen Bruche nicht gleich sein kann. Hieraus folgt also, dass in dem hier betrachteten Falle

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (4)$$

das vollständige Integral der Gl. ($A$) oder ($A_1$) ist, unter $y_1$ und $y_2$ die obigen Ausdrücke (3) verstanden.

III. Sind $A$ und $B$ negativ, so setze man:

$$y = (m+x)^{\lambda}z, \quad (n)$$

wo $z$ eine neue Veränderliche, $\lambda$ eine noch unbestimmte Constante ist; hieraus folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = (m+x)^{\lambda-1}[(m+x)z' + \lambda z],$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (m+x)^{\lambda-2}[(m+x)^2 z'' + 2\lambda(m+x)z' + \lambda(\lambda-1)z],$$

welche Werthe, in die Gl. $(A_1)$ substituirt, zur Bestimmung von $z$ folgende Gleichung ergeben:

$$\begin{aligned}(m+x)^2 z'' + (m+x)\,[2\lambda + A + B - (\alpha+\beta)(m+x)]\,z' \\ + [\lambda(\lambda - 1 + A + B) - (m+x)(\alpha\lambda + \beta\lambda + A\beta + B\alpha) + \\ + \alpha\beta(m+x)^2]\,z = 0.\end{aligned}$$

Da wir über die Grösse $\lambda$ noch frei verfügen können, so setzen wir:

$$\lambda = 1 - A - B,$$

wodurch die Gleichung durch $(m+x)$ theilbar wird, und in folgende sich verwandelt:

$$\begin{aligned}(m+x)z'' + [(1-A) + (1-B) - (\alpha+\beta)(m+x)]\,z' \\ + [-\alpha(1-A) - \beta(1-B) + \alpha\beta(m+x)]\,z = 0.\end{aligned} \quad (5)$$

Diese Gleichung hat genau die Form der Gl. $(A_1)$, nur mit dem Unterschiede, dass $1-A$ und $1-B$ an die Stelle von $A$ und $B$ getreten sind. Sind nun $A$ und $B$ negativ, oder imaginär mit negativem reellem Bestandtheil, so sind $1-A$ und $1-B$ positiv, und man findet auf dem in I. betretenen Wege als Integral der Gl. (5):

$$z = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\,du; \quad (6)$$

folglich ist, vermöge der Gl. $(n)$, in diesem Falle:

$$y = (m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\,du \quad (7)$$

das Integral der Gl. $(A)$ oder $(A_1)$.

Sind $A$ und $B$ negative, reelle, ganze Zahlen, so ist die in (7) angezeigte Integration auf dieselbe Art, wie in II. durchführbar, und man findet hiedurch das allgemeine mit zwei willkürlichen Constanten versehene Integral in geschlossener Form.

Sind aber $A$ und $B$ negativ und gebrochen, so ergibt sich zunächst das allgemeine Integral $z$ der Gleichung (5) in welcher nunmehr $1-A$, $1-B$ positiv sind, je nach Umständen, nach IV, V oder VI, und man hat, sobald $z$ gefunden:

$$y = (m+x)^{1-A-B}z.$$

Bemerken wir noch, dass beide Zahlen $A$ und $B$ nicht gleichzeitig 0 sein können, weil dann die Gl. (1) constante Coefficienten haben würde. Wohl aber kann eine dieser beiden Zahlen verschwinden, und diess tritt ein, wenn $U_0$ und $U_1$ einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Ist dieser z. B. $(u-\alpha)$, so wird $\frac{U_0}{U_1}=m+\frac{B}{u-\beta}$; in diesem Falle ist aber, wie wir wissen [§. 520], $e^{\alpha x}$ das eine particuläre Integral, und das 2te findet man dann am einfachsten mittelst der im §. 517 vorgetragenen Methode.

IV. Das Integral (2) gilt für den Fall, dass $A$ und $B$ positive Zahlen sind, oder imaginäre mit positiven, reellen Bestandtheilen; während die Gültigkeit des Integrals (7) an die Bedingung gebunden ist, dass $1-A$ und $1-B$ positive, oder mit positiven, reellen Bestandtheilen versehene imaginäre Zahlen sind; beide Integrale gelten also in dem Falle, wenn $A$ und $B$ positive ächte Brüche sind. Hieraus folgt der Satz:

Sind $A$ und $B$ positive Zahlen, kleiner als 1, oder imaginäre, deren reelle Bestandtheile positiv und kleiner als 1 sind, so ist das allgemeine Integral der Gl. $(A)$ oder $(A_1)$:

$$y=C_1\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du$$
$$+C_2(m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}du. \qquad (8)$$

V. Die beiden particulären Integrale in Gl. (8) sind, wie man leicht sieht, von einander nicht verschieden in dem speciellen Falle, wenn

$$A+B=1$$

ist, unter $A$, $B$ positive, oder imaginäre Zahlen mit positivem reellem Bestandtheil verstanden. Um auch für diesen Fall das vollständige Integral zu erhalten, setze man:

$$v=(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1},$$
$$W=(m+x)(u-\alpha)(u-\beta),\quad n=1-A-B,$$

so wird, wenn man die beiden particulären Integrale in (8) mit $y_1$ und $y_2$ bezeichnet:

$$y_1=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}v\,du,\quad y_2=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}v\,W^n du;$$

vermöge der linearen Form der Differenzialgleichung $(A)$ kann man statt des 2ten particulären Integrals $y_2$ auch $\frac{y_2-y_1}{n}$ als solches nehmen, also:

$$y_2 = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} v \frac{W^n - 1}{n} du$$

setzen. Für $A + B = 1$, d. i. $n = 0$ erscheint nun der Faktor $\frac{W^n - 1}{n}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, und man erhält als wahren Werth desselben, nach Vorschrift des §. 349, $lW$; somit ist:

$$y_2 = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} v \, l \, W du.$$

Führt man daher für $v$, $W$ und $n$ wieder obige Werthe ein, so hat man als vollständiges Integral in dem hier betrachteten Falle:

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du +$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} l[(m + x)(u - \alpha)(u - \beta)] du. \quad (9)$$

VI. Es seien nun $A$ und $B$ positive, gebrochene Zahlen grösser als 1, oder imaginäre, mit ebenso beschaffenem reellen Bestandtheil. Man setze:

$$A = a + A_1, \quad B = b + B_1,$$

wo $a$ und $b$ positive ganze Zahlen, $A_1$, $B_1$ positive ächte Brüche bedeuten, und betrachte die Gleichung:

$$(m + x) Y'' + [A_1 + B_1 - (\alpha + \beta)(m + x)] Y' +$$
$$+ [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)] Y = 0, \quad (10)$$

welche sich, wie man sieht, von der zu integrirenden Gleichung $(A_1)$ blos dadurch unterscheidet, dass $A_1$ und $B_1$ an die Stelle von $A$ und $B$ getreten sind, und deren Integral $Y$, da $A_1$ und $B_1$ positiv und $< 1$, zufolge IV. oder beziehungsweise V., als bekannt anzusehen ist.

Setzt man in (10):

$$Y = e^{\alpha x} z, \quad (p)$$

unter $z$ eine neue Veränderliche verstanden, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$(m + x) z'' + [A_1 + B_1 + (\alpha - \beta)(m + x)] z' + A_1(\alpha - \beta) z = 0.$$

Differenzirt man diese Gleichung $a$ mal, indem man sich hiebei für die beiden ersten Glieder der Gleichung des bekannten Ausdruckes [§. 325]:

$$\frac{d^n}{dx^n} . uv = u \frac{d^n v}{dx^n} + \binom{n}{1} \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \ldots + v \frac{d^n u}{dx^n}$$

bedient, welcher, wenn einer der beiden Faktoren des Produktes $uv$,

wie im jetzigen Falle eine Funktion 1ten Grades ist, mit dem 2ten Gliede abbricht, so erhält man:

$$(m+x)z^{(a+2)}+$$
$$+[A_1+a+B_1+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(a+1)}+(\alpha-\beta)(A_1+a)z^{(a)}=0,$$

d. i., für $A_1+a$ seinen Werth $A$ setzend:

$$(m+x)z^{(a+2)}+[A+B_1+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(a+1)}+A(\alpha-\beta)z^{(a)}=0.$$

Diese Gleichung geht durch Einführung einer neuen Veränderlichen $t$ mittelst der Substitution

$$z^{(a)}=e^{(\beta-\alpha)x}t \qquad (q)$$

über in:

$$(m+x)t''+[A+B_1+(\beta-\alpha)(m+x)]t'+B_1(\beta-\alpha)t=0,$$

und man erhält durch $b$malige Differenziation dieser Gleichung:

$$(m+x)t^{(b+2)}+$$
$$+[A+B_1+b+(\beta-\alpha)(m+x)]t^{(b+1)}+(B_1+b)(\beta-\alpha)t^{(b)}=0,$$

oder, für $B_1+b$ den Werth $B$ setzend:

$$(m+x)t^{(b+2)}+[A+B+(\beta-\alpha)(m+x)]t^{(b+1)}+B(\beta-\alpha)t^{(b)}=0.$$

Setzt man hier endlich:

$$t^{(b)}=e^{-\beta x}y, \qquad (r)$$

so kommt:

$$(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+$$
$$+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0, \qquad (A_1)$$

welches, wie man sieht, wieder die Gl. $(A_1)$ ist.

Die Gleichungen $(p)$, $(q)$ und $(r)$ vermitteln den Zusammenhang zwischen den Integralen $y$ und $Y$ der Gleichungen $(A_1)$ und (10); man hat nämlich aus den besagten drei Gleichungen, von der letzten beginnend:

$$y=e^{\beta x}t^{(b)};\quad t=e^{(\alpha-\beta)x}z^{(a)};\quad z=e^{-\alpha x}Y,$$

somit, diese Werthe in einander substituirend:

$$y=e^{\beta x}\frac{d^b}{dx^b}\left[e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}(e^{-\alpha x}Y)\right]. \qquad (11)$$

Das vollständige Integral $Y$ ist, wie schon oben erwähnt, durch die Gl. (8) oder beziehungsweise (9) gegeben, wenn man nur $A_1$ und $B_1$ an die Stelle von $A$ und $B$ setzt, und die Entwickelung des Integrals $y$ unterliegt daher, da der Ausdruck (11) nur Differenziationen erfordert, keiner Schwierigkeit. Das eine der beiden, aus (11) hervorgehenden, particulären Integrale ergibt sich übrigens leicht unmittelbar nach der Methode des §. 520.

VII. Haben endlich die beiden Zahlen $A$ und $B$ entgegengesetzte Zeichen, ist also etwa in Gl. $(A_1)$:

$$A = -a + A_1, \quad B = +b + B_1$$

unter $a$ und $b$ ganze positive Zahlen, und unter $A_1$ und $B_1$ positive ächte Brüche verstanden, so vergleichen wir die Gl. $(A_1)$ mit der folgenden:

$$(m+x)\,Y'' + [A + (B_1-1) - (\alpha+\beta)(m+x)]\,Y' +$$
$$+ [-A\beta - (B_1-1)\alpha + \alpha\beta(m+x)]\,Y = 0, \qquad (12)$$

welche sich, der Form nach, von $(A_1)$ nur dadurch unterscheidet, dass $B_1-1$ an der Stelle von $B$ steht, und deren Integral $Y$, da nunmehr $A$ und $B_1-1$ gleiche Zeichen haben, nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann. Aus $Y$ findet man nun durch eine der in VI. angewendeten ganz ähnliche Rechnung das Integral $y$ der gegebenen Gleichung. Mittelst der Substitution:

$$Y = e^{\beta x} z$$

ergibt sich nämlich aus (12):

$$(m+x)z'' + [A + (B_1-1) + (\beta-\alpha)(m+x)]z' + (B-1)(\beta-\alpha)z = 0.$$

Differenziren wir diese Gleichung $(b+1)$mal, so erhalten wir:

$$(m+x)z^{(b+3)} +$$
$$+ [A + B_1 + b + (\beta-\alpha)(m+x)]\,z^{(b+2)} + (B_1+b)(\beta-\alpha)z^{(b+1)} = 0,$$

oder, für $B_1+b$ seinen Werth $B$ setzend:

$$(m+x)z^{(b+3)} + [A + B + (\beta-\alpha)(m+x)]z^{(b+2)} + B(\beta-\alpha)z^{(b+1)} = 0;$$

diese Gleichung endlich geht, wenn wir

$$z^{(b+1)} = e^{-\beta x} y$$

setzen, in folgende über:

$$(m+x)y'' + [A + B - (\alpha+\beta)(m+x)]y' +$$
$$+ [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0,$$

welche wieder die Gl. $(A_1)$ ist. Die Integrale $y$ und $Y$ der Glgn. $(A_1)$ und (12) hängen also mittelst der Formeln:

$$Y = e^{\beta x} z, \quad z^{(b+1)} = e^{-\beta x} y$$

zusammen, aus welchen folgt:

$$y = e^{\beta x}\,\frac{d^{b+1}}{dx^{b+1}}\,[e^{-\beta x} Y]. \qquad (13)$$

**522.** Zweiter Fall. Hat die Gl. $U_1 = 0$ zwei gleiche Wurzeln $\alpha$, so ist:

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha},$$

somit:

$$U = \int \frac{U_0}{U_1} du = mu - \frac{A}{u-\alpha} + l(u-\alpha)^B,$$

und die Hülfsgleichung (10), [§. 520] zur Bestimmung der Grenzen wird:

$$(u-\alpha)^B e^{u(m+x) - \frac{A}{u-\alpha}} = 0,$$

welche jedoch nicht zwei, zu Integrationsgrenzen geeignete Wurzeln darbietet, daher die Methode des §. 520 in diesem Falle unmittelbar auf die Gl. (1) nicht mit Erfolg angewendet werden kann.

Führen wir zunächst in die Gl. (1) für $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_0$, $b_1$, $b_2$ die aus der identischen Gleichung:

$$\frac{a_2u^2 + a_1u + a_0}{b_2u^2 + b_1u + b_0} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$$

sich ergebenden Werthe:

$$a_2 = b_2m,\quad a_1 = b_2(B - 2\alpha m),\quad a_0 = b_2(m\alpha^2 - B\alpha + A),$$
$$b_1 = -2b_2\alpha,\quad b_0 = b_2\alpha^2,$$

ein, so erhält sie folgende Gestalt:

$$(m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = 0. \qquad (A_2)$$

Setzen wir nun

$$y = e^{\alpha x} z,$$

so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$(m+x)z'' + Bz' + Az = 0, \qquad (14)$$

welche durch Einführung einer neuen unabhängigen Variabeln $\xi$ mittelst der Substitution:

$$\xi^2 = m + x$$

in folgende übergeht*):

$$\xi \frac{d^2z}{d\xi^2} + (2B-1)\frac{dz}{d\xi} + 4A\xi z = 0. \qquad (B)$$

Für diese Gleichung ist nun:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{B - \frac{1}{2}}{u + 2\sqrt{-A}} + \frac{B - \frac{1}{2}}{u - 2\sqrt{-A}},$$

---

*) Es ist nämlich:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx};\quad z'' = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2}.$$

Aus der Gl. $\xi^2 = m + x$ folgt aber: $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2\xi}$; $\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{1}{4\xi^3}$, somit:

$$z' = \frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{1}{2\xi},\quad z'' = \frac{d^2z}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{4\xi^2} - \frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{1}{4\xi^3},$$

welche Werthe, in Gl. (14) substituirt, die Gl. (B) geben.

woraus erhellt, dass dieselbe unter die Form der Gl. ($A_1$) fällt, und somit nach den im vorhergehenden §. entwickelten Methoden in allen Fällen integrirt werden kann. Ist dann $z=\varphi(\xi)$ das Integral der Gl. ($B$), so ist $z=\varphi(\sqrt{m+x})$ jenes der Gl. (14) und $y=e^{\alpha x}\varphi(\sqrt{m+x})$ das Integral der gegebenen Gl. ($A_2$).

Dritter Fall. Es sei nun in Gl. (1) $b_2=0$, diese Gleichung somit von der Form:

$$a_2y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0, \tag{15}$$

so wird:

$$\frac{U_0}{U_1}=\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_1u+b_0}=m+nu+\frac{A}{u-\alpha}, \tag{r}$$

$$U=\int\frac{U_0}{U_1}du=mu+\frac{1}{2}nu^2+l(u-\alpha)^A,$$

$$e^{ux+U}=(u-\alpha)^A e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2},$$

und das Integral der Gl. (1) ist:

$$y=\int_{u_1}^{u_2}(u-\alpha)^{A-1}e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2}du, \tag{16}$$

wo die Integrationsgrenzen $u_1$, $u_2$ Wurzeln der Gleichung

$$(u-\alpha)^A e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2}=0 \tag{17}$$

sind. Diese sind verschieden, je nach Beschaffenheit der Werthe von $A$ und $n$.

1) Ist $A$ positiv und $n$ negativ, so hat man als Wurzeln der Gl. (17):

$$u=\alpha,\quad u=+\infty,\quad u=-\infty,$$

somit als vollständiges Integral der Gl. (15):

$$y=C_1\int_\alpha^\infty(u-\alpha)^{A-1}e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2}du+C_2\int_\alpha^{-\infty}(u-\alpha)^{A-1}e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2}du,$$

oder, wenn man im 1ten Integrale $u-\alpha=\lambda$, im 2ten $u-\alpha=-\lambda$ setzt, und die Grösse $e^{\alpha m+\frac{1}{2}n\alpha^2}$ mit den willkürlichen Constanten vereiniget:

$$y=e^{\alpha x}\int_0^\infty\lambda^{A-1}e^{\frac{1}{2}n\lambda^2}\left[C_1e^{+\lambda(m+x+n\alpha)}+C_2e^{-\lambda(m+x+n\alpha)}\right]d\lambda. \tag{18}$$

2) Ist $A$ und $n$ positiv, so sind die Wurzeln der Gl. (17):

$$u=\alpha,\quad u=+\infty\sqrt{-1},\quad u=-\infty\sqrt{-1};$$

das vollständige Integral der Gl. (15) ist in diesem Falle, wenn $i=\sqrt{-1}$:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{-\infty i} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2} du$$

$$+ C_2 \int_{\alpha}^{\infty i} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2} du.$$

Setzt man in dem $1^{\text{ten}}$ dieser Integrale $u-\alpha = \lambda i$, im $2^{\text{ten}}$ $u-\alpha = -\lambda i$, wodurch die Grenzen beider Integrale 0 und $+\infty$ werden, so verwandeln sich dieselben, abgesehen von dem constanten Faktor $i^A e^{\alpha m + \frac{1}{2}n\alpha^2}$, welcher sich mit den willkürlichen Constanten vereiniget, mit Benützung der bekannten Relation: $e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z$, in folgende:

$$C_1 e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{1}{2}n\lambda^2} (\cos N + i \sin N)\, d\lambda$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{1}{2}n\lambda^2} (\cos N - i \sin N)\, d\lambda,$$

wo der Kürze wegen $N = \lambda(m+x+n\alpha)$; hieraus folgt endlich durch Vereinigung je zweier mit derselben trigonometrischen Funktion behafteten Integrale, wenn man noch $C_1 + C_2 = C$, $i(C_1 - C_2) = C'$ setzt:

$$y = e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{1}{2}n\lambda^2} [C_1 \sin \lambda(m+x+n\alpha) +$$

$$+ C_2 \cos \lambda(m+x+n\alpha)]\, d\lambda. \tag{19}$$

3) Sind beide Zahlen $A$ und $n$ negativ, so sind die Wurzeln der Gl. (17): $u = -\infty$ und $u = +\infty$ und das Integral (16) erscheint in diesem Falle unter einer unbrauchbaren Form, weil die Grösse unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich wird.

4) Ist endlich $A = 0$ oder negativ, so leisten die Werthe $u = -\infty\sqrt{-1}$ und $u = +\infty\sqrt{-1}$ der Gl. (17) Genüge und man erhält hiemit ein particuläres Integral der Gl. (15), nämlich:

$$y = C \int_{-\infty i}^{+\infty i} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{1}{2}nu^2} du.$$

Wie man sieht, bietet in dem hier in Rede stehenden Falle die Methode des §. 520, unmittelbar auf die gegebene Gleichung angewendet, nicht immer das vollständige Integral derselben dar, welchem Mangel Spitzer auch hier durch folgende Transformation begegnet. Führt man nämlich die aus der identischen Gleichung ($r$) folgenden Werthe:

$$a_2 = b_1 n, \quad a_1 = b_1(m - n\alpha), \quad a_0 = b_1(A - m\alpha), \quad b_0 = -b_1\alpha$$

in die Gl. (15) ein, so erhält sie die Form:

$$ny'' + (m + x - n\alpha)y' + [A - \alpha(m+x)]y = 0. \tag{$A_3$}$$

Setzt man nun:

$$y = e^{\alpha x} z,$$

so erhält man:

$$nz'' + (m + x + n\alpha) z' + Az = 0,$$

welche Gleichung sich durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen $\xi$ mittelst der Substitution:

$$\xi = (m + x + n\alpha)^2$$

in folgende verwandelt:

$$4n\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2(n + \xi) \frac{dz}{d\xi} + Az = 0. \tag{20}$$

Diese Gleichung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{2nu + A}{4nu^2 + 2u} = \frac{\frac{1}{2}A}{u} + \frac{\frac{1}{2}(1-A)}{u + \frac{1}{2n}}$$

wird, ist wieder, wie man sieht, ein specieller Fall der Gl. $(A_1)$, und kann daher nach den in §. 521 gegebenen Methoden in allen Fällen integrirt werden.

Vierter Fall. In diesem letzten Falle endlich, wo

$$\frac{U_0}{U_1} a_2 u^2 + a_1 u + a_0,$$

die Gl. (1) also von der Form:

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \tag{21}$$

ist, hat man

$$U = \int \frac{U_0}{U_1} du = \frac{1}{3} a_2 u^3 + \frac{1}{2} a_1 u^2 + a_0 u,$$

$$e^{ux + U} = e^{u(a_0 + x) + \frac{1}{2} a_1 u^2 + \frac{1}{3} a_2 u^3},$$

und

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{u(a_0 + x) + \frac{1}{2} a_1 u^2 + \frac{1}{3} a_2 u^3} du.$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Integrationsgrenzen ist:

$$e^{u(a_0 + x) + \frac{1}{2} a_1 u^2 + \frac{1}{3} a_2 u^3} = 0,$$

welcher die Wurzeln der Gleichung

$$u^3 = -\infty$$

Genüge leisten. Diese sind, wenn wir mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ die drei Cubikwurzeln aus $-1$ bezeichnen: $\mu_1 \infty$, $\mu_2 \infty$, $\mu_3 \infty$, und wir können hiernach das vollständige Integral der Gl. (21) in folgender Form darstellen, wo Kürze halber:

$$u(a_0 + x) + \frac{1}{2} a_1 u^2 + \frac{1}{3} a_2 u^3 = \varphi(u)$$

gesetzt ist:

$$y = C_1\int_0^{\mu_1\infty} e^{\varphi(u)}du + C_2\int_0^{\mu_2\infty} e^{\varphi(u)}du + C_3\int_0^{\mu_3\infty} e^{\varphi(u)}du, \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0. \tag{22}$$

Um sich von der Richtigkeit dieses Ausdruckes zu überzeugen, bedarf es nur der Substitution desselben in die Gl. (21). Irgend einer der drei Bestandtheile desselben hat die Form:

$$y = C\int_0^{\mu\infty} e^{\varphi(u)}du,$$

und dessen nach $x$ genommene Differenzialquotienten sind:

$$y' = C\int_0^{\mu\infty} ue^{\varphi(u)}du, \quad y'' = C\int_0^{\mu\infty} u^2e^{\varphi(u)}du;$$

substituirt man diese Werthe in die Gl. (21), so erhält man das Resultat:

$$C\int_0^{\mu\infty}(a_0 + x + a_1u + a_2u^2)\,e^{\varphi(u)}du =$$

$$= C\int_0^{\mu\infty} e^{\varphi(u)}d.\,\varphi(u) = C\Big\{e^{\varphi(u)}\Big\}_0^{\mu\infty}.$$

Das Ergebniss der Substitution der Summe der 3 Theile ist demnach:

$$C_1\Big\{e^{\varphi(u)}\Big\}_0^{\mu_1\infty} + C_2\Big\{e^{\varphi(u)}\Big\}_0^{\mu_2\infty} + C_3\Big\{e^{\varphi(u)}\Big\}_0^{\mu_3\infty},$$

und dieser Ausdruck ist in der That, wie es sein muss, gleich Null, weil für die oberen Grenzwerthe die eingeklammerten Ausdrücke verschwinden, während für die unteren Grenzwerthe der ganze Ausdruck sich auf $C_1 + C_2 + C_3$ reducirt, welche Summe, vermöge der oben gesetzten Bedingung, gleichfalls der Nulle gleich ist.

**523.** Einige Beispiele mögen zur Erläuterung der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Methoden dienen:

1) Die gegebene Gleichung sei:

$$xy'' + (5 + x)\,y' + 2y = 0;$$

man hat:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{5u + 2}{u^2 + u} = \frac{3}{u + 1} + \frac{2}{u},$$

somit $A = 3$, $B = 2$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $m = 0$, und vermöge Gl. (2), §. 521:

$$y = \int_{-1}^{0} e^{ux}(u + 1)^2\,udu,$$

welches Integral, da $A$ und $B$ positive ganze Zahlen sind, in geschlossener Form entwickelt werden kann; man findet, auf dem in II., §. 521 betretenen Wege:

$$y = C_1\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) + C_2\frac{e^{-x}}{x^3}\left(1 + \frac{3}{x}\right),$$

als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung.

2) Für die Gleichung:

$$xy'' - (3 + x)y' - 2xy = 0$$

ist:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{-3u}{u^2 - u - 2} = -\frac{1}{u+1} - \frac{2}{u-2},$$

$$m = 0,\ A = -1,\ B = -2,\ \alpha = -1,\ \beta = 2;$$

man hat daher vermöge der Gl. (7), §. 521:

$$y = x^4\int_{-1}^{2} e^{ux}(u+1)^2(u-2)\,du,$$

und findet durch Entwickelung dieses Integrals nach den Formeln ($m$) des genannten §. als allgemeines Integral:

$$y = C_1e^{-x}(1 + x) + C_2e^{2x}(2 - 4x + 3x^2).$$

3) Für die Gleichung:

$$xy'' + 2(1 + x)y' + (3 + x)y = 0$$

ist

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{2u+3}{u^2+2u+1} = \frac{2u+3}{(u+1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{2}{u+1};$$

wir haben es also hier mit dem Falle gleicher Wurzeln der Gleichung $U_1 = 0$ zu thun [$2^{\text{ter}}$ Fall, §. 522]. Mittelst der dort vorgeschriebenen zwei Transformationen:

$$y = e^{-x}z,\quad \xi^2 = x,$$

verwandelt sich unsere Gleichung zunächst in folgende:

$$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2} + 3\frac{dz}{d\xi} + 4\xi z = 0. \tag{B}$$

Für diese Gleichung hat man nun:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{3u}{u^2+4} = \frac{\frac{3}{2}}{u+2\sqrt{-1}} + \frac{\frac{3}{2}}{u-2\sqrt{-1}},$$

somit $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $\alpha = -2\sqrt{-1}$, $\beta = 2\sqrt{-1}$, und es gehört demnach diese Gleichung zu den in VI. und V. betrachteten Fällen.

Lassen wir also $Y$ das Integral einer Differenzialgleichung bedeuten, welche sich von jener ($B$) nur dadurch unterscheidet, dass $A_1 = \frac{1}{2}$ an die Stelle von $A = \frac{3}{2}$, und $B_1 = \frac{1}{2}$ an die Stelle von $B = \frac{3}{2}$ getreten ist, so ist gemäss der Formel (9) in V:

$$Y = C_1 \int_{-2i}^{+2i} \frac{e^{u\xi}}{\sqrt{u^2+4}}\, du + C_2 \int_{-2i}^{+2i} \frac{e^{u\xi}}{\sqrt{u^2+4}}\, l\,[\xi(u^2+4)]\, du,$$

und sodann das Integral der Gl. ($B$), vermöge Formel (11) in VI:

$$z = e^{2\xi i} \frac{d}{d\xi} \left[ e^{-4\xi i} \frac{d}{d\xi} (e^{2\xi i}\, Y) \right],$$

oder, wenn man die angezeigten Differenzialquotienten entwickelt:

$$z = Y'' + 4Y.$$

Bevor wir in diesen Ausdruck den Werth von $Y$ substituiren, wollen wir denselben umformen. Setzen wir nämlich $u = v\sqrt{-1} = vi$, so wird derselbe:

$$Y = C_1 i \int_{-2}^{+2} \frac{e^{v\xi i}}{\sqrt{4-v^2}}\, dv + C_2 i \int_{-2}^{+2} \frac{e^{v\xi i}}{\sqrt{4-v^2}}\, l\,[\xi(4-v^2)]\, dv,$$

oder, da $e^{v\xi i} = \cos v\xi + i \sin v\xi$:

$$Y = C_1 i \int_{-2}^{+2} \frac{\cos v\xi + i \sin v\xi}{\sqrt{4-v^2}}\, dv + C_2 i \int_{-2}^{+2} \frac{\cos v\xi + i \sin v\xi}{\sqrt{4-v^2}}\, l[\xi(4-v^2)]\, dv.$$

Jedes dieser beiden Integrale zerfällt in zwei andere, von welchen das mit $\sin v\xi$ behaftete gleich Null ist [§. 442, 5)], während das andere, welches $\cos v\xi$ enthält, von 0 bis $+2$ doppelt genommen werden kann. Setzen wir also $2C_1 i = C$, $2C_1 i = C'$, so wird:

$$Y = C \int_0^2 \frac{\cos v\xi}{\sqrt{4-v^2}}\, dv + C' \int_0^2 \frac{\cos v\xi}{\sqrt{4-v^2}}\, l[\xi(4-v^2)]\, dv.$$

Dieser Werth, sammt jenem seines 2ten Differenzialquotienten $Y''$ in die Gleichung $z = Y'' + 4Y$ substituirt, gibt:

$$z = C \int_0^2 \cos v\xi \sqrt{4-v^2}\, dv +$$

$$+ C' \int_0^2 \left\{ \cos v\xi \left[ (4-v^2)\, l[\xi(4-v^2)] - \frac{1}{\xi^2} \right] - \sin v\xi \,.\, \frac{2v}{\xi} \right\} \frac{dv}{\sqrt{4-v^2}},$$

als Integral der Gl. ($B$). Setzt man endlich $\xi = \sqrt{x}$, und $y = e^{-x} z$, so hat man:

$$y = Ce^{-x} \int_0^2 \cos v\sqrt{x}\, \sqrt{4-v^2}\, dv +$$

$$+ C'e^{-x} \int_0^2 \left\{ \cos v\sqrt{x} \left[ (4-v^2)\, l[\sqrt{x}(4-v^2)] - \frac{1}{x} \right] - \right.$$

$$\left. - \sin v\sqrt{x} \,.\, \frac{2v}{\sqrt{x}} \right\} \frac{dv}{\sqrt{4-v^2}}$$

als vollständiges Integral der vorgelegten Gleichung.

4) Für die Gleichung:

$$xy'' + 2ay' - b^2xy = 0,$$

hat man:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{2au}{u^2 - b^2} = \frac{a}{u+b} + \frac{a}{u-b};$$

somit ist, wenn $0 < a < 1$, das vollständige Integral, nach §. 521, IV. Gl. (8):

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} \frac{e^{ux}\,du}{(u^2-b^2)^{1-a}} + C_2 x^{1-2a} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{ux}\,du}{(u^2-b^2)^a},$$

oder wenn man der bequemeren Form wegen $bv$ statt $u$ schreibt:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{bxv}\,dv}{(v^2-1)^{1-a}} + C_2 x^{1-2a} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{bxv}\,dv}{(v^2-1)^a}. \qquad (p)$$

Für negative Werthe von $a$ gilt nur das zweite mit $C_2$ multiplicirte particuläre Integral, während das erste auch in dem Falle besteht, wenn $a > 1$. Uebrigens kann nach §. 521, VI. das allgemeine Integral in allen Fällen aufgestellt werden.

Ist nämlich $a > 1$, also etwa $a = a_1 + a'$, vo $a' < 1$, und $a_1$ eine ganze Zahl, so hat man [Gl. (11), VI.]:

$$y = e^{bx} \frac{d^{a_1}}{dx^{a_1}} \left[ e^{-2bx} \frac{d^{a_1}}{dx^{a_1}} (e^{bx} Y) \right],$$

wo

$$Y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{bvx}dv}{(v^2-1)^{1-a'}} + C_2 x^{1-2a'} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{bvx}dv}{(v^2-1)^{a'}}.$$

Im Falle $a$ eine ganze Zahl ist, erhält man durch Entwickelung des einen oder des anderen der beiden particulären Integrale in ($p$), je nachdem $a$ positiv oder negativ ist, nach §. 521, II., das vollständige Integral der gegebenen Gleichung in geschlossener Form.

Das Integral der Gleichung:

$$xy'' + 2ay' + b^2xy = 0$$

ergibt sich unmittelbar aus den vorstehenden Formeln, wenn man $b\sqrt{-1}$ an die Stelle von $b$ treten lässt; die imaginäre Form, in welcher die Integrale sodann erscheinen, wird in ähnlicher Weise, wie im 3ten Beispiele beseitiget.

**524.** Bei der Wichtigkeit, welche den linearen Differenzialgleichungen in den Anwendungen der Mathematik zukommt, wollen wir noch eine Methode kennen lernen, welche zur Integration derselben oft mit gutem Erfolge angewendet werden kann.

Sie besteht im Wesentlichen darin, dass man die vorgelegte Differenzialgleichung, in der Regel mit Zuhülfenahme schicklicher Transformationen durch Einführung neuer Variabeln, $\mu$ mal differenzirt, wobei $\mu$ eine vorläufig noch unbestimmte Zahl bedeutet, welche sodann derart gewählt wird, dass als Resultat der Differenziation eine einfachere, leichter integrirbare Differenzialgleichung erscheint. Man erhält dadurch das Integral in Form eines Differenzialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.

Wir wollen dieses Verfahren auf die in den §§. 521 und 522 behandelte Differenzialgleichung 2ter Ordnung:

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad (A)$$

anwenden und hiebei die dort unterschiedenen Fälle besonders betrachten.*)

Im ersten Falle, wo

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta},$$

geben wir der Gleichung ($A$) wieder die Form:

$$(m + x) y'' + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)] y' +$$
$$+ [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)] y = 0, \qquad (A_1)$$

welche Gleichung sich durch die Substitution:

$$y = e^{\alpha x} z$$

in nachstehende verwandelt:

$$(m + x) z'' + [A + B + (\alpha - \beta)(m + x)] z' + A(\alpha - \beta) z = 0.$$

Differenziren wir nun diese Gleichung $\mu$ mal, unter $\mu$ eine noch unbestimmte Zahl verstanden, so erhalten wir:

$$(m + x) z^{(\mu+2)} + [\mu + A + B + (\alpha - \beta)(m + x)] z^{(\mu+1)} +$$
$$+ (A + \mu)(\alpha - \beta) z^{(\mu)} = 0,$$

welche Gleichung für

$$\mu = -A$$

in folgende übergeht:

$$(m + x) z^{(-A+2)} + [B + (\alpha - \beta)(m + x)] z^{(-A+1)} = 0,$$

deren Integration keiner Schwierigkeit unterliegt, da sie die Trennung der Veränderlichen zulässt. Es ist nämlich $z^{(-A+2)} = \dfrac{d . z^{(-A+1)}}{dx}$; man kann daher die Gleichung in folgender Form schreiben:

---

*) Spitzer, Studien über die Integration linearer Differenzialgleichungen I. Thl., S. 15, 28 u. 35.

$$\frac{dz^{(-A+1)}}{z^{(-A+1)}} + \frac{B + (\alpha - \beta)(m + x)}{m + x} dx = 0;$$

das Integral derselben ist:

$$lz^{(-A+1)} = -Bl(m+x) + (\beta - \alpha)x,$$

oder:

$$z^{(-A+1)} = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right],$$

und somit

$$y = e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right].$$

Vertauscht man hier $A$ mit $B$, und $\alpha$ mit $\beta$, so erhält man das zweite particuläre Integral; das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung ist daher:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right] + C_2 e^{\beta x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A}\right]. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck gibt, wie leicht einzusehen, unmittelbar das vollständige Integral, wenn $A$ und $B$ reelle, ganze und positive Zahlen sind.

Ist $A = 0$, so hat man, da

$$\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}[e^{(\alpha-\beta)x}] = (\alpha-\beta)^{B-1}e^{(\alpha-\beta)x}$$

ist, und der Faktor $(\alpha - \beta)^{B-1}$ mit der willkürlichen Constante vereinigt werden kann:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}dx}{(m+x)^B} + C_2 e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Dieser Fall tritt bekanntlich ein, wenn $U_0$ und $U_1$ den gemeinschaftlichen Faktor $u - \alpha$ haben.

Ist nur $A$ reell, ganz und positiv, so ergibt sich aus (1) blos ein particuläres Integral:

$$y = e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right],$$

und man findet das zweite in einfachster Form nach §. 517.

Sind aber $A$ und $B$ negativ, so wird man zunächst die gegebene Gleichung mittelst der Substitution:

$$y = (m+x)^{1-A-B}z$$

in eine andere transformiren, auf welche sodann das obige Verfahren angewendet werden kann.

Im zweiten Falle, wo die Gl. $U_1 = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, und somit

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$$

ist, hat die Gl. $(A)$ die Form:

$$(m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = 0, \quad (A_2)$$

und verwandelt sich durch die Substitution:

$$y = e^{\alpha x} z$$

in nachstehende [§. 522]:

$$(m+x)z'' + Bz' + Az = 0.$$

Differenzirt man diese Gleichung $\mu$ mal, so erhält man:

$$(m+x)z^{(\mu+2)} + (B+\mu)z^{(\mu+1)} + Az^{(\mu)} = 0,$$

und, wenn man hier

$$z^{(\mu)} = Z$$

setzt, und mittelst der Substitution:

$$\xi^2 = m + x$$

die neue unabhängig Veränderliche $\xi$ einführt:

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\left(\mu + B - \frac{1}{2}\right)\frac{dZ}{d\xi} + 4AZ = 0.$$

Setzt man nun:

$$\mu = \frac{1}{2} - B,$$

so geht diese Gleichung über in die einfachere:

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} + 4AZ = 0,$$

deren Integral, nach §. 518,

$$Z = C_1 e^{+2\xi\sqrt{-A}} + C_2 e^{-2\xi\sqrt{-A}}$$

ist. Substituirt man nun wieder $\xi = \sqrt{m+x}$, und beachtet, dass

$$z = \frac{d^{(-\mu)} Z}{dx^{-\mu}}, \quad y = e^{\alpha x} z,$$

so erhält man das Integral der Gl. $(A_2)$ in folgender Gestalt:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}\right], \quad (3)$$

welche mit Vortheil angewendet wird, wenn $B - \frac{1}{2}$ Null oder eine ganze positive Zahl ist.

Transformirt man aber die Gl. $(A_2)$ zuvörderst mittelst der Substitution:

$$y = (m + x)^{1-B} z$$

in folgende:

$$(m + x) z'' + [2 - B - 2\alpha(m + x)] z' +$$
$$+ [A + B\alpha - 2\alpha + \alpha^2(m + x)] z = 0,$$

und wendet auf diese obiges Integrationsverfahren an, so gelangt man zur folgenden Form des Integrals der Gl. $(A_2)$:

$$y = (m + x)^{1-B} e^{\alpha x} \frac{d^{3/2-B}}{dx^{3/2-B}} \left[ C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right], \quad (4)$$

deren man sich mit Vortheil bedient, wenn $\frac{3}{2} - B$ entweder Null oder eine ganze positive Zahl ist:

Im dritten Falle, wo

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha},$$

geben wir der zu integrirenden Gleichung $(A)$ wieder die Form:

$$ny'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0, \quad (A_3)$$

und erhalten aus derselben,

$$y = e^{\alpha x} z$$

setzend, folgende Gleichung zur Bestimmung von $z$:

$$nz'' + (m + x + n\alpha) z' + Az = 0.$$

Differenzirt man diese Gleichung $\mu$ mal, so erhält man:

$$nz^{(\mu+2)} + (m + x + n\alpha) z^{(\mu+1)} + (A + \mu) z^{(\mu)} = 0,$$

und hieraus, $\mu = -A$ setzend:

$$nz^{(2-A)} + (m + x + n\alpha) z^{(1-A)} = 0,$$

welche Gleichung leicht zu integriren ist. Durch Trennung der Variablen ergibt sich, da $z^{(2-A)} = \frac{d . z^{(1-A)}}{dx}$ ist:

$$\frac{d . z^{(1-A)}}{z^{(1-A)}} = - \frac{m + n\alpha + x}{n} dx,$$

somit

$$lz^{(1-A)} = - \frac{n\alpha + m}{n} x - \frac{x^2}{2n}, \text{ oder } z^{(1-A)} = e^{-\frac{n\alpha + m}{n} x - \frac{x^2}{2n}},$$

und hieraus:

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[ e^{-\frac{n\alpha + m}{m} x - \frac{x^2}{2n}} \right];$$

hiemit folgt endlich:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[ e^{-\frac{n\alpha + m}{n} x - \frac{x^2}{2n}} \right]. \quad (5)$$

Um zu einem zweiten particulären Integral zu gelangen, wollen wir dasselbe in folgender Form:

$$y = e^{fx+gx^2} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} [e^{hx+kx^2}] \qquad (m)$$

voraussetzen, und die noch unbestimmten Grössen $f$, $g$, $h$, $k$ und $\lambda$ so zu bestimmen suchen, dass dieser Werth von $y$ der Gl. $(A_3)$ Genüge leiste. Setzen wir:

$$y = e^{fx+gx^2} z, \quad \text{also} \quad z = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} [e^{hx+kx^2}],$$

so folgt hieraus:

$$z^{(-\lambda)} = e^{hx+kx^2}, \quad lz^{(-\lambda)} = hx + kx^2,$$

und durch Differenziation der letzteren Gleichung:

$$z^{(1-\lambda)} = (h + 2kx) z^{(-\lambda)}.$$

Differenziren wir diese Gleichung $(\lambda + 1)$ mal, so kommt:

$$z'' - (h + 2kx) z' - 2(\lambda + 1) kz = 0,$$

und wenn wir in diese Gleichung für $z$ wieder seinen Werth

$$z = ye^{-fx-gx^2}$$

einführen:

$$y'' - [2f + h + (2g + k) 2x] +$$
$$+ [f^2 - 2g + hf - 2k\lambda - 2k + 2(2fg + gh + fk) x + 4g(g + k) x^2] y = 0.$$

Dieser Gleichung genügt, zufolge ihrer Ableitung, der oben angenommene Werth $(m)$ von $y$; bestimmen wir daher die Grössen $f$, $g$, $h$, $k$, $\lambda$ dergestalt, dass diese Gleichung mit jener $(A_3)$ zusammenfalle, so wird offenbar der Werth $(m)$ auch der letzteren Gleichung Genüge leisten. Zu diesem Behufe setzen wir:

$$\frac{m - n\alpha}{n} = -2f - h, \quad \frac{1}{n} = -2(2g + k),$$

$$\frac{A - \alpha m}{n} = f^2 - 2g + hf - 2k\lambda - 2k,$$

$$-\frac{\alpha}{n} = 2(2fg + gh + fk), \quad 0 = g + k,$$

aus welchen Gleichungen folgt:

$$f = -\frac{m}{n}, \quad g = -\frac{1}{2n}, \quad h = \frac{m + \alpha n}{n}, \quad k = \frac{1}{2n}, \quad \lambda = -A.$$

Man hat somit als zweites particuläres Integral der Gl. $(A_3)$:

$$y = e^{-\frac{m}{n}x - \frac{x^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[ e^{\frac{n\alpha + m}{n} x + \frac{x^2}{2n}} \right]. \qquad (6)$$

Die Summe der beiden particulären Integrale (5) und (6), jedes

mit einer willkürlichen Constante multiplicirt, gibt endlich das vollständige Integral der Gl. ($A_3$).

Ist für eine gegebene Gleichung $A$ eine positive ganze Zahl, so erhält man mittelst (5) ein particuläres Integral, das andere verschafft man sich dann mittelst der Methode des §. 517; ist hingegen $A$ eine negative ganze Zahl, so liefert (6) ein particuläres Integral, während das zweite wieder nach §. 517 erhalten wird.

Im vierten Falle endlich ergibt sich das Integral am einfachsten auf dem in §. 522 betretenen Wege.

Beisp. 1) $xy'' - (1-x)y' - 2y = 0$.

Für diese Gleichung hat man $\frac{U_0}{U_1} = \frac{-u-2}{u^2+u} = \frac{1}{u+1} - \frac{2}{u}$, also $A = 1$, $B = -2$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $m = 0$ und es ist somit nach Gl. (1) das eine particuläre Integral: $y = C_1 x^2$; mit diesem findet man nach §. 517 das zweite: $x^2 \int \frac{e^{-x}}{x^3} dx$; das vollständige Integral lautet demnach:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \int \frac{e^{-x}}{x^3} dx.$$

2) $2xy'' + (3-8x)y' - (7-8x)y = 0$.

Es ist: $\frac{U_0}{U_1} = \frac{3u-7}{2u^2-8u+8} = \frac{-\frac{1}{2}}{(u-2)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{u-2}$, somit $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $\alpha = 2$, $m = 0$; man hat somit vermöge der Gl. (3) als vollständiges Integral:

$$y = e^{2x} \frac{d}{dx} \left\{ C_1 e^{\sqrt{2x}} + C_2 e^{-\sqrt{2x}} \right\},$$

d. i. nach vollzogener Differenziation:

$$y = C_1 \frac{e^{2x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} + C_2 \frac{e^{2x-\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}.$$

3) $4y'' + 2(2+x)y' + (5+x)y = 0$.

$\frac{U_0}{U_1} = 1 + 2u + \frac{2}{u+\frac{1}{2}}$; somit $m = 1$, $n = 2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $A = 2$; hiernach erhält man ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung nach Gl. (5):

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \frac{d}{dx} \left[ e^{-\frac{1}{4}x^2} \right] = x e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2} = y_1,$$

wo im letzten Ausdrucke der constante Faktor $-\frac{1}{2}$ weggelassen ist, weil er sich mit der willkürlichen Constante verbindet.

Mit diesem findet man nach §. 517 das zweite particuläre Integral $=y_1\int\frac{e^{\frac{1}{4}x^2}dx}{x^2}$; das vollständige Integral ist demnach:

$$y=xe^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2}\left[C_1+C_2\int\frac{e^{\frac{1}{4}x^2}dx}{x^2}\right].$$

**525.** Auf die in den vorhergehenden §§. betrachtete Differenzialgleichung mit linearen Coefficienten lässt sich auch die Gleichung:

$$x^2y''+x(a_1+b_1x^m)y'+(a_0+b_0x^m+c_0x^{2m})y=0 \qquad (1)$$

zurückführen. Führt man nämlich mittelst der Substitution: $x^m=\xi$ eine neue unabhängige Veränderliche $\xi$ ein, so wird:

$$y'=\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\frac{dy}{dx},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=m^2x^{2(m-1)}\frac{d^2y}{d\xi^2}+m(m-1)x^{m-2}\frac{dy}{d\xi},$$

womit die Gl. (1) in folgende übergeht:

$$m^2\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+[m(a_1+m-1)\xi+b_1m\xi^2]\frac{dy}{d\xi}+(a_0+b_0\xi+c_0\xi^2)y=0.$$

Nun setze man $y=\xi^\lambda z$, wo $\lambda$ eine noch unbestimmte Constante bedeutet, so erhält man:

$$\frac{dy}{d\xi}=\xi^\lambda\frac{dz}{d\xi}+\lambda\xi^{\lambda-1}z,$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\xi^\lambda\frac{d^2z}{d\xi^2}+2\lambda\xi^{\lambda-1}\frac{dz}{d\xi}+\lambda(\lambda-1)\xi^{\lambda-2}z,$$

und durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$m^2\xi^2\frac{d^2z}{d\xi^2}+[m(a_1-1+m+2m\lambda)+b_1m\xi]\xi\frac{dz}{d\xi}+$$
$$+[\lambda(\lambda-1)m^2+m\lambda(a_1+m-1)+a_0+\xi(b_0+b_1m\lambda+c_0\xi)]z=0.$$

Bestimmt man endlich $\lambda$ so, dass

$$\lambda(\lambda-1)m^2+m\lambda(a_1+m-1)+a_0=0 \qquad (2)$$

werde, so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}m^2\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+[m(a_1-1+m+2m\lambda)+b_1m\xi]\frac{dz}{d\xi}+\\+(b_0+b_1m\lambda+c_0\xi)z=0,\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

welche, wie man sieht, die Form der in §. 521 u. f. f. betrachteten

Gleichung besitzt. Findet man, nach den dort vorgetragenen Methoden, $z=\varphi(\xi)$ als Integral der Gl. (3), so ist $y=x^{\lambda m}\varphi(x^m)$ das Integral der Gl. (1). Von den beiden Werthen, welche die Gl. (2) für $\lambda$ darbietet, kann irgend einer, beliebig welcher, gewählt werden.

Als Beispiel zur Anwendung dieser Transformation möge die Riccati'sche Gleichung:

$$\frac{du}{dx}+au^2=bx^\mu \tag{4}$$

dienen, welche, obgleich nur von der ersten Ordnung, doch nicht für jeden Werth von $\mu$ unmittelbar integrirt werden kann. Setzen wir:

$$u=\frac{1}{ay}\cdot\frac{dy}{dx},$$

so verwandelt sich dieselbe in die Gleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=abx^\mu y, \tag{5}$$

welche sofort als specieller Fall der Gl. (1) betrachtet werden kann, und aus dieser hervorgeht, wenn man

$$a_1=b_1=a_0=c_0=0,\ b_0=-ab,\ m=\mu+2$$

setzt. Die Gl. (2) wird für den vorliegenden Fall:

$$\lambda(\lambda-1)(\mu+2)^2+\lambda(\mu+2)(\mu+1)=0,$$

welcher der Werth $\lambda=0$ genügt, so dass $y=\xi^\lambda z=z$ wird, und somit die zweite Transformation ganz entfällt. Durch die Substitution:

$$\xi=x^{\mu+2}$$

erhalten wir daher aus (5):

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{\mu+1}{\mu+2}\frac{dy}{d\xi}-\frac{ab}{(\mu+1)^2}y=0. \tag{6}$$

Diese Gl. hat nun dieselbe Form, wie (14) in §. 522, und geht, wenn man $\xi=t^2$ setzt, über in:

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu}{\mu+2}\frac{dy}{dt}-\frac{4ab}{(\mu+2)^2}ty=0, \tag{7}$$

welche Gleichung übereinstimmt mit der in §. 523, 4) integrirten Gl.: $xy''+2ay'-b^2xy=0$, wenn man $\frac{1}{2}\frac{\mu}{\mu+2}$ an die Stelle von $a$, und $\frac{4ab}{(\mu+2)^2}$ an die Stelle von $b^2$ treten lässt.

Somit ist, vermöge der Gl. ($p$) in dem bezogenen §., das vollständige Integral der Gl. (7):

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2\sqrt{ab}}{\mu+2} tv} (v^2-1)^{-\frac{\mu+4}{2\mu+4}} dv$$

$$+ C_2 t^{\frac{2}{\mu+2}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2\sqrt{ab}}{\mu+2} tv} (v^2-1)^{-\frac{\mu}{2\mu+4}} dv,$$

und hieraus folgt, wenn man für $t$ wieder seinen Werth,

$$t = \xi^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{\mu+2}{2}}$$

einführt, und der Kürze wegen $\frac{\sqrt{ab}\,.\,x^{\frac{1}{2}\mu+1}}{\frac{1}{2}\mu+1} = s$ setzt, als vollständiges Integral der Gl. (5):

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{sv} (v^2-1)^{-\frac{\mu+4}{2\mu+4}} dv + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{sv} (v^2-1)^{-\frac{\mu}{2\mu+4}} dv, \quad (8)$$

dessen allgemeine Gültigkeit jedoch an die Bedingung

$$0 < \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu+2} < 1$$

gebunden ist. Diese Bedingung ist, wie man leicht sieht, für alle positiven Werthe von $\mu$, und für solche negative erfüllt, welche zwischen $-4$ und $-\infty$ liegen. Für Werthe von $\mu$ zwischen 0 und $-2$ wird $\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu+2}$ negativ, und gilt daher blos das zweite particuläre Integral, während für Werthe von $\mu$ zwischen $-2$ und $-4$ die Grösse $\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu+2}$ positiv und $>1$ wird, und daher blos das erste particuläre Integral richtig ist.

Die Gl. (7), und daher auch die Riccati'sche Gleichung kann in geschlossener Form integrirt werden, wenn

$$\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu+2} = \pm r, \text{ oder } \mu = -\frac{4r}{2r \mp 1}$$

ist, unter $r$ eine positive ganze Zahl verstanden, da für alle unter diese Form fallenden Werthe von $\mu$ einer oder der andere der Exponenten von $(v^2-1)$ in Gl. (8) eine positive ganze Zahl wird.

Die oben angewendete Transformation der Gl. (5) ist unzulässig, wenn $\mu = -2$; die Gl. (5) lautet dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{aby}{x^2}; \quad (9)$$

setzen wir $y = x^k$, wo $k$ eine noch unbestimmte Constante, so wird aus (9): $k(k-1) = ab$; bezeichnen wir daher mit $k_1$, $k_2$ die Wurzeln dieser Gleichung, so ist das Integral von (9):

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2}.$$

Für $\mu = 0$ ist die Gl. (5):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = aby, \tag{10}$$

also linear mit constanten Coefficienten, und ihr Integral nach §. 518:

$$y = C_1 e^{x\sqrt{ab}} + C_2 e^{-x\sqrt{ab}}.$$

Der Fall $\mu = -4$ endlich, d. i. die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{aby}{x^4} \tag{11}$$

gestattet ebenfalls die unmittelbare Integration. Mittelst der Substitution $y = xe^{\frac{k}{x}}$ verwandelt sich nämlich diese Gl. in $k^2 = ab$, hieraus folgt $k = \pm \sqrt{ab}$, somit ist:

$$y = x\left(C_1 e^{\frac{\sqrt{ab}}{x}} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{ab}}{x}}\right)$$

das allgemeine Integral der Gl. (11).

**526.** Wir haben uns bisher mit der Integration der reducirten linearen Differenzialgleichungen beschäftiget. Betrachten wir nunmehr die completen linearen Differenzialgleichungen, deren allgemeine Form:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x) \tag{1}$$

ist. Wie schon im §. 516 bemerkt wurde, kann das Integral einer solchen Gleichung immer bestimmt werden, wenn das Integral der entsprechenden reducirten Gleichung:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1} y' + P_n y = 0 \tag{2}$$

bekannt ist. In der That, es sei

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n \tag{3}$$

das allgemeine Integral der Gl. (2), in welchem bekanntlich $C_1$, $C_2$, ...., $C_n$ willkürliche Constanten, $n$ an der Zahl, bedeuten, so würde es genügen, eine dieser Grössen, z. B. $C_n$, nicht mehr constant, sondern als eine — angemessen zu bestimmende — Funktion von $x$ zu betrachten, um den Ausdruck (3) in das Integral der completen Gleichung (1) zu verwandeln. Denn gesetzt, es wäre $y = \varphi(x)$ das Integral der Gl. (1), so dürfte man nur $C_n$ durch eine solche variable Funktion von $x$ ersetzen, welche der Gleichung

$$C_n = \frac{1}{y^{(n)}}\left\{\varphi(x) - C_1 y_1 - C_2 y_2 - C_3 y_3 - \ldots - C_{n-1} y_{(n-1)}\right\}$$

Genüge leistet, da für diesen Werth von $C_n$ das Integral (2) der reducirten Gleichung in jenes der completen übergeht.

Denselben Zweck werden wir nun erreichen, wenn wir sämmtliche $C$, $n$ an der Zahl, variabel machen, wodurch wir den Vortheil erlangen, noch $(n-1)$ Bedingungen aufstellen zu können, deren Wahl so getroffen werden kann, dass dadurch die Bestimmung dieser noch unbekannten Funktionen von $x$ möglichst einfach wird.

Dem Gesagten zu Folge, wird das Integral der completen Gleichung genau dieselbe Form haben, wie jenes (3) der reducirten, nur mit dem Unterschiede, dass im ersteren die $C$ Funktionen von $x$ bedeuten. Die oben erwähnten $(n-1)$ Bedingungen mögen nun darin bestehen, dass auch die Differenzialquotienten von $y$ vom $1^{\text{ten}}$ bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ von derselben Form seien, sowohl aus dem Integral der reducirten als auch aus jenem der completen Gleichung. Dann bekommt aber nur der $n^{\text{te}}$ Differenzialquotient $y^{(n)}$ einen gewissen die $C$ enthaltenden Zusatz $\zeta$, herbeigeführt durch die Variabilität der $C$, und durch Substitution von $y$ und seiner Differenzialquotienten in die Gl. (1) wird der $1^{\text{te}}$ Theil dieser Gleichung sich auf $\zeta$ reduciren. Setzt man daher noch $\zeta = f(x)$, so ist offenbar der Gl. (1) Genüge geleistet.

Der Mechanismus der Rechnung ist hiernach folgender.

Durch Differenziation erhält man aus (3), die $C$ als Funktionen von $x$ betrachtend:

$$y' = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots\ldots + C_n \frac{dy_n}{dx} +$$
$$+ y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + y_n \frac{dC_n}{dx}.$$

In Folge der vorausgesetzten Gleichheit der Form der Differenzialquotienten der Integrale der completen und reducirten Gleichung muss der Ausdruck in der zweiten Zeile verschwinden; man hat daher als $1^{\text{te}}$ Bedingungsgleichung:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0, \qquad (a_1)$$

vermöge welcher sich die vorhergehende Gleichung auf

$$y' = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots\ldots + C_n \frac{dy_n}{dx}$$

reducirt. Hieraus folgt durch abermalige Differenziation:

$$y'' = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots\ldots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2}$$
$$+ \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx},$$

somit der Voraussetzung gemäss:

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}=0; \qquad (a_2)$$

ferner wird:

$$y'''=C_1\frac{d^3y_1}{dx^3}+C_2\frac{d^3y_2}{dx^3}+\ldots\ldots+C_n\frac{d^3y_n}{dx^3},$$

und vermöge der Voraussetzung:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^2y_2}{dx^2}\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^2y_n}{dx^2}\frac{dC_n}{dx}=0, \qquad (a_3)$$

u. s. w. Die $(n-1)^{\text{te}}$ Differenziation gibt:

$$y^{(n-1)}=C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

und die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx}=0; \qquad (a_{n-1})$$

endlich wird:

$$y^{(n)}=C_1\frac{d^ny_1}{dx^n}+C_2\frac{d^ny_2}{dx^n}+\ldots\ldots+C_n\frac{d^ny_n}{dx^n}$$
$$+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx},$$

wo nun der Ausdruck in der zweiten Zeile der oben mit $\zeta$ bezeichnete Zuwachs ist, welcher $=f(x)$ zu setzen ist, wodurch sich als letzte Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}=f(x) \qquad (a_n)$$

ergibt. Die Gleichungen $(a_1)$, $(a_2)$, $(a_3)$, ..., $(a_n)$, $n$ an der Zahl dienen sofort zur Bestimmung von $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$; sie sind in Bezug auf die Differenzialquotienten dieser Grössen: $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \ldots, \frac{dC_n}{dx}$ vom ersten Grade, so dass also diese Differenzialquotienten durch Elimination aus diesen Gleichungen bestimmt werden können. Findet man auf diesem Wege:

$$\frac{dC_1}{dx}=\varphi_1(x),\ \frac{dC_2}{dx}=\varphi_2(x),\ \ldots\ldots,\ \frac{dC_n}{dx}=\varphi_n(x)$$

so folgt:

$$C_1=A_1+\int\varphi_1(x)\,dx,\quad C_2=A_2+\int\varphi_2(x)\,dx,\ \ldots\ C_n=A_n+\int\varphi_n(x)\,dx,$$

und man hat als allgemeines Integral der completen Gleichung (1):

$$y=\left[A_1+\int\varphi_1(x)\,dx\right]y_1+\left[A_2+\int\varphi_2(x)\,dx\right]y_2+\ldots\ldots$$
$$+\left[A_n+\int\varphi_n(x)\,dx\right]y_n,$$

wo $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ willkürliche Constante, $n$ an der Zahl, bedeuten.

Die hier vorgetragene Methode pflegt man die **Methode der Variation willkürlicher Constanten** zu nennen.

Als Beispiel diene die Gl. 2ter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=f(x).$$

Wir integriren zuvörderst die reducirte Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0,$$

und finden nach §. 518 als Integral derselben:

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

Hieraus folgt durch Differenziation, indem $C_1$ und $C_2$ als Funktionen von $x$ betrachtet werden:

$$\frac{dy}{dx}=-aC_1\sin ax+aC_2\cos ax+\cos ax\frac{dC_1}{dx}+\sin ax\frac{dC_2}{dx},$$

somit

$$\cos ax\frac{dC_1}{dx}+\sin ax\frac{dC_2}{dx}=0; \qquad (m)$$

ferner:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2C_1\cos ax-a^2C_2\sin ax-a\sin ax\frac{dC_1}{dx}+a\cos ax\frac{dC_2}{dx},$$

folglich:

$$-a\sin ax\frac{dC_1}{dx}+a\cos ax\frac{dC_2}{dx}=f(x). \qquad (n)$$

Aus den Gleichungen $(m)$ und $(n)$ folgt:

$$\frac{dC_1}{dx}=-\frac{1}{a}\sin ax.f(x),\quad \frac{dC_2}{dx}=\frac{1}{a}\cos ax.f(x),$$

somit

$$C_1=A_1-\frac{1}{a}\int\sin ax.f(x)\,dx,\quad C_2=A_2+\frac{1}{a}\int\cos ax.f(x)\,dx.$$

Setzt man diese Werthe an die Stelle von $C_1$ und $C_2$ im Integral der reducirten Gleichung, so ergibt sich:

$$y=A_1\cos ax+A_2\sin ax$$
$$-\frac{\cos ax}{a}\int\sin ax.f(x)\,dx+\frac{\sin ax}{a}\int\cos ax.f(x)\,dx$$

als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung.

**527.** Der Methode der Variation arbiträrer Constanten bedient man sich auch mit Vortheil zur Completirung eines noch unvollständigen Integrals. Es seien:

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+P_2y^{(n-2)}+\ldots\ldots+P_{n-1}y'+P_ny=f(x) \qquad (1)$$

die vorgelegte Gleichung, und $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ particuläre Integrale der reducirten Gleichung:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

also:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m \tag{2}$$

ein allgemeineres Integral derselben, welchem jedoch noch $n-m$ particuläre Integrale mit ebenso vielen willkürlichen Constanten fehlen. Die Auffindung derselben wird mittelst der Methode der Variation der Constanten von der Integration einer Gleichung der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängig gemacht.

Differenziren wir zu diesem Ende den Ausdruck (2) $(m-1)$ mal, indem wir $C_1, C_2, \dots, C_m$ als Funktionen von $x$ betrachten, und successive in jedem Differenzialquotienten den von der Veränderlichkeit der $C$ herrührenden Bestandtheil derselben der Nulle gleich setzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \dots + C_m y_m', \\ y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \dots + C_m y_m'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(m-1)} = C_1 y_1^{(m-1)} + C_2 y_2^{(m-1)} + \dots + C_m y_m^{(m-1)}, \end{array}\right\} \tag{3}$$

mit den Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} + y_3 \dfrac{dC_3}{dx} + \dots + y_m \dfrac{dC_m}{dx} = 0, \\ y'_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y'_2 \dfrac{dC_2}{dx} + y'_3 \dfrac{dC_3}{dx} + \dots + y'_m \dfrac{dC_m}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(m-2)} \dfrac{dC_1}{dx} + y_2^{(m-2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \dots + y_m^{(m-2)} \dfrac{dC_m}{dx} = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

deren Aufstellung in der Anzahl $(m-1)$ dadurch gerechtfertiget ist, dass wir die Grössen $C_1, C_2, \dots, C_m$, $m$ an der Zahl, neben der einen Bedingung, dass der Ausdruck (2) der Gl. (1) Genüge leiste, offenbar noch $(m-1)$ Bedingungen, aber auch nicht mehr, unterwerfen können. Durch Entwickelung der folgenden Differenzialquotienten bis zum $n^{\text{ten}}$ finden wir ferner:

$$\left.\begin{array}{l} y^{(m)} = C_1 y_1^{(m)} + C_2 y_2^{(m)} + C_3 y_3^{(m)} + \dots + C_m y_m^{(m)} \\ \quad + y_1^{(m-1)} \dfrac{dC_1}{dx} + y_2^{(m-1)} \dfrac{dC_2}{dx} + \dots + y_m^{(m-1)} \dfrac{dC_m}{dx}, \\ y^{(m+1)} = C_1 y_1^{(m+1)} + \dots + C_m y_m^{(m+1)} + 2\left[ y_1^{(m)} \dfrac{dC_1}{dx} + \dots + y_m^{(m)} \dfrac{dC_m}{dx} \right] \\ \quad + y_1^{(m-1)} \dfrac{d^2C_1}{dx^2} + \dots + y_m^{(m-1)} \dfrac{d^2C_m}{dx^2}, \end{array}\right\} \tag{3*}$$

u. s. w.,

wobei, wie man sieht, in $y^{(m)}$ Differenzialquotienten der Grössen $C$ von der $1^{\text{ten}}$, in $y^{(m-1)}$ von der $2^{\text{ten}}$, u. s. w., in $y^{(n)}$ von der $(n-m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung erscheinen.

Substituiren wir nun diese sämmtlichen Differenzialquotienten (3) und (3*) in die Gl. (1), so verschwindet in dem Substitutionsresultate das Aggregat sämmtlicher Glieder, welche die $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ als Faktoren enthalten, und zwar in Folge der Voraussetzung, dass $y_1$, $y_2, \ldots, y_m$ particuläre Integrale der reducirten Gleichung sind, deren jedes die Eigenschaft besitzt, das Polynom linker Hand in Gl. (1) auf 0 zu reduciren; es bleibt somit eine Gleichung:

$$L = f(x), \tag{5}$$

wo $L$ nur die Differenzialquotienten der Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_m$, vom $1^{\text{ten}}$ bis zum $(n-m+1)^{\text{ten}}$ enthält.

Mit Hülfe der $(m-1)$ Bedingungsgleichungen (4), welche in Bezug auf die Differenzialquotienten $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \ldots, \frac{dC_m}{dx}$ vom $1^{\text{ten}}$ Grade sind, lassen sich nun $(m-1)$ dieser Differenzialquotienten durch einen derselben, etwa $\frac{dC_1}{dx}$, ausdrücken, wodurch man dieselben in der Form:

$$\frac{dC_2}{dx} = \varphi_2(x)\frac{dC_1}{dx}, \quad \frac{dC_3}{dx} = \varphi_3(x)\frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_m}{dx} = \varphi_m(x)\frac{dC_1}{dx} \tag{6}$$

erhält, aus welchen Gleichungen sich ferner durch $(n-m)$ malige Differenziation die höheren Differenzialquotienten von $C_2, C_3, \ldots, C_m$, ausgedrückt durch jene von $C_1$ ergeben. Substituiren wir endlich diese Werthe in die Gl. (5), so enthält diese Gl. nur mehr Differenzialquotienten von $C_1$, von der $1^{\text{ten}}$ bis zur $(n-m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und verwandelt sich, wenn wir

$$\frac{dC_1}{dx} = z \tag{7}$$

setzen, in eine Differenzialgleichung der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Kann man diese Gleichung integriren, so erhält man dadurch $z$ in Funktion von $x$ mit $(n-m)$ willkürlichen Constanten. Die Glgn. (7) und (6), $m$ an der Zahl, bieten sodann die Werthe der Grössen $C_1$, $C_2, \ldots, C_m$ dar, mittelst $m$ einfacher Quadraturen, durch welche neuerdings $m$ willkürliche Constanten eingeführt werden, welche die bereits vorhandene Anzahl auf $n$ ergänzen, und nach Substitution der $C$ in den Ausdruck (2) das Integral zu einem vollständigen machen.

Man wird leicht bemerken, dass diese Methode nur eine allgemeinere Darstellung des schon im §. 517 vorgetragenen Verfahrens ist.

## III. Von den besonderen Auflösungen der Differenzialgleichungen.

**528.** Wir haben schon im §. 501 auf den möglichen Fall hingewiesen, dass einer gegebenen Differenzialgleichung:

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

nebst dem allgemeinen, mit einer willkürlichen Constante versehenen Integral:

$$F(x, (y, C) = 0, \tag{2}$$

noch eine andere endliche Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{3}$$

Genüge leiste, welche weder eine willkürliche Constante enthält, noch aus dem allgemeinen Integrale (2) durch Specialisirung der willkürlichen Constante abgeleitet werden kann, und dass dergleichen Integrale besondere Auflösungen oder singuläre Integrale genannt werden.

Die geometrische Betrachtung in §. 502 hat auch den Grund dieser Erscheinung kennen gelehrt, und nachgewiesen, dass die besondere Auflösung, im Falle eine solche existirt, nichts anderes ist, als die Gleichung der einhüllenden Curve jenes Systems von Curven, welches aus dem allgemeinen Integrale (2) durch stetige Aenderung der willkürlichen Constante $C$ hervorgeht.

Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn das allgemeine Integral einer Differenzialgleichung bekannt ist, die besondere Auflösung derselben sich auf demselben Wege ergibt, welcher zur Auffindung der einhüllenden Curve führt [§. 376]. Differenzirt man nämlich die Gl. (2) nach $C$, so ist das Resultat der Elimination von $C$ aus den beiden Gleichungen:

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{dF}{dC} = 0, \tag{4}$$

die besondere Auflösung der Gl. (1).

Es sei z. B. die Differenzialgleichung:

$$y^2 y'^2 - myy' + y^2 - mx = 0 \tag{m}$$

gegeben. Um zunächst zu dem allgemeinen Integral zu gelangen, differenziren wir dieselbe, den in §. 510 angegebenen Weg betretend, und erhalten:

$$2yy'^3 + 2y^2 y' \frac{dy'}{dx} - my'^2 - my \frac{dy'}{dx} + 2yy' - m = 0,$$

oder, nach Hebung des Faktors $2yy'-m$: $\frac{dy'}{dx}y+y'^2+1=0$. Es ist aber $\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\cdot\frac{dy'}{dy}$, womit sich die Gleichung in folgende:

$$yy'\frac{dy'}{dy}+y'^2+1=0, \text{ oder } \frac{y'dy'}{y'^2+1}=-\frac{dy}{y}$$

verwandelt, deren Integral $1+y'^2=\frac{C}{y^2}$ ist, wo $C$ die willkürliche Constante. Durch Elimination von $y'$ aus dieser und der gegebenen Differenzialgleichung erhält man sofort das allgemeine Integral derselben: $C-mx=m\sqrt{C-y^2}$, oder wenn man statt $C$ eine neue willkürliche Constante $\alpha=\frac{C}{m}$ einführt:

$$(x-\alpha)^2+y^2=\alpha m.$$

Differenziren wir nun diese Gleichung nach $\alpha$, und eliminiren aus ihr und dem nach $\alpha$ genommenen Differenzialquotienten: $-2(x-\alpha)=m$ die Grösse $\alpha$, so erhalten wir:

$$y^2=mx+\frac{1}{4}m^2,$$

als besondere Auflösung der gegebenen Differenzialgleichung, welche derselben gleichfalls Genüge leistet.

**529.** Man kann jedoch die besondere Auflösung einer Differenzialgleichung auch finden, ohne das allgemeine Integral derselben zu kennen. In der That kann das System der Curven, welche aus der Gl. (2) [im vor. §.] durch stetige Aenderung von $C$ hervorgehen, eine einhüllende Curve nur in dem Falle darbieten, wenn diese Curven sich schneiden. Diese Durchschnittspunkte sind nun von zweierlei Art: solche, welche eben die einhüllende Linie bilden, und durch den Durchschnitt je zweier aufeinanderfolgenden Curven entstehen, welche zu unendlich wenig verschiedenen Werthen von $C$ gehören; und solche, in welchen sich zwei oder mehrere der Curven schneiden, welche zu Werthen von $C$ gehören, die um eine endliche Grösse von einander verschieden sind. In jedem Durchschnittspunkte der ersten Art haben beide sich schneidende eingehüllte Curven und die einhüllende Curve eine gemeinschaftliche Tangente, während in den Durchschnittspunkten der zweiten Gattung die Neigung der sich schneidenden Curven gegen die Abscissenaxe verschieden sein wird. Hieraus folgt, dass die Gl. (1) nach Wegschaffung der Wurzelgrössen, nach $y'$ vom zweiten oder einem höheren Grade sein und somit für $y'$ verschiedene Werthe darbieten muss, wenn man an die Stelle von $x$ und $y$ ganz beliebige Werthe treten

lässt, welche überhaupt $y$ nicht imaginär machen. Setzt man hingegen für $x$ und $y$ Werthe, welche Punkten der einhüllenden Curve angehören, also der besonderen Auflösung (3) Genüge leisten, so müssen mindestens zwei der aus (1) folgenden Werthe von $y'$ einander gleich werden.

Damit aber die Gl. (1) nach $y'$ gleiche Wurzeln darbiete, muss [§. 95, I. Bd.] ihre 1te abgeleitete Funktion nach $y'$, d. i. der 1te nach $y'$ genommene Differenzialquotient gleich Null werden. Setzt man daher:

$$\frac{df}{dy'} = 0, \qquad (5)$$

so drückt diese Gleichung die Bedingung aus, welcher die besondere Auflösung Genüge leisten muss. Diese selbst ergibt sich sofort durch Elimination von $y'$ aus (1) und (5):

Für das Beispiel im vor. §. erhalten wir durch Differenziation der gegebenen Differenzialgleichung $(m)$ nach $y'$:

$$\frac{df}{dy'} = 2yy' - m = 0, \quad \text{d. i.} \quad y' = \frac{m}{2y},$$

und durch Substitution dieses Werthes von $y'$ in die Gl. $(m)$:

$y^2 = mx + \frac{1}{4}m^2$, wie zuvor.

Dieses Verfahren kann nicht mehr unmittelbar angewendet werden, wenn die Gl. (1) nach $y'$ aufgelöst, also in der Form $y' = \psi(x, y)$ gegeben ist. Differenzirt man aber (1) einmal nach $x$, dann nach $y$, indem man $y'$ als eine durch diese Gleichung implicit bestimmte Funktion von $x$ und $y$ betrachtet, so erhält man:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0,$$

und hieraus:

$$\frac{df}{dy'} = -\frac{df}{dx} : \frac{dy'}{dx} = -\frac{df}{dy} : \frac{dy'}{dy}.$$

Soll daher, wie diess für die besondere Auflösung erfordert wird, $\frac{df}{dy'} = 0$ werden, so müssen gleichzeitig die Gleichungen:

$$\frac{dy'}{dx} = \infty, \quad \frac{dy'}{dy} = \infty$$

statt haben. Gibt es eine Relation zwischen $x$ und $y$, welche diesen Gleichungen, und zugleich auch der Gl. (1) Genüge leistet, so ist diese die gesuchte besondere Auflösung.

In unserem obigen Beispiele gibt Gl. $(m)$ nach $y'$ aufgelöst:

$$y' = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4mx - 4y^2}}{2y};$$

hieraus findet man:

$$\frac{dy'}{dx} = \pm \frac{m}{y\sqrt{m^2 + 4mx - 4y^2}},$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{\mp (m^2 + 4mx) - m\sqrt{m^2 + 4mx - 4y^2}}{2y^2\sqrt{m^2 + 4mx - 4y^2}};$$

beide Ausdrücke werden unendlich für $m^2 + 4mx - 4y^2 = 0$, und da der hieraus folgende Werth: $y^2 = mx + \frac{1}{4}m^2$ der Gl. ($m$) Genüge leistet, so ist derselbe eine besondere Auflösung dieser Gleichung.

## IV. Von den gleichzeitigen (simultanen) Differenzialgleichungen.

**530.** Es seien $x, y, z, \ldots.$ Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen $t$, $n$ an der Zahl, zwischen welchen und ihren nach $t$ genommenen Differenzialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} = x', \ldots. \frac{d^m x}{dt^m} = x^{(m)}; \quad \frac{dy}{dt} = y', \ldots. \frac{d^n y}{dt^n} = y^{(n)};$$

$$\frac{dz}{dt} = z', \ldots. \frac{d^r z}{dt^r} = z^{(r)}, \ldots.$$

$n$ Gleichungen gegeben sind, so wird ein solches System von Gleichungen ein System gleichzeitiger oder simultaner Differenzialgleichungen genannt, und die Aufgabe der Integration derselben besteht darin, aus ihnen Gleichungen, $n$ an der Zahl, zwischen $x, y, z, \ldots.$ und $t$ zu entwickeln, welche, die gegebenen Differenzialgleichungen vollständig ersetzend, die abhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots.$ in Funktion von $t$ bestimmen.

Die Integration solcher Gleichungen kann immer zurückgeführt werden auf die Integration einer Differenzialgleichung mit nur zwei veränderlichen Grössen. Betrachten wir, um diess nachzuweisen, zunächst nur zwei Gleichungen zwischen zwei abhängig Veränderlichen $x, y$, und ihren Differenzialquotienten nach $t$:

$$\left.\begin{aligned} f(t;\, x, x', x'', \ldots. x^{(m)};\; y, y', y'', \ldots. y^{(n)}) = 0, \\ F(t;\, x, x', x'', \ldots.. x^{(\mu)};\; y, y', y'', \ldots. y^{(\nu)}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Differenziren wir die erste dieser Gleichungen $\nu$ mal, die zweite $n$ mal, so erhalten wir mit Einschluss der gegebenen Gleichungen, $n + \nu + 2$ Gleichungen, aus welchen wir die Grössen: $y, y', y'', \ldots.. y^{(n+\nu)}$, $(n + \nu + 1)$ an der Zahl eliminiren können; das Resultat ist offenbar

eine Differenzialgleichung zwischen $x$ und $t$, deren Ordnungszahl die grössere der beiden Zahlen $m+\nu$, $\mu+n$ nicht übersteigt. Auf ähnliche Art wird man eine Gleichung zwischen $t$ und $y$ bilden können und man sieht leicht, dass sich das Verfahren auch auf den Fall ausdehnen lässt, wo die Anzahl der Veränderlichen und der Gleichungen eine grössere ist.

Sind übrigens die gegebenen Gleichungen von 1ter Ordnung, so kann man dieselben von der Form

$$x' = f_1,\ y' = f_2,\ z' = f_3,\ \ldots,\ w' = f_n \tag{2}$$

voraussetzen, wo $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ Funktionen von $t, x, y, z, \ldots, w$ bedeuten. Es ist dann einfacher, statt alle diese $n$ Gleichungen gleichzeitig zu differenziren, diess nur mit einer derselben zu thun, indem man zugleich nach jeder Differenziation für die durch diese Operation im zweiten Theile der Gleichung auftretenden Differenzialquotienten ihre durch die gegebenen Gleichungen selbst dargebotenen Werthe substituirt.

Durch Differenziation der ersten Gleichung $x' = f_1$, erhält man nämlich:

$$x'' = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_1}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df_1}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dt} + \ldots,$$

d. i. mit Rücksicht auf die folgenden Gleichungen:

$$x'' = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_1}{dx} f_1 + \frac{df_1}{dy} f_2 + \frac{df_1}{dz} f_3 + \ldots = \varphi_1,$$

wo nun $\varphi_1$ wieder eine Funktion von $t, x, y, z, \ldots\ldots w$, ist.

Wendet man nun dieses Verfahren wieder auf die Gleichung $x'' = \varphi_1$, an, und setzt dasselbe bis zum $n^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten fort, so hat man die Gleichungen:

$$x' = f_1,\ x'' = \varphi_1,\ x''' = \varphi_2,\ \ldots,\ x^{(n)} = \varphi_{n-1},$$

$n$ an der Zahl, aus welchen man durch Elimination der $(n-1)$ Grössen: $y, z, \ldots w$ die Endgleichung zwischen $x$ und $t$ gewinnt, welche im Allgemeinen von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung sein wird. Nicht selten ergibt sich jedoch schon früher, bevor man noch bis zur $n^{\text{ten}}$ Differenziation vorgeschritten ist, Gelegenheit, eine Gleichung zwischen $x$ und $t$ zu bilden, deren Ordnungsexponent dann kleiner als $n$ ist.

Man kann übrigens jederzeit ein System gleichzeitiger Differenzialgleichungen höherer Ordnung auf ein anderes 1ter Ordnung, jedoch mit einer grösseren Anzahl von Veränderlichen, zurückführen.

Sind z. B. die Glgn. (1) mit den Veränderlichen $x, y, t$, gegeben, und ist $m > \mu$, $n > \nu$, so setze man:

$$x' = \xi_1, \quad x'' = \xi_2, \quad x''' = \xi_3, \ldots\ldots x^{(m-1)} = \xi_{m-1};$$
$$y' = \eta_1, \quad y'' = \eta_2, \quad y''' = \eta_3, \ldots\ldots, y^{(n-1)} = \eta_{n-1},$$

wo $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{m-1}$; $\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_{n-1}$ als neue von $t$ abhängige Veränderliche zu betrachten sind; man hat es nun mit folgendem System von Gleichungen 1ter Ordnung zu thun:

$$f(t, x, \xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_{m-1}, \xi'_{m-1}, y, \eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_{n-1}, \eta'_{n-1}) = 0,$$
$$F(t, x, \xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_\mu, y, \eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_\nu) = 0,$$
$$x' - \xi_1 = 0, \; \xi'_1 - \xi_2 = 0, \; \xi'_2 - \xi_3 = 0, \ldots\ldots, \xi'_{m-2} - \xi_{m-1} = 0,$$
$$y' - \eta_1 = 0, \; \eta'_1 - \eta_2 = 0, \; \eta'_2 - \eta_3 = 0, \ldots\ldots, \eta'_{n-2} - \eta_{n-1} = 0.$$

Als Beispiel mögen die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha(y+z)}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\beta(x+z)}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma(x+y)}{t}$$

dienen. Aus der ersten dieser Gleichungen, in der Form:

$$tx' = \alpha(y+z) \qquad (m)$$

geschrieben, folgt durch Differenziation: $x' + tx'' = \alpha(y' + z')$, somit, wenn man in dieser Gleichung für $x'$, $y'$, $z'$, die Werthe setzt:

$$t^2x'' = \alpha x(\beta+\gamma) + \alpha y(\gamma - 1) + \alpha z(\beta - 1). \qquad (n)$$

Diese Gleichung abermals differenzirt, gibt nach Substitution der Werthe für $x'$, $y'$, $z'$:

$$\left.\begin{aligned} t^3x''' = \alpha x(2\beta\gamma - 3\beta - 3\gamma) + \alpha y(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 3\gamma + 2) \\ + \alpha z(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 3\beta + 2). \end{aligned}\right\} \qquad (p)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen $(m)$ und $(n)$ zieht man für $y$ und $z$ die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\gamma-\beta)\,y = t^2x'' - tx'(\beta-1) - \alpha x(\beta+\gamma), \\ \alpha(\gamma-\beta)\,z = -t^2x'' + tx'(\gamma-1) + \alpha x(\beta+\gamma), \end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

welche, in die Gl. $(p)$ substituirt, folgende Gleichung zwischen $x$ und $t$ liefern:

$$t^3x''' + 3t^2x'' - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 1)\,tx' - 2\alpha\beta\gamma x = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nach §. 519 integriren; ihr Integral ist:

$$x = C_1t^{r_1} + C_2t^{r_2} + C_3t^{r_3},$$

wo $r_1$, $r_2$, $r_3$ die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$r^3 - r(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 2\alpha\beta\gamma = 0$$

bedeuten. Die Werthe von $y$ und $z$ ergeben sich sofort mittelst der Glgn. $(q)$.

Wären die gegebenen Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y+z}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x+z}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x+y}{t},$$

welche aus den vorigen für $\alpha = \beta = \gamma = 1$ hervorgehen, so erhielte

man durch Differenziation der ersten Gleichung, nach Substitution der Werthe von $y'$ und $z'$ unmittelbar eine Gleichung zwischen $x$ und $t$, nämlich:

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0,$$

deren Integral nach §. 519:

$$x = Ct^2 + C't^{-1}$$

ist. Durch Subtraction der beiden ersten Gleichungen ergibt sich nun: $x't - y't = y - x$, oder, wenn man für $x$ und $x'$ den eben gefundenen Werth substituirt:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} - 3Ct = 0,$$

woraus durch Integration [§. 505]

$$y = Ct^2 + C''t^{-1}$$

folgt. Addirt man endlich die beiden ersten Gleichungen, und substituirt in der Summe für $x$, $x'$, $y$, $y'$ die bereits gewonnenen Werthe, so erhält man:

$$z = Ct^2 - (C + C'')t^{-1}.$$

**531.** Unter linearen gleichzeitigen Differenzialgleichungen 1ter Ordnung versteht man solche, welche die abhängig Veränderlichen, und deren Differenzialquotienten 1ter Ordnung weder in höheren Potenzen, noch in einander multiplicirt enthalten. Betrachten wir zunächst zwei solche Gleichungen zwischen den Veränderlichen $x$, $y$ und $t$, welche man von der Form:

$$x' + Px + Qy = T, \quad y' + P_1x + Q_1y = T_1 \tag{1}$$

voraussetzen kann, wo $P$, $Q$, $T$, $P_1$, etc. Funktionen von $t$ bedeuten; die zweite derselben, mit $\lambda$, einer noch unbestimmten Funktion von $t$, multiplicirt und zur ersten addirt, gibt:

$$x' + y'\lambda + (P + P_1\lambda)x + (Q + Q_1\lambda)y = T + T_1\lambda.$$

Man setze nun $x + \lambda y = u$, wo $u$ eine neue Veränderliche bedeutet, so wird, $x' + \lambda y' = u' - \lambda' y$, und die letzte Gleichung geht durch Substitution dieses Werthes über in:

$$u' + (P + P_1\lambda)u - y[\lambda' + \lambda(P + P_1\lambda) - (Q + Q_1\lambda)] = T + T_1\lambda.$$

Bestimmt man nun die Funktion $\lambda$ so, dass sie der Gleichung:

$$\lambda' + \lambda(P + P_1\lambda) - (Q + Q_1\lambda) = 0 \tag{2}$$

Genüge leistet, so wird

$$u' + (P + P_1\lambda)u = T + T_1\lambda. \tag{3}$$

Kann man die Gl. (2), welche nur $\lambda$ und $t$ enthält, integriren, so substituirt man den aus ihr folgenden Werth von $\lambda$, in Funktion von $t$, in

(3), welche sodann nur $u$ und $t$ enthält, und, weil linear, immer integrirt werden kann.

Hat man drei lineare Differenzialgleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, und der unabhängig Veränderlichen $t$, so bringe man dieselben auf die Form:

$$\begin{aligned} x' + Px + Qy + Rz &= T, \\ y' + P_1x + Q_1y + R_1z &= T_1, \\ z' + P_2x + Q_2y + R_2z &= T_2, \end{aligned} \tag{4}$$

und man erhält durch Addition derselben, nachdem die 2[te] mit $\lambda$, die 3[te] mit $\mu$ multiplicirt worden, unter $\lambda$ und $\mu$ noch unbestimmte Funktionen von $t$ verstanden:

$$\begin{aligned} x' + \lambda y' + \mu z' + (P + P_1\lambda + P_2\mu)\,x + (Q + Q_1\lambda + Q_2\mu)\,y \\ + (R + R_1\lambda + R_2\mu)\,z = T + T_1\lambda + T_2\mu. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$x + \lambda y + \mu z = u, \text{ folglich } x' + \lambda y' + \mu z' = u' - \lambda' y - \mu' z,$$

so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\begin{aligned} u' + (P + P_1\lambda + P_2\mu)\,u \\ - y[\lambda' + \lambda(P + P_1\lambda + P_2\mu) - (Q + Q_1\lambda + Q_2\mu)] \\ - z[\mu' + \mu(P + P_1\lambda + P_2\mu) - (R + R_1\lambda + R_2\mu)] \\ = T + T_1\lambda + T_2\mu, \end{aligned}$$

welche, wenn man die Funktionen $\lambda$ und $\mu$ aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' + \lambda(P + P_1\lambda + P_2\mu) - (Q + Q_1\lambda + Q_2\mu) = 0, \\ \mu' + \mu(P + P_1\lambda + P_2\mu) - (R + R_1\lambda + R_2\mu) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

bestimmt, in:

$$u' + (P + P_1\lambda + P_2\mu)\,u = T + T_1\lambda + T_2\mu \tag{6}$$

übergeht. Kann man die Glgn. (5) integriren, so wird man die daraus folgenden Werthe von $\lambda$ und $\mu$ in (6) substituiren, welche letztere Gleichung sodann nur $u$ und $t$ enthält, und linear ist.

**532.** Betrachten wir nun den Fall, wenn $n$ lineare Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten gegeben sind. Man kann dieselben immer von der Form:

$$\left.\begin{aligned} x' + a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots + g_1w &= T_1, \\ y' + a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots + g_2w &= T_2, \\ z' + a_3x + b_3y + c_3z + \ldots\ldots + g_3w &= T_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w' + a_nx + b_ny + c_nz + \ldots\ldots + g_nw &= T_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

voraussetzen, so dass jede derselben nur einen Differenzialquotienten enthält. Multipliciren wir die zweite mit $\lambda_2$, die dritte mit $\lambda_3, \ldots$ die

letzte mit $\lambda_n$, unter $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ noch unbestimmte Zahlen verstanden; addiren wir sodann diese Gleichungen, und setzen:

$$x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \ldots\ldots + \lambda_n w = \xi,$$

$$T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 + \ldots\ldots + \lambda_n T_n = T,$$

$$a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots\ldots + \lambda_n a_n = \theta, \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \ldots\ldots + \lambda_n b_n &= \lambda_2 \theta, \\ c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \ldots\ldots + \lambda_n c_n &= \lambda_3 \theta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \ldots\ldots + \lambda_n g_n &= \lambda_n \theta, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

so kommt:

$$\frac{d\xi}{dt} + \theta\xi = T;$$

hieraus folgt durch Integration [§. 505]:

$$\xi = e^{-\theta t}\left(C + \int T e^{\theta t} dt\right),$$

oder, für $\xi$ und $T$ die Werthe gesetzt:

$$x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \ldots\ldots + \lambda_n w =$$

$$= e^{-\theta t}\left[C + \int (T_1 + T_2\lambda_2 + \ldots + T_n\lambda_n) e^{\theta t} dt\right], \quad (4)$$

und es handelt sich jetzt nur noch um die Bestimmung der Grössen $\theta, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$. Mittelst der Glgn. (3), $n-1$ an der Zahl, kann man nun die Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ in Funktion von $\theta$:

$$\lambda_2 = \varphi_2(\theta), \quad \lambda_3 = \varphi_3(\theta), \quad \ldots\ldots \lambda_n = \varphi_n(\theta) \quad (5)$$

ausdrücken, welche Werthe, in die Gl. (2) substituirt, zur Bestimmung von $\theta$ eine Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades:

$$A\theta^n + B\theta^{n-1} + C\theta^{n-2} + \ldots\ldots + N = 0 \quad (6)$$

liefern, welche somit für $\theta$ im Allgemeinen $n$ Werthe darbieten wird, zu deren jedem, vermöge der Glgn. (5) ein bestimmtes System von Werthen der Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ gehört. Durch Substitution jedes dieser Systeme in die Gl. (4) erhält man $n$ solche Gleichungen, welche, da in jeder derselben die Constante $C$ eine andere ist, die vollständigen Integrale der Gleichungen (1) darstellen.

Im Falle die Gl. (6) zwei oder mehrere gleiche Wurzeln besässe, würden ebenso viele der aus Gl. (4) hervorgehenden Integrale von einander nicht verschieden sein, und, bei $\mu$ gleichen Wurzeln, $\mu-1$ Gleichungen mit ebenso vielen willkürlichen Constanten fehlen. Um zu diesen zu gelangen, denken wir uns die Werthe (5) von $\lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots$ in die Gl. (4) substituirt, und diese nach $C$ aufgelöst, so können wir sie in der Form: $C = F(\theta, t, x, y, z, \ldots)$ oder kürzer:

$$C = F(\theta)$$

darstellen. Es seien nun $\theta'$ und $\theta'' = \theta' + \varepsilon$ zwei Wurzeln der Gl. (6), so sind die von diesen herrührenden Integralgleichungen:

$$C' = F(\theta'), \text{ und } C'' = F(\theta'') = F(\theta' + \varepsilon);$$

aus der zweiten folgt, mit Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes:

$$C'' = F(\theta') + \varepsilon F'(\theta') + \frac{\varepsilon^2}{1.2} F''(\theta') + \ldots\ldots,$$

d. i. weil $F(\theta') = C'$:

$$\frac{C'' - C'}{\varepsilon} = F'(\theta') + \frac{\varepsilon}{1.2} F''(\theta') + \ldots\ldots$$

Lassen wir nun $\varepsilon$ unendlich klein werden, so werden die beiden Wurzeln $\theta'$ und $\theta''$ einander gleich, und die letzte Gleichung verwandelt sich, wenn wir die unbestimmt werdende Grösse $\frac{C'' - C'}{\varepsilon}$ mit $C$ bezeichnen, in $C = F'(\theta')$. Hieraus folgt also, dass die Anwesenheit zweier gleicher Wurzeln $\theta'$ die beiden, mit zwei willkürlichen Constanten $C$, $C'$ versehenen Integralgleichungen:

$$C' = F(\theta'), \quad C = F'(\theta') = \left(\frac{dF(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta = \theta'}$$

nach sich zieht.

Im Falle dreier gleicher Wurzeln $= \theta'$ fände man auf demselben Wege für die entsprechenden Integralgleichungen:

$$C = F(\theta'), \quad C' = F'(\theta'), \quad C'' = F''(\theta')$$

u. s. w.

Wir haben hiebei die Gl. (4) als nach $C$ aufgelöst vorausgesetzt; diess ist jedoch nicht wesentlich, man gelangt offenbar zu demselben Resultate, wenn man dieselbe sofort nach $\theta$ differenzirt, dabei $C$ als Funktion von $\theta$ betrachtend, wo dann die Differenzialquotienten $\frac{dC}{d\theta}, \frac{d^2C}{d\theta^2}, \ldots$ als neue willkürliche Constanten anzusehen sind.

Beisp. 1) Die gegebenen Gleichungen seien:

$$6x' - y' + 40x = 6t - e^t,$$

$$2x' + 5y' + 24x + 32y = 2t + 5e^t,$$

oder durch successive Elimination auf die Form der Gleichungen (1) gebracht:

$$x' + 7x + y = t, \quad y' + 2x + 6y = e^t;$$

multiplicirt man die zweite Gleichung mit $\lambda_2$ und addirt sie zur ersten, so kommt:

$$x' + \lambda_2 y' + (7 + 2\lambda_2)x + (1 + 6\lambda_2)y = t + \lambda_2 e^t;$$

man setze nun:

$$7 + 2\lambda_2 = \theta, \quad 1 + 6\lambda_2 = \theta\lambda_2,$$

welchen Gleichungen die Auflösungen: $\theta = 8$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, und $\theta = 5$, $\lambda_2 = -1$ entsprechen, so sind, vermöge Gl. (4) die Integrale der gegebenen Gleichungen:

$$x + \frac{1}{2}y = e^{-8t}\left[C + \int\left(t + \frac{1}{2}e^t\right)e^{8t}dt\right],$$

$$x - y = e^{-5t}\left[C' + \int(t - e^t)\,e^{5t}dt\right],$$

d. i. wenn man die Integration ausführt:

$$x + \frac{1}{2}y = Ce^{-8t} + \frac{1}{18}e^t + \frac{1}{8}t - \frac{1}{64},$$

$$x - y = C'e^{-5t} - \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{5}t - \frac{1}{25},$$

oder:

$$x = C_1e^{-8t} + C_2e^{-5t} - \frac{1}{54}e^t + \frac{3}{20}t - \frac{19}{800},$$

$$y = C_1e^{-8t} - 2C_2e^{-5t} + \frac{8}{54}e^t - \frac{1}{20}t + \frac{13}{800},$$

wo $C_1 = \frac{2}{3}C$, $C_2 = \frac{1}{3}C'$ gesetzt ist.

2) Für die Gleichungen:

$$x' + 2x - 3y = t, \quad y' + \frac{3}{4}x + 5y = 1 - t$$

hat man:

$$2 + \frac{3}{4}\lambda_2 = \theta, \quad -3 + 5\lambda_2 = \theta\lambda_2,$$

woraus $\theta = \frac{7}{2}$ als zweifache Wurzel, $\lambda_2 = \frac{4\theta - 8}{3} = 2$ folgt. Die Gleichung (4) wird hiemit:

$$x + \frac{4\theta - 8}{3}y = e^{-\theta t}\left[C + \int\left(2t + \frac{4\theta - 8}{3}(1 - t)\right)e^{\theta t}\,dt\right],$$

oder nach Entwickelung des Integrals:

$$3x + (4\theta - 8)y = 3Ce^{-\theta t} - 2t\left(2 - \frac{7}{\theta}\right) + 2\left(2 - \frac{2}{\theta} - \frac{7}{\theta^2}\right). \qquad (m)$$

Hieraus ergibt sich für $\theta = \frac{7}{2}$ als erste Integralgleichung:

$$x + 2y = Ce^{-\frac{7}{2}t} + \frac{4}{7}.$$

Um die zweite zu finden, hat man $(m)$ nach $\theta$ zu differenziren, wodurch man erhält:

$$4y = 3e^{-\theta t}\left(-Ct + \frac{dC}{d\theta}\right) - 2t\,.\,\frac{7}{\theta^2} + 2\left(\frac{2}{\theta^2} + \frac{14}{\theta^3}\right),$$

und hieraus, $\theta = \frac{7}{2}$, und $\frac{dC}{d\theta} = C'$ setzend:

$$4y = 3e^{-\frac{7}{2}t}(C' - Ct) - \frac{8}{7}t + \frac{48}{49}.$$

## V. Totale Differenzialgleichungen mit mehreren veränderlichen Grössen.

**533.** Betrachten wir die Differenzialgleichung 1ter Ordnung:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \tag{1}$$

in welcher $x$ und $y$ zwei unabhängige Variable, $z$ eine Funktion derselben bedeuten, unter $P$, $Q$, $R$ aber Funktionen dieser drei Veränderlichen zu verstehen sind. Diese Gleichung integriren heisst, einen Werth von $z$ in Funktion von $x$ und $y$, oder allgemeiner gesprochen, eine Relation zwischen diesen drei Grössen zu finden, welche der Gl. (1) Genüge leistet. Wir werden sogleich sehen, dass die Existenz einer solchen Relation an die Erfüllung einer gewissen Bedingung gebunden ist, und wollen vorerst einen speciellen Fall betrachten.

Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die linke Seite der Gl. (1) das vollständige Differenzial einer Funktion $U = f(x, y, z)$ ist, in welchem Falle man offenbar $f(x, y, z) = C$ als Integral derselben hat. Die Gl. (1) muss dann identisch sein mit der Gleichung:

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0;$$

es muss daher $P = \frac{dU}{dx}$, $Q = \frac{dU}{dy}$, $R = \frac{dU}{dz}$, und vermöge eines bekannten Satzes der Differenzialrechnung [§. 326]:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} \tag{2}$$

sein. Diese Gleichungen drücken sofort die Bedingungen aus, welche erfüllt sein müssen, wenn die linke Seite von (1) das vollständige Differenzial einer Funktion $U = f(x, y, z)$ sein soll.

Ist diess der Fall, so findet man die Funktion $U$ selbst leicht auf folgendem Wege. Da nämlich $P$ der partielle Differenzialquotient nach $x$ der Funktion $U$ ist, so hat man:

$$U = \int Pdx + V,$$

wo $V$ noch eine Funktion von $y$ und $z$ sein kann. Um sie zu bestimmen, differenziren wir diese Gleichung nach $y$, und erhalten:

$$\frac{dU}{dy} = \int \frac{dP}{dy} dx + \frac{dV}{dy},$$

d. i., da $\frac{dU}{dy} = Q$:

$$\frac{dV}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy} dx, \quad V = \int dy \left( Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) + Z,$$

wo $Z$ eine Funktion von $z$. Man hat nun:

$$U = \int P dx + \int dy \left( Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) + Z.$$

Um $Z$ zu bestimmen, differenziren wir diese Gleichung nach $z$, und erhalten, da $\frac{dU}{dz} = R$:

$$R = \int \frac{dP}{dz} dx + \int dy \left( \frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dy\, dz} dx \right) + \frac{dZ}{dz},$$

woraus:

$$Z = \int dz \left[ R - \int \frac{dP}{dz} dx - \int dy \left( \frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dy\, dz} dx \right) \right]$$

folgt. Das gesuchte Integral ist daher:

$$U = \int P dx + \int dy \left( Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) +$$

$$+ \int dz \left[ R - \int \frac{dP}{dz} dx - \int dy \left( \frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dy\, dz} dx \right) \right].$$

Man überzeugt sich leicht, dass die durch dieses Verfahren vorgeschriebene Rechnungsoperation auch auf folgende Weise dargestellt werden kann. Man setze:

$$\int P dx = U',$$

bei welcher Integration selbstverständlich $y$ und $z$ als constant betrachtet werden, differenzire nun $U'$ nach allen drei Veränderlichen und ziehe das Differenzial von der linken Seite der Gl. (1) ab; der Rest wird nur $y$ und $z$ enthalten, und die Form:

$$Q' dy + R' dz \qquad (m)$$

haben. Nun suche man:

$$\int Q' dy = U'',$$

dabei $z$ als constant betrachtend, differenzire sodann $U''$ nach $y$ und $z$

und ziehe das Resultat von $(m)$ ab; der Rest, von der Form $R''dz$, wird nur noch $z$ enthalten; sucht man endlich:

$$\int R''dz = U''',$$

so ist:

$$U = U' + U'' + U''' = C$$

das Integral der Gl. (1).

Es ist klar, dass dieses Verfahren auch auf Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen ausgedehnt werden kann.

Beisp. Die gegebene Gleichung sei:

$$\left(\frac{yz}{x^2y^2+z^2}-\frac{1}{z}\right)dx+\left(\frac{xz}{x^2y^2+z^2}-\frac{1}{z}\right)dy-\left(\frac{yx}{x^2y^2+z^2}-\frac{x+y}{z^2}\right)dz=0,$$

für welche, wie man sich leicht überzeugt, die Bedingungsgleichungen (2) erfüllt sind. Man hat nun:

$$U' = \int Pdx = \int\left(\frac{yz}{x^2y^2+z^2}-\frac{1}{z}\right)dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{xy}{z}-\frac{x}{z};$$

$$dU' = \left(\frac{yz}{x^2y^2+z^2}-\frac{1}{z}\right)dx+\frac{xz}{x^2y^2+z^2}dy-\left(\frac{xy}{x^2y^2+z^2}-\frac{x}{z^2}\right)dz,$$

welcher Ausdruck, von der gegebenen Gleichung abgezogen, den Rest:

$$Q'dy + R'dz = -\frac{dy}{z}+\frac{ydz}{z^2} \qquad (m)$$

gibt. Hiemit erhält man:

$$U'' = \int Q'dy = -\int\frac{dy}{z} = -\frac{y}{z},$$

und

$$dU'' = -\frac{dy}{z}+\frac{ydz}{z^2}.$$

Dieser Ausdruck, von $(m)$ abgezogen, gibt Null; es ist daher $U''' = 0$, und das gesuchte Integral:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{xy}{z}-\frac{x+y}{z} = C.$$

**534.** Die Gleichung:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (1)$$

kann aber auch durch Elimination einer Constante aus der primitiven Gleichung $F(x, y, z) = 0$ und deren unmittelbarem Differenzial, oder auch dadurch entstanden sein, dass man in dem Differenzial einen allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor unterdrückt hat, und wird

in diesen Fällen den Bedingungsgleichungen (2) im vor. §. im Allgemeinen nicht Genüge leisten. Soll nun überhaupt die Existenz der Gl. (1) mit der Voraussetzung, dass $z$ eine Funktion der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$ sei, verträglich sein, so muss nothwendig der aus (1) gezogene Werth:

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

der allgemeinen Bedingung für den Ausdruck des Differenzials einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen [§. 326] Genüge leisten, d. h. es muss sein:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{R}\right).$$

Führt man die Differenziation aus, und beachtet hiebei, dass die Grössen $P$, $Q$, $R$, auch noch $z$ enthalten, so kommt:

$$R\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{dz}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy} + \frac{dR}{dz}\frac{dz}{dy}\right) =$$

$$= R\left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\right) - Q\left(\frac{dR}{dx} + \frac{dR}{dz}\frac{dz}{dx}\right),$$

oder, da $\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R}$ ist:

$$P\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) = 0, \qquad (2)$$

und nur, wenn diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, kann man in (1) $x$ und $y$ als zwei unabhängig Veränderliche, und $z$ als Funktion derselben ansehen. In diesem Falle ist, geometrisch betrachtet, das Integral die Gleichung einer Fläche, von welcher die Gl. (1) irgend eine Eigenschaft ausdrückt. Man wird leicht bemerken, dass obige Bedingungsgleichung (2) die Bedingungsgleichungen (2) des vorhergehenden §. als speciellen Fall in sich begreift.

Ist hingegen die Gl. (2) nicht erfüllt, so kann die Gl. (1) nur durch die Annahme, dass zwei der Veränderlichen, etwa $x$ und $y$ durch irgend eine Relation $\varphi(x, y) = 0$ mit einander verbunden sind, eine analytische Bedeutung erhalten, wodurch sich aber die Integration derselben auf jene einer Gleichung mit zwei Veränderlichen reducirt. Das Integral wird in diesem Falle durch ein System zweier Gleichungen, welche eine willkürliche Funktion enthalten, dargestellt, und bedeutet in geometrischer Beziehung ein System von Curven im Raume, durch welche sich jedoch keine stetige Fläche legen lässt, weil ja sonst ein Integral $f(x, y, z) = C$ der Gl. (1) existiren müsste, was der Voraussetzung widerspricht.

Gesetzt nun, die Bedingungsgleichung (2) sei erfüllt, so lässt sich das Integral der Gl. (1) in folgender Weise entwickeln. Betrachten wir zuvörderst eine der drei Veränderlichen, etwa $z$ als constant, so reducirt sich die Gl. (1) auf:

$$Pdx + Qdy = 0,$$

welche dem im Abstande $= z$ parallel zur Ebene der $xy$ geführten Schnitte der Fläche angehört. Das Integral dieser Gleichung mit zwei Veränderlichen sei:

$$\varphi(x, y, z) = Z,$$

wo $Z$ die Integrationsconstante bezeichnet, welche, da bei der Integration $z$ als constant betrachtet wurde, noch $z$ enthalten kann. Durch Differenziation dieser Gleichung nach allen drei Veränderlichen erhält man:

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = dZ,$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung nur $z$ enthält, so muss diess auch mit der linken Seite der Fall sein. Wenn man daher aus dieser und der vorhergehenden Gleichung eine der beiden Veränderlichen $x$ oder $y$ eliminirt, so muss die andere von selbst hinausfallen, wodurch eine Gleichung zwischen $z$ und $Z$ zum Vorschein kommt, deren Integration den Werth von $Z$ in Funktion von $z$ darbietet. Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung $\varphi(x, y, z) = Z$ ergibt sich endlich das Integral der Gl. (1).

Beisp. 1) Die gegebene Gleichung sei:

$$ydx - xdy + y(ayz^2 - ax - 2yz)dz = 0,$$

welche der Bedingungsgleichung (2) Genüge leistet. Nehmen wir $z$ constant, also $dz = 0$, so bleibt die Gleichung: $ydx - xdy = 0$ zu integriren, deren Integral

$$\frac{x}{y} = Z$$

ist, wo nun die Integrationsconstante $Z$ noch als Funktion von $z$ zu betrachten ist. Durch Differenziation dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = dZ,$$

oder, mit Rücksicht auf die gegebene Gleichung:

$$-\left(az^2 - a\frac{x}{y} - 2z\right)dz = dZ,$$

somit, da $\frac{x}{y} = Z$:

$$\frac{dZ}{dz} - aZ + az^2 - 2z = 0;$$

als Integral dieser linearen Differenzialgleichung findet man [§. 505]: $Z = Ce^{az} + z^2$, somit ist das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$\frac{x}{y} = Ce^{az} + z^2.$$

2) Die gegebene Gleichung sei:

$$z(y^2 + z^2)\,dx + z(x^2 + z^2)\,dy - 2xy(x + y)\,dz = 0;$$

die Bedingungsgleichung (2) ist erfüllt. Nehmen wir $z$ als constant, so haben wir die Gleichung:

$$z(y^2 + z^2)\,dx + z(x^2 + z^2)\,dy = 0, \text{ oder } \frac{zdx}{x^2 + z^2} + \frac{zdy}{y^2 + z^2} = 0,$$

deren Integral:

$$\text{arc tg}\,\frac{x}{z} + \text{arc tg}\,\frac{y}{z} = Z$$

ist. Durch Addition der beiden Bögen bringen wir diese Gl. auf die Form:

$$\text{arc tg}\,\frac{xz + yz}{z^2 - xy} = Z, \text{ oder } \frac{x + y}{z^2 - xy} = \frac{\text{tg}\,Z}{z},$$

und können nun, wegen der Unbestimmtheit der Funktion $Z$, statt $\frac{\text{tg}\,Z}{z}$ wieder $Z$ schreiben, wodurch dieses Integral die Form:

$$\frac{x + y}{z^2 - xy} = Z$$

annimmt. Durch Differenziation dieser Gleichung ergibt sich:

$$\frac{(z^2 - xy)(dx + dy) - (x + y)(2zdz - ydx - xdy)}{(z^2 - xy)^2} = dZ,$$

oder:

$$\frac{(y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy - 2z(x + y)\,dz}{(z^2 - xy)^2} = dZ,$$

d. i. mit Rücksicht auf die gegebene Gleichung:

$$\frac{2xy\,(x + y)}{z}\,dz - 2z(x + y)\,dz = (z^2 - xy)^2\,dZ,$$

oder:

$$-2(x + y)\,dz = z(z^2 - xy)\,dZ.$$

Aber $(x + y) = Z(z^2 - xy)$, somit $-2Zdz = zdZ$, woraus

$$Z = \frac{1}{Cz^2}$$

folgt. Das gesuchte Integral ist daher:

$$\frac{z^2 - xy}{x + y} = Cz^2.$$

## VI. Von den partiellen Differenzialgleichungen.

**535.** Ist $z$ eine Funktion mehrerer von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x$, $y$, $t$, ..... so kann die Funktion $z$ in Bezug auf jede dieser Grössen differenzirt werden, wodurch man zu den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ..... gelangt. Das Gesetz der Abhängigkeit der Funktion $z$ von den Grössen $x$, $y$, $t$, ..... kann nun durch eine Gleichung zwischen $z, x, y, t$, ..... und den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ..... gegeben sein; eine solche Gleichung wird eine partielle Differenzialgleichung genannt. Dieselbe integriren heisst, eine endliche Gleichung zwischen den Veränderlichen $z$, $x$, $y$, $t$, ..... finden, welche das Gesetz der Abhängigkeit eben so allgemein ausdrückt, wie die gegebene Differenzialgleichung. Da diese eine gewisse Anzahl der Differenzialquotienten völlig unbestimmt lässt, so muss auch ihr Integral das Gepräge der Unbestimmtheit an sich tragen.

Soll von partiellen Differenzialien einer Grösse $z$ überhaupt die Rede sein, so muss diese eine Funktion von mindestens zwei unabhängig Veränderlichen sein; eine partielle Differenzialgleichung wird daher wenigstens drei Veränderliche enthalten müssen. Sie ist von der ersten Ordnung, wenn sie nur partielle Differenzialquotienten 1ter Ordnung enthält.

Es sei

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0 \qquad (1)$$

eine partielle Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen den drei Veränderlichen $x$, $y$, $z$. Sieht man letztere als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raume an, so drückt die Gleichung (1) eine Eigenschaft irgend einer krummen Fläche aus, deren endliche Gleichung eben das Integral der Gl. (1) ist, und welche auch mittelst der Differenzialgleichung (1) construirt werden kann. Diese Gleichung liefert nämlich den Werth irgend einer der fünf Grössen $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, sobald die Werthe der vier anderen bekannt sind. Denkt man sich nun in der Ebene der $xz$ irgend eine willkürliche Curve $z = \varphi(x)$ verzeichnet, welche als die Durchschnittslinie der durch Gl. (1) ausgedrückten Fläche mit der Ebene der $xz$ genommen wird, so sind für jeden Punkt dieser Curve die Werthe von $x$, $y$, $z$, $\frac{dz}{dx}$ bekannt, und

der zugehörige Werth von $\frac{dz}{dy}$ ergibt sich sofort aus der Gl. (1); hiedurch ist nun die Lage der Berührungsebene der Fläche, deren Gleichung bekanntlich:

$$(\xi - x)\frac{dz}{dx} + (\eta - y)\frac{dz}{dy} - (\zeta - z) = 0$$

ist, für jeden Punkt der besagten Curve bestimmt, folglich auch die Lage der Geraden, in welchen diese tangirenden Ebenen eine in dem Abstande $\varDelta y$ parallel zur $xz$-Ebene gelegte Ebene schneiden, und somit auch die einhüllende Curve, welche von der stetigen Folge dieser Geraden gebildet wird. Lässt man nun $\varDelta y$ unendlich klein werden, so kommt diese einhüllende Curve auf die krumme Fläche zu liegen, und ist als ein zweiter, dem Schnitte $z = \varphi(x)$ unendlich nahe liegender Parallelschnitt zu betrachten, dessen man sich nun wieder bedienen kann, um einen dritten Parallelschnitt zu erhalten, u. s. w. Die Fläche ist auf diese Art durch die stetige Folge dieser Schnitte vollkommen bestimmt, sobald ein erster Schnitt, $z = \varphi(x)$ angenommen ist, welcher jedoch gänzlich willkürlich bleibt. Die Gl. (1) gehört daher einer unendlichen Menge von verschiedenen Flächen an, welche sämmtlich eine gemeinsame durch diese Gleichung ausgesprochene Eigenschaft besitzen, die sich, wie aus Obigem erhellt, auf die Lage der Berührungsebenen oder Normalen bezieht; die specielle Gestalt jeder einzelnen Fläche hängt von jener der willkürlichen Curve ab, durch welche man die Fläche gehen lässt. Hieraus folgt, dass das Integral der Gl. (1), wenn es dieselbe Allgemeinheit besitzen soll, wie die Gl. (1), eine willkürliche Funktion enthalten muss. Von der Richtigkeit dieses Schlusses überzeugt man sich leicht durch die Bemerkung, dass aus einer endlichen Gleichung, welche eine willkürliche Funktion der Veränderlichen $x, y, z$ enthält, jederzeit eine partielle Differenzialgleichung abgeleitet werden kann, aus welcher diese Funktion verschwunden ist. Beispiele hiezu findet man in §. 331.

Eine partielle Differenzialgleichung kann jedoch auch durch Elimination von Constanten aus der primitiven Gleichung und ihren partiellen Differenzialquotienten hervorgehen. In der That, ist

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \tag{2}$$

eine endliche Gleichung, in welcher $a, b$ zwei constante Grössen bedeuten, so erhält man durch partielle Differenziation derselben nach $x$ und $y$:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \tag{3}$$

und man gelangt durch Elimination von $a$ und $b$ aus den drei Gleichungen (2) und (3) zur partiellen Differenzialgleichung:

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0, \tag{4}$$

aus welcher die willkürlichen Constanten verschwunden sind. Hieraus schliesst man zunächst, dass umgekehrt, wenn die Gl. (4) gegeben ist, das Integral derselben zwei willkürliche Constanten enthalten müsse. Ein solches Integral ist jedoch, weil einer willkürlichen Funktion ermangelnd, nicht die allgemeinste Auflösung der vorgelegten Differenzialgleichung, kann aber leicht in letztere umgewandelt werden.

Differenziren wir nämlich die Gl. (2), indem wir $a$ als veränderlich und $b$ als Funktion von $a$ betrachten, so erhalten wir:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dy} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen werden offenbar mit den obigen (3) identisch, wenn wir

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0 \tag{5}$$

setzen, unter welcher Voraussetzung dann die beiden letzten Gleichungen, durch Elimination von $a$ und $b$ mit (2) verbunden, zu derselben partiellen Differenzialgleichung führen müssen.

Hat man daher eine endliche Gleichung $F(x, y, z, a, b) = 0$ mit zwei willkürlichen Constanten $a$, $b$ gefunden, welche einer vorgelegten partiellen Differenzialgleichung (4) Genüge leistet, so wird man $b = \varphi(a)$ setzen, unter $\varphi$ eine willkürliche Funktion verstanden; das System der beiden Gleichungen:

$$F(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0, \quad \frac{dF}{da} + \frac{dF}{d\varphi}\varphi'(a) = 0,$$

oder einfacher:

$$F(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0, \quad \frac{dF}{da} = 0$$

stellt sodann das allgemeine mit einer willkürlichen Funktion versehene Integral der gegebenen Differenzialgleichung dar.

**536.** Die Integration partieller Differenzialgleichungen 1ter Ordnung lässt sich immer auf die Integration gewöhnlicher Differenzialgleichungen zurückführen.

Die allgemeinste Form einer partiellen Differenzialgleichung 1ter Ordnung zwischen drei Veränderlichen ist:

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R, \tag{1}$$

wo $P$, $Q$, $R$ beliebige Funktionen von $x$, $y$, $z$ bedeuten. Schaffen wir aus derselben mittelst der Gleichung:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

einen der beiden Differenzialquotienten, etwa $\frac{dz}{dy}$, weg, so erhält sie die Gestalt:

$$(Pdy - Qdx)\frac{dz}{dx} + (Qdz - Rdy) = 0. \tag{2}$$

In Folge der Unbestimmtheit der Grösse $\frac{dz}{dx}$ kann diese Gleichung nur bestehen, wenn gleichzeitig $Pdy - Qdx = 0$, $Qdz - Rdy = 0$ ist, aus welchen Gleichungen noch überdiess durch Elimination von $dy$: $Pdz - Rdx = 0$ folgt. Diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Pdy - Qdx &= 0, \\ Pdz - Rdx &= 0, \\ Qdz - Rdy &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

von welchen jede eine Folge der beiden anderen ist, bestehen daher immer gleichzeitig mit Gl. (1); sie enthalten keine partiellen Differenzialquotienten, unterliegen also den bisher gelehrten Integrationsmethoden.

Gesetzt nun, man hätte auf irgend einem Wege die Integrale zweier dieser Gleichungen oder irgend zweier Combinationen derselben gefunden, und seien diese

$$M = C, \quad N = C', \tag{4}$$

wo $M$ und $N$ Funktionen von $x$, $y$, $z$, $C$ und $C'$ aber willkürliche Constanten bedeuten, so könnte man aus denselben $y$ und $z$ als Funktionen der Veränderlichen $x$ und der beiden willkürlichen Constanten $C$, $C'$ bestimmen, etwa $y = f(x, C, C')$, $z = f_1(x, C, C')$, welche Funktionen der Gl. (2) und daher auch der vorgelegten Gl. (1) Genüge leisten. Hiemit haben wir nun allerdings eine Auflösung der Gl. (2) oder (1) kennen gelernt, allein es ist diess nur eine einzelne der unendlich vielen Auflösungen dieser Gleichungen, weil es in Folge der Unbestimmtheit der Grösse $\frac{dz}{dx}$, für welche jede beliebige Funktion von $x$, $y$, $z$ gewählt werden kann, möglich ist, die Gl. (2) zu erfüllen,

auch ohne die Glgn. (3) anzunehmen. Man kann sich jedoch dieser Auflösung bedienen, um auf folgende Art zum allgemeinen Integral zu gelangen.

Es sei
$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$
die allgemeine Integralgleichung von (1), so muss dieselbe, eben so wie die aus ihr hervorgehende Differenzialgleichung:
$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0 \tag{6}$$
nothwendig durch alle Relationen zwischen $x$, $y$, $z$ erfüllt werden, welche der Gl. (2) Genüge leisten, also auch durch die aus den Gleichungen (4) oder (3) entspringenden Relationen: $y = f(x, C, C')$, $z = f_1(x, C, C')$. Durch die Substitution dieser Werthe erhält nun (6) offenbar die Form $Vdx = 0$, welche Gleichung für jeden Werth der unabhängig Veränderlichen $x$ bestehen muss. Allein zu demselben Ergebnisse muss auch die Differenziation der Gl. (5) führen, wenn man in derselben vor dem Differenziren $y$ und $z$ durch $x$ ausdrückt, woraus folgt, dass durch die erwähnten Substitutionen auch die Veränderliche $x$ aus der Funklion $F(x, y, z)$ verschwunden sein muss, und diese letztere somit nur mehr als eine Funktion der Constanten $C$ und $C'$ erscheint, welche wir durch $\psi(C, C')$ bezeichnen wollen. Es kann aber durch Substitution der aus den Glgn. (4) folgenden Werthe von $y$ und $z$ die Funktion $F(x, y, z)$ nicht in $\psi(C, C')$ übergehen, ohne dass $F(x, y, z) = \psi(M, N)$ ist. Das Integral der Gl. (1) hat daher die Form: $\psi(M, N) = 0$, wo die Beschaffenheit der Funktion $\psi$ völlig unbestimmt bleibt. Lässt man daher $\psi$ eine willkürliche Funktion bedeuten, so ist
$$\psi(M, N) = 0$$
das allgemeine Integral der partiellen Differenzialgleichung (1), welchem man auch die Form:
$$M = \varphi(N)$$
geben kann, wo $\varphi$ wieder das Zeichen einer willkürlichen Funktion ist.

Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Beisp. 1) Die gegebene partielle Differenzialgleichung sei:
$$aX \frac{dz}{dx} + bY \frac{dz}{dy} = Z, \tag{m}$$
wo $X$, $Y$, $Z$ Funktionen beziehungsweise von $x$, $y$, $z$ bedeuten sollen. Hiemit werden die zwei letzten der Glgn. (3) im vor. §.:
$$aXdz - Zdx = 0, \quad bYdz - Zdy = 0,$$

durch deren Integration man:

$$\int\frac{dx}{X}-a\int\frac{dz}{Z}=C,\quad \int\frac{dy}{Y}-b\int\frac{dz}{Z}=C'$$

erhält. Das allgemeine Integral von $(m)$ ist daher:

$$\int\frac{dx}{X}-a\int\frac{dz}{Z}=\varphi\left\{\int\frac{dy}{Y}-b\int\frac{dz}{Z}\right\}.$$

Lässt man z. B. $X=Y=Z=1$ sein, so wird $(m)$ die Differenzialgleichung der cylindrischen Flächen, und das Integral:

$$x-az=\varphi(y-bz).$$

Setzt man aber $a=b=1$, $X=x-\alpha$, $Y=y-\beta$, $Z=z-\gamma$, so ist $(m)$ die Differenzialgleichung der conischen Flächen, und das Integral wird:

$$l\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=\varphi\left\{l\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right\},$$

oder:

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=f\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right),$$

die endliche Gleichung der conischen Flächen [vergl. §. 406].

2) Für die partielle Differenzialgleichung:

$$y\frac{dz}{dx}+x\frac{dz}{dy}=z,$$

sind die Hülfsgleichungen (3)

$$ydy-xdx=0,\quad ydz-zdx=0,\quad xdz-zdy=0;$$

aus der ersten folgt sofort $y^2-x^2=C$; die beiden letzten geben addirt:

$$z(dx+dy)-(x+y)\,dz=0,$$

für deren Integral man auf dem in §. 534 betretenen Wege $\frac{z}{x+y}=C'$ findet; das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ist daher:

$$z=(x+y)\cdot\varphi(y^2-x^2).$$

3) Für die Differenzialgleichung:

$$(x+y)\frac{dz}{dx}+(y-x)\frac{dz}{dy}=z$$

werden die Hülfsgleichungen (3):

$$(x+y)\,dy-(y-x)\,dx=0,$$
$$(x+y)\,dz-zdx=0,$$
$$(y-x)\,dz-zdy=0;$$

die erste dieser Gleichungen ist eine homogene Differenzialgleichung zwischen den beiden Veränderlichen $x$, $y$, und gibt, nach §. 506 integrirt:

$$l\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=C;$$

multiplicirt man ferner die zweite Gleichung mit $y$, die dritte mit $x$, so erhält man durch Subtraktion derselben:

$$(y^2+z^2)\,dz+xzdy-yz\,dx=0,$$

welche Gleichung integrabel ist, und nach dem im §. 534 gelehrten Verfahren das Integral

$$ze^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}=C'$$

darbietet. Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist daher:

$$z=e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\,\varphi\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+l\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

**537.** Befinden sich unter den Glgn. (3) nicht zwei solche, welche nur je zwei Veränderliche und deren Differenzialien enthalten, und ist es auch nicht möglich, aus diesen drei Gleichungen durch geeignete Verbindung derselben zwei so beschaffene Gleichungen, oder auch integrable totale Differenzialgleichungen mit drei Veränderlichen abzuleiten, so muss man eine dieser Gleichungen differenziren, wodurch man immer zu einer Differenzialgleichung von nur zwei Veränderlichen, jedoch von $2^{\text{ter}}$ Ordnung gelangen kann. Betrachtet man nämlich irgend zwei der Glgn. (3), z. B.:

$$Pdz-Rdx=0,\quad Qdz-Rdy=0,$$

so kann in denselben, da sie nothwendig zusammen bestehen, nur eine der drei Veränderlichen als unabhängig angesehen werden. Sei diese $z$, so enthalten diese Gleichungen, die man auch in der Form

$$P-R\frac{dx}{dz}=0,\quad Q-R\frac{dy}{dz}=0,$$

schreiben kann, nebst den Veränderlichen $x$, $y$, $z$ noch die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$; durch Differenziation der ersteren gewinnt man eine neue Gleichung, welche ausser den eben genannten noch den Differenzialquotienten $\frac{d^2x}{dz^2}$ enthält, und die Elimination von $y$ und $\frac{dy}{dz}$ aus diesen drei Gleichungen bietet sofort eine Gleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung in $x$ und $z$ dar. Diese Gleichung hat nothwendig zwei erste Integrale von der Form:

$$\psi\left(x, z, \frac{dx}{dz}\right) = C, \quad \psi_1\left(x, z, \frac{dx}{dz}\right) = C',$$

in welchen man nur noch den Werth des Differenzialquotienten $\frac{dx}{dz} = \frac{P}{R}$ einzusetzen hat, um wieder die Glgn. (4) des vor. §. zu haben.

Es sei z. B. die partielle Differenzialgleichung:

$$yz^2 \frac{dz}{dx} + (a^2x - y) \frac{dz}{dy} = z$$

gegeben, welcher die Hülfsgleichungen:

$$yz^2dy - (a^2x - y)\, dx = 0,$$

$$yz^2dz - dx = 0, \quad (a^2x - y)\, dz - zdy = 0$$

entsprechen; benützen wir die zwei letzen, als die einfacheren, so haben wir:

$$\frac{dx}{dz} = yz \text{ und } a^2x = y + z\frac{dy}{dz},$$

und durch Differenziation der ersteren dieser Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = y + z\frac{dy}{dz},$$

somit:

$$\frac{d^2x}{dz^2} - a^2x = 0. \qquad (m)$$

Das allgemeine Integral dieser Differenzialgleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung ist:

$$x = Ae^{az} + Be^{-az},$$

wo $A$ und $B$ willkürliche Constanten sind. Eliminirt man aus dieser Integralgleichung und ihrem ersten Differenzial:

$$\frac{dx}{dz} = Aae^{az} - Bae^{-az}$$

successive $A$ und $B$, so erhält man:

$$ax + \frac{dx}{dz} = 2Aae^{az}, \quad ax - \frac{dx}{dz} = 2Bae^{-az},$$

oder:

$$\left(ax + \frac{dx}{dz}\right) e^{-az} = C, \quad \left(ax - \frac{dx}{dz}\right) e^{az} = C'$$

als $1^{\text{te}}$ Integrale der Gl. $(m)$. Setzt man endlich in diesen $\frac{dx}{dz} = yz$, so hat man:

$$(ax + yz)\, e^{-az} = C, \quad (ax - yz)\, e^{az} = C',$$

somit:

$$(ax + yz)\, e^{-az} = \varphi\{(ax - yz)\, e^{az}\}$$

als allgemeines Integral der vorgelegten Gleichung.

**538.** Das zur Integration einer partiellen Differenzialgleichung $1^{ten}$ Grades mit drei Veränderlichen vorgetragene Verfahren bleibt auch in jenen Fällen anwendbar, wenn die Anzahl der Veränderlichen grösser ist. Es sei z. B. die Gleichung:

$$P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} = T \tag{1}$$

gegeben, wo $u$ als Funktion von $x$, $y$, $z$ betrachtet wird und $P$, $Q$, $R$, $T$ im Allgemeinen Funktionen von $x$, $y$, $z$, $u$ vorstellen, so kann man aus derselben mittelst der Gleichung:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$$

einen der Differenzialquotienten z. B. $\frac{du}{dz}$ wegschaffen, wodurch man zur Gleichung:

$$(Pdz - Rdx)\frac{du}{dx} + (Qdz - Rdy)\frac{du}{dy} + (Rdu - Tdz) = 0$$

gelangt, welche in Folge der Unbestimmtheit von $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ in folgende drei Gleichungen zerfällt:

$$Pdz - Rdx = 0,\quad Qdz - Rdy = 0,\quad Rdu - Tdz = 0, \tag{2}$$

aus welchen noch überdiess die drei Gleichungen:

$$Pdy - Qdx = 0,\quad Qdu - Tdy = 0,\quad Pdu - Tdx = 0 \tag{3}$$

folgen. Man kann diese sechs Gleichungen auch in der abgekürzten Form:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{T} \tag{4}$$

schreiben. Es seien nun:

$$L = C,\quad M = C',\quad N = C'',$$

die Integrale dreier dieser Gleichungen oder irgend welcher Verbindungen derselben, so gelangt man durch dieselben Schlüsse wie im vor. §. zu dem Resultate, dass

$$\psi(L, M, N) = 0,\quad \text{oder}\quad L = \varphi(M, N)$$

das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differenzialgleichung ist, wo $\psi$ oder $\varphi$ willkürliche Funktionen bedeuten.

**539.** Enthält eine Gleichung nur drei veränderliche Grössen, aber höhere Potenzen der partiellen Differenzialquotienten der ersten Ordnung, so kann sie auf eine Gleichung mit vier Veränderlichen reducirt werden, in welcher die partiellen Differenzialquotienten nur in der ersten Potenz erscheinen. Es sei

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

die gegebene partielle Differenzialgleichung. Differenzirt man dieselbe partiell in Bezug auf $x$, $y$ und $z$, indem man die Differenzialquotienten $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$ als Funktionen dieser Variablen betrachtet, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq}\frac{dq}{dx} = 0, \\ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dy} + \frac{df}{dq}\frac{dq}{dy} = 0, \\ \frac{df}{dz} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dz} + \frac{df}{dq}\frac{dq}{dz} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

zu welchen sich noch die Gleichung:

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dz}p - \frac{dp}{dz}q = 0 \qquad (3)$$

gesellt, welche die Bedingung ausdrückt, dass $z$ eine Funktion der beiden unabhängig Veränderlichen $x$ und $y$ sein soll, und aus der Entwickelung der bekannnten Bedingungsgleichung $\frac{d}{dx} . q = \frac{d}{dy} . p$ hervorgeht, wenn man nur im Auge behält, dass $p$ und $q$ als Funktionen aller drei Veränderlichen $x$, $y$, $z$ betrachtet werden.

Man kann nun mit Hülfe zweier der Glgn. (2) und der Gl. (1) nach Belieben entweder $p$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, oder $q$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz}$ wegschaffen, wodurch man zu einer partiellen Differenzialgleichung der 1ten Ordnung zwischen den vier Veränderlichen $x$, $y$, $z$, $q$, oder beziehungsweise $x$, $y$, $z$, $p$ gelangt, welche die Differenzialquotienten nur mehr in erster Potenz enthält. Integrirt man diese Gleichung nach dem im vorigen §. gelehrten Verfahren, so erhält man eine endliche Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$ und $p$, mittelst welcher man $p$, und mit Zuhülfenahme der Gl. (1) auch $q$ durch $x$, $y$, $z$ ausdrücken kann, und es ist, nach Substitution der so erhaltenen Werthe dieser Grössen in die Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

die Auflösung der Aufgabe nur noch von der Integration dieser letzteren totalen Differenzialgleichung abhängig gemacht.

Setzen wir, um diesen Gedanken weiter auszuführen, die aus der 1ten und 3ten der Glgn. (2) folgenden Werthe von $\frac{dq}{dx}$ und $\frac{dq}{dz}$ in die Gl. (3), so erhalten wir:

$$\frac{df}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{df}{dq}\frac{dp}{dy}+\left(p\frac{df}{dp}+q\frac{df}{dq}\right)\frac{dp}{dz}=-\frac{df}{dx}-p\frac{df}{dz}, \tag{4}$$

aus welcher Gleichung noch mittelst der Gl. (1) die Grösse $q$ wegzuschaffen ist. Da diese Operation immer ausführbar ist, so können wir $q$ als Funktion von $x$, $y$, $z$, $p$ betrachten.

Die Integration der Gl. (4) hängt nun, dem in §. 538 Gesagten zufolge, von der Integration dreier der sechs Glgn. (2) und (3), [§. 538] ab; wählen wir hiefür die folgenden:

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pdz - Rdx = 0, \quad Pdu - Tdx = 0,$$

und setzen, wie es der vorliegende Fall erfordert:

$$u = p, \quad P = \frac{df}{dp}, \quad Q = \frac{df}{dq},$$

$$R = p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}, \quad T = -\left(\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz}\right),$$

so ergeben sich nachstehende Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dp}dy - \frac{df}{dq}dx = 0,\\ &\frac{df}{dp}dz - \left[p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right]dx = 0,\\ &\frac{df}{dp}dp + \left[\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz}\right]dx = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

welche, wenn die Integration ausführbar ist, im Allgemeinen drei Integralgleichungen:

$$L = a, \quad M = b, \quad N = c \tag{6}$$

darbieten, in welchen $L$, $M$, $N$ Funktionen von $x$, $y$, $z$ und $p$; $a$, $b$, $c$ aber willkürliche Constanten bedeuten. Man hat dann, wenn $\varphi$ eine willkürliche Funktion bezeichnet:

$$L = \varphi(M, N) \tag{7}$$

als allgemeines Integral der Gl. (4). Die Gleichungen (7) und (1) geben nun, sobald über die Form der willkürlichen Funktion $\varphi$ verfügt ist, die Werthe von $p$ und $q$ in Funktion von $x$, $y$, $z$, nach deren Substitution in die Gleichung: $dz = pdx + qdy$, diese weiter behandelt werden kann.

Kürzer gelangt man noch auf folgendem Wege zum Ziele, wodurch zugleich die Unzukömmlichkeit vermieden wird, eine willkürliche Funktion zweier Grössen in die Rechnung einzuführen, wie diess durch Gl. (7) geschieht, während doch das Integral einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit drei Veränderlichen eine willkürliche Funktion von nur einer Grösse erfordert [§. 536].

Hat man nämlich aus den Glgn. (5) irgend eines der particulären Integrale (6), etwa $L = a$ gefunden, so substituire man den daraus folgenden Werth von $p$, welchen man in der Form: $p = \psi(x, y, z, a)$ erhält, sammt dem damit in Verbindung stehenden, aus der Gl. (1) folgenden Werth von $q$ in die Gleichung $dz = pdx + qdy$; ist dann $F(x, y, z, a, b) = 0$ das allgemeine Integral dieser totalen Differenzialgleichung, wo $b$ die durch die Integration derselben eingeführte willkürliche Constante bedeutet, und setzt man $b = \varphi(a)$, unter $\varphi$ eine willkürliche Funktion verstanden, so hat man, dem am Schlusse des §. 535 Gesagten zufolge, die beiden Gleichungen:

$$F(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0, \quad \frac{dF}{da} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{da} = 0,$$

welche mit einander verbunden, das allgemeine Integral der vorgelegten Differenzialgleichung darstellen.

Betrachten wir, um diese Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, die partielle Differenzialgleichung:

$$z^2(1 + p^2 + q^2) - r^2 = 0, \tag{m}$$

welche bekanntlich [§. 408, I] der einhüllenden Fläche einer Folge von Kugeln von gleichem Halbmesser $r$ angehört, deren Mittelpunkte auf irgend einer in der Ebene der $x, y$ verzeichneten Curve liegen. In diesem Falle ist:

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dz} = 2z(1 + p^2 + q^2), \quad \frac{df}{dp} = 2z^2 p, \quad \frac{df}{dq} = 2z^2 q,$$

mit welchen Werthen die Glgn. (5) folgende Gestalt annehmen:

$$pdy - qdx = 0,$$
$$pdz - (p^2 + q^2)\, dx = 0,$$
$$zdp + (1 + p^2 + q^2)\, dx = 0.$$

Die beiden letzten verwandeln sich, mit Rücksicht auf die vorgelegte Differenzialgleichung in folgende:

$$pz^2 dz - (r^2 - z^2)\, dx = 0, \quad z^3 dp + r^2 dx = 0,$$

aus welchen man durch Elimination von $dx$ die Gleichung

$$\frac{dp}{p} = -\frac{r^2 dz}{z(r^2 - z^2)}$$

zieht, deren Integral:

$$p = \frac{a\sqrt{r^2 - z^2}}{z}$$

ist, wo $a$ eine willkürliche Constante bedeutet. Hiemit folgt aus $(m)$:

$$q = \frac{\sqrt{1-a^2}\,.\,\sqrt{r^2-z^2}}{z},$$

und man erhält durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung $dz = pdx + qdy$:

$$adx + \sqrt{1-a^2}\,dy - \frac{zdz}{\sqrt{r^2-z^2}} = 0,$$

woraus durch Integration:

$$ax + \sqrt{1-a^2}\,.\,y + \sqrt{r^2-z^2} = b$$

folgt, wenn mit $b$ die willkürliche Constante bezeichnet wird. Setzt man nun $b = \varphi(a)$, so hat man in dem Systeme der Gleichungen:

$$ax + y\sqrt{1-a^2} + \sqrt{r^2-z^2} = \varphi(a), \quad x - \frac{ay}{\sqrt{1-a^2}} = \varphi'(a)$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Differenzialgleichung. Sobald man über die Form der willkürlichen Funktion $\varphi$ verfügt hat, kann die Grösse $a$ aus beiden Gleichungen eliminirt werden, wodurch man zur Gleichung der eingehüllten Fläche gelangt. Setzt man z. B.: $\varphi(a) = \alpha a + \beta\sqrt{1-a^2}$, wo $\alpha$ und $\beta$ zwei neue willkürliche Constanten bedeuten, so findet man auf diesem Wege nach leichter Rechnung:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = r^2,$$

die Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene der $xy$ liegt. Eine andere Annahme über die Form der Funktion $\varphi$ führt natürlich auch zu einer anderen eingehüllten Fläche, wie es in der Natur der Sache liegt, da eine und dieselbe einhüllende Fläche durch unendlich viele Arten eingehüllter Flächen erzeugt werden kann.

## Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten.

**540.** Partielle Differenzialgleichungen heissen lineare oder vom ersten Grade, wenn sie die Differenzialquotienten der verschiedenen Ordnungen weder unter einander, noch in die Funktionsgrösse multiplicirt enthalten. Sie besitzen, vorausgesetzt, dass in denselben kein von der Funktionsgrösse oder den Differenzialquotienten freies Glied erscheint, die Eigenschaft, dass die Summe einer beliebigen Anzahl particulärer Integrale ihnen Genüge leistet, wovon man sich leicht in ähnlicher Weise, wie bei den gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungen [§. 516] überzeugt. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Integration von Gleichungen mit constanten Coefficienten,

welche besondere Aufmerksamkeit verdienen, weil viele der wichtigsten Probleme der Mechanik und mathematischen Physik auf solche Gleichungen führen.

Einer jeden linearen partiellen Differenzialgleichung mit constanten Coefficienten, von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, und zwischen einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Grössen: $z$, $x$, $y$, $t$, ...., kann, wenn $z$ die abhängig Veränderliche bedeutet, durch den Werth $z = Ce^{\alpha x + \beta y + \gamma t + \ldots}$ Genüge geleistet werden, wo $C$ eine willkürliche Constante, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... aber noch unbestimmte Grössen bezeichnen; substituirt man nämlich diesen Werth in die Differenzialgleichung, so verschwindet sowohl die Exponentielle als auch die Constante $C$, und es bleibt eine algebraische Gleichung vom $n^{\text{ten}}$ Grade zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$, übrig, welche uns $n$ Werthe einer dieser Grössen, in Funktion der übrigen, welche unbestimmt bleiben, darbietet. Betrachten wir, um diess näher zu erörtern, eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen $x$, $y$, $z$, und bezeichnen wir mit $\beta_1 = \varphi_1(\alpha)$ einen von den aus der Gl. $f(\alpha, \beta) = 0$ folgenden Werth von $\beta$, so genügt der Werth $z = Ce^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)}$ der vorgelegten Gleichung; aber in Folge ihrer linearen Form genügt ihr auch die Summe:

$$z = \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)}$$

der unendlich vielen Werthe, welche aus obigem Ausdrucke durch beliebige Veränderungen von $\alpha$ und $C$ hervorgehen. Solcher particulärer Integrale erhält man aber $n$ an der Zahl, entsprechend den $n$ Werthen $\beta_1 = \varphi_1(\alpha)$, $\beta_2 = \varphi_2(\alpha)$, .... $\beta_n = \varphi_n(\alpha)$, welche aus der Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ sich ergeben; die Summe dieser particulären Integrale stellt sodann das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung dar.

In jedem dieser particulären Integrale können die Werthe der Grössen $C$ und $\alpha$ auf ganz beliebige Weise von einem Gliede zum andern sich verändern, und die Anzahl der Glieder bleibt ganz willkürlich. Lässt man diese unendlich gross sein und ertheilt dem $C$ endliche Werthe, so hat man das particuläre Integral in Form einer unendlichen Reihe; lässt man aber $C$ unendlich kleine Werthe durchlaufen, von der Form $F(\alpha)\,d\alpha$, wo $F$ eine willkürliche Funktion bedeutet, so bietet sich dasselbe in Form eines Integrals:

$$z = \int F(\alpha)\, e^{\alpha x + y\varphi(\alpha)}\, d\alpha$$

dar, welches eine willkürliche Funktion $F(\alpha)$ einschliesst.

Machen wir, zur Erläuterung des Gesagten, eine Anwendung auf die Differenzialgleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + b\frac{d^2z}{dy^2} + c\frac{d^2z}{dx\,dy} + a_1\frac{dz}{dx} + b_1\frac{dz}{dy} + c_1 z = 0,$$

so verwandelt sich dieselbe mittelst der Substitution $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$ in:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\alpha\beta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$

aus welcher für $\beta$ zwei Werthe: $\beta_1 = \varphi_1(\alpha)$, $\beta_2 = \varphi_2(\alpha)$ folgen. Der vorgelegten Gleichung genügen somit die Werthe:

$$z = Ce^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)}, \quad z = Ce^{\alpha x + y\varphi_2(\alpha)},$$

in Folge der linearen Form aber auch die Ausdrücke:

$$z = \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)}, \quad z = \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi_2(\alpha)},$$

und man hat somit als allgemeines Integral:

$$z = \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)} + \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi_2(\alpha)}.$$

Die im zweiten Theile vorkommenden Summenausdrücke lassen sich leicht durch willkürliche Funktionen ausdrücken, wenn die Werthe von $\beta$ in Bezug auf $\alpha$ linear, d. i. von der Form $\beta = a\alpha + b$ sind.

Es sei z. B. die Gleichung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - a^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

gegeben, so liefert die Substitution $z = e^{\alpha x + \beta y}$ die Hülfsgleichung: $\alpha^2 = a^2\beta^2$, aus welcher $\alpha = \pm\, a\beta$ folgt. Hiemit wird $z = e^{\beta(y \pm ax)}$, und man hat somit als allgemeines Integral:

$$z = \Sigma Ce^{\beta(y + ax)} + \Sigma Ce^{\beta(y - ax)}.$$

Wir können nun die Grössen $C$ und $\beta$ eine Reihe ganz beliebiger Werthe durchlaufen lassen; unter dieser Voraussetzung stellt aber die Summe $\Sigma Cu^\beta$ jede beliebige Funktion von $u$ vor; dasselbe gilt also auch von obigen Summen, welche demnach ganz willkürliche Funktionen von $e^{\beta(y + ax)}$ und $e^{\beta(y - ax)}$ oder einfacher von $(y + ax)$ und $(y - ax)$ darstellen; das allgemeine Integral bekommt hiemit die Gestalt:

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax),$$

und enthält zwei willkürliche Funktionen, wie es die Ordnungszahl der vorgelegten Gleichung erfordert.

Die Form der willkürlichen Funktionen bestimmt sich mit Hülfe der Bedingungen, welche in jedem einzelnen Falle aus der Natur der Aufgabe hervorgehen. Gesetzt z. B., die Funktion $z$ und ihr Differenzialquotient $\frac{dz}{dx}$ sollen für $x = 0$ zwei gegebenen Funktionen von $y$ gleich werden, etwa:

$$z = f(y), \quad \frac{dz}{dx} = f_1(y),$$

so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\varphi(y) + \psi(y) = f(y); \quad \varphi'(y) - \psi'(y) = \frac{1}{a} f_1(y).$$

Integrirt man die zweite Gleichung, und setzt $\int f_1(y)\,dy = F(y)$, so geht dieselbe über in:

$$\varphi(y) - \psi(y) = \frac{1}{a} F(y) + C,$$

wo $C$ eine willkürliche Constante. Diese Gleichung mit der ersten Bedingungsgleichung verbunden, gibt:

$$2\varphi(y) = f(y) + \frac{1}{a} F(y) + C,$$

$$2\psi(y) = f(y) - \frac{1}{a} F(y) - C,$$

und man hat daher als allgemeines, den gegebenen Bedingungen Genüge leistendes Integral:

$$z = \frac{f(y+ax) + f(y-ax)}{2} + \frac{F(y+ax) - F(y-ax)}{2a}.$$

Die in den folgenden §§. behandelten Beispiele mögen dazu dienen, um einige der vorzüglichsten Hülfsmittel kennen zu lehren, mittelst deren man die Integrale linearer partieller Differenzialgleichungen darstellen kann, so dass sie vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten.

**541.** Betrachten wir die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2}, \tag{1}$$

welche das Gesetz der Bewegung der Wärme in einem prismatischen Stabe ausdrückt, und integriren wir dieselbe, unter der Voraussetzung, dass $z = F(y)$ werde für $x = 0$, wo $F$ eine gegebene Funktion bedeutet. Setzen wir $z = e^{\alpha x + \beta y}$, so wird $\alpha = a^2\beta^2$ und es ist somit:

$$z = e^{a^2\beta^2 x + \beta y}$$

ein der Gl. (1) Genüge leistender Werth. Nichts hindert, für die ganz willkürliche Grösse $\beta$ imaginäre Werthe von der Form $\lambda\sqrt{-1}$ zu wählen, wodurch obiger Ausdruck die Gestalt:

$$z = e^{-a^2\lambda^2 x}(\cos\lambda y + \sqrt{-1}\sin\lambda y)$$

annimmt, und sofort zwei particuläre Integrale:

$$z_1 = e^{-a^2\lambda^2 x}\cos\lambda y, \quad z_2 = e^{-a^2\lambda^2 x}\sin\lambda y$$

darbietet, da jeder dieser Ausdrücke für sich der Gl. (1) genügt. Letzteres wird auch noch Statt finden, wenn wir beide Ausdrücke mit constanten Faktoren, beziehungsweise mit $A\cos\lambda\alpha$ und $A\sin\lambda\alpha$ multipliciren; endlich wird auch noch die Summe beider Ausdrücke:

$$z = Ae^{-a^2\lambda^2 x}\cos\lambda(y-\alpha)$$

der Gl. (1) genügen. Lassen wir nun die beiden willkürlichen Constanten $\lambda$ und $\alpha$ successive um die unendlich kleinen Inkremente $d\lambda$, $d\alpha$ wachsen und setzen $A=\varphi(\alpha)\,d\lambda\,d\alpha$, unter $\varphi$ eine willkürliche Funktion verstanden, so gehen aus dem letzten Ausdrucke eine Reihe von unendlich vielen particulären Integralen von der Form:

$$\varphi(\alpha)\,e^{-a^2\lambda^2 x}\cos\lambda(y-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha$$

hervor, deren Summe bekanntlich durch das Doppelintegral:

$$z = \int\!\!\int\varphi(\alpha)\,e^{-a^2\lambda^2 x}\cos\lambda(y-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha \tag{2}$$

gegeben ist, und welche Summe nothwendig wieder der Gl. (1) Genüge leistet, wobei die Grenzen beider Integrale noch willkürlich sind. Wir haben nun nur noch die Bedingung zu erfüllen, dass für $x=0$ der in (2) dargestellte Werth von $z$ in $F(y)$ übergehe. Zu diesem Ende nehmen wir beide Integrale zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$; für $x=0$ verwandelt sich dann das Doppelintegral in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(y-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha,$$

welches, vermöge der Fourier'schen Formel [§. 476, Gl. (7)], für alle Werthe von $y$ gleich ist $2\pi\varphi(y)$. Der Werth dieses Ausdruckes muss aber, der Bedingung zufolge, $=F(y)$ sein; man hat daher $\varphi(y)=\frac{F(y)}{2\pi}$, also auch $\varphi(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{2\pi}$, womit wir für das gesuchte Integral den Ausdruck:

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,e^{-a^2\lambda^2 x}\cos\lambda(y-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha$$

erhalten.

Schreibt man das vorstehende Doppelintegral in der Form:

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 x}\cos\lambda(y-\alpha)\,d\lambda,$$

so lässt sich die auf $\lambda$ bezügliche Integration mittelst der Formel (3) in §. 450 leicht ausführen, wodurch

$$z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4a^2x}}\, d\alpha$$

sich ergibt. Eine noch einfachere Form erhält dieser Ausdruck mittelst der Substitution:

$$\frac{y-\alpha}{2a\sqrt{x}} = -\xi, \quad \alpha = y + 2a\xi\sqrt{x}, \quad d\alpha = 2a\sqrt{x}.d\xi,$$

wodurch derselbe in folgenden:

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} F(y + 2a\xi\sqrt{x})\, d\xi$$

übergeht. Dieser Ausdruck erfüllt alle Anforderungen; er leistet der Gl. (1) Genüge und nimmt für $x = 0$ den Werth $F(y)$ an.

**542.** Die vorgelegte Differenzialgleichung sei wieder:

$$\frac{dz}{dx} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2},$$

das Integral aber den Bedingungen unterworfen, dass

1) $z = F(y)$ für $x = 0$,

und 2) $z = 0$ für $y = 0$ und $y = l$.

Wir können in diesem Falle unmittelbar von dem im vorigen §. gefundenen particulären Integral:

$$z = e^{-a^2\lambda^2 x} \sin \lambda y$$

ausgehen, indem es bereits der Forderung entspricht, für $y = 0$ zu verschwinden. Damit es auch für $y = l$ auf Null sich reducire, genügt es, $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ zu setzen, unter $n$ eine beliebige ganze Zahl verstanden, wodurch:

$$z = e^{-n^2kx} \sin \frac{n\pi y}{l}$$

wird, wenn wir Kürze halber $\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 = k$ setzen. Dieser Ausdruck liefert, durch Aenderung von $n$, eine unendliche Anzahl particulärer Integrale, deren Summe jedoch hier nicht, wie im vorhergehenden §., durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden kann, da die Grösse $n$ nicht stetig sich ändert, sondern nur der ganzen Werthe 1, 2, 3, .... fähig ist. Wir stellen daher das allgemeine Integral in der Form einer unendlichen Reihe dar:

$$z = D_1 e^{-1^2kx} \sin \frac{\pi y}{l} + D_2 e^{-2^2kx} \sin \frac{2\pi y}{l} + D_3 e^{-3^2kx} \sin \frac{3\pi y}{l} + \dots \quad (2)$$

wo $D_1, D_2, \dots$ willkürliche Constanten bedeuten, welche nun noch

so zu bestimmen sind, dass dieser Ausdruck auch der Bedingung 1) Genüge leiste, für $x=0$ in $F(y)$ überzugehen. Für $x=0$ verwandelt sich aber die Gl. (2) in:

$$F(y) = D_1 \sin\frac{\pi y}{l} + D_2 \sin\frac{2\pi y}{l} + D_3 \sin\frac{3\pi y}{l} + \ldots,$$

welcher Gleichung wir Genüge leisten, wenn wir:

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \qquad (3)$$

setzen, wie ein Blick auf die Formel (11), §. 474, auf der Stelle zeigt. Die Glgn. (2) und (3) enthalten die vollständige Auflösung der Gl. (1) mit Rücksicht auf die hier vorgeschriebenen Bedingungen.

**543.** Nehmen wir wieder die schon in §. 540 betrachtete Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

auf, welche das Gesetz der schwingenden Bewegung der Saiten oder der Luft in cylindrischen Röhren ausdrückt, und bestimmen die Funktion $y$ derart, dass

für $t=0$: 1) $y=\varphi(x)$ und 2) $\frac{dy}{dt}=\psi(x)$

sei, wo $\varphi$ und $\psi$ zwei gegebene Funktionen von $x$ bedeuten.

Auf dem in §. 541 betretenen Wege findet man, mittelst der Substitution: $y=e^{\alpha t+\beta x}$ sehr leicht, dass die Werthe:

$$y_1 = \cos\lambda x\cos\lambda at, \qquad y_2 = \sin\lambda x\cos\lambda at,$$
$$y_3 = \sin\lambda x\sin\lambda at, \qquad y_4 = \cos\lambda x\sin\lambda at,$$

der Gl. (1) Genüge leisten; es genügt daher auch der Werth $y = y_1 . A\cos\lambda\alpha + y_2 . A\sin\lambda\alpha$, d. i.:

$$y = A\cos\lambda at\cos\lambda(x-\alpha),$$

wo $A$, $\lambda$, und $\alpha$ willkürliche Constanten sind. Setzt man nun $A = F(\alpha)\,d\lambda\,d\alpha$, unter $F$ eine willkürliche Funktion verstanden, und integrirt nach $\lambda$ und $\alpha$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so hat man:

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\cos\lambda at\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $t=0$, so geht die linke Seite $y$, vermöge der oben vorgeschriebenen Bedingung 1) über in $\varphi(x)$, während das Integral rechter Hand, kraft des Fourier'schen Theorems [Gl. (7), §. 476] in $2\pi F(x)$ sich verwandelt; hiedurch bestimmt sich die willkürliche Funktion $F(x)=\frac{\varphi(x)}{2\pi}$, und es wird:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda at\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck genügt nun wohl der Gl. (1) und der Bedingung 1), aber nicht der Bedingung 2), indem er für $\frac{dy}{dt}$ den Werth 0 statt $\psi(x)$ darbietet. Es unterliegt aber keiner Schwierigkeit, für $y$ einen zweiten Ausdruck aufzustellen, welcher für $t=0$ verschwindet, und $\frac{dy}{dt}=\psi(x)$ gibt; dieser Ausdruck, zu jenem (2) addirt, liefert dann offenbar das vollständige, beiden Bedingungen genügende Integral der Gl. (1). Zu diesem Zwecke bilden wir aus obigen Werthen von $y_3$ und $y_4$ das particuläre Integral:

$$y = y_3\frac{A\sin\lambda\alpha}{\lambda} + y_4\frac{A\cos\lambda\alpha}{\lambda},$$

d. i.

$$y = A\frac{\sin\lambda at}{\lambda}\cos\lambda(x-\alpha),$$

aus welchem auf gleiche Weise wie oben, das allgemeinere:

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\frac{\sin\lambda at}{\lambda}\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha$$

sich ergibt. Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dt} = a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\cos\lambda at\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha,$$

welche Gleichung für $t=0$ mit Rücksicht auf die Bedingung 2) und das Fourier'sche Theorem in folgende:

$$\psi(x) = a\,.\,2\pi F(x)$$

sich verwandelt, woraus $F(x)=\frac{\psi(x)}{2a\pi}$ sich ergibt. Der gesuchte Ausdruck von $y$ ist daher:

$$y = \frac{1}{2a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\alpha)\frac{\sin\lambda at}{\lambda}\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha,$$

und man hat als vollständiges Integral der Gl. (1), welches gleichzeitig die Bedingungen 1) und 2) erfüllt, den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda at\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha \\ & + \frac{1}{2a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\alpha)\frac{\sin\lambda at}{\lambda}\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wir haben das Integral der Gl. (1), unter Voraussetzung derselben Bedingungen, bereits in §. 540 unter einer anderen Form erhalten,

welche sich jedoch aus dem Ausdrucke (3) ohne Mühe entwickeln lässt. Der erste Theil dieses Ausdruckes lässt sich nämlich mit Benützung der bekannten Formel: $\cos p \cos q = \frac{1}{2}\cos(p-q) + \frac{1}{2}\cos(p+q)$, auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos\lambda(x+at-\alpha)+\cos(x-at-\alpha)]\,\varphi(\alpha)\,d\lambda\,d\alpha,$$

und ist, vermöge des Fourier'schen Satzes:

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

Der zweite Theil erhält mit Hülfe der Formel: $\sin p \cos q = \frac{1}{2}\sin(p+q) + \frac{1}{2}\sin(p-q)$ die Form:

$$V=\frac{1}{4a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\lambda(x+at-\alpha)}{\lambda}-\frac{\sin\lambda(x-at-\alpha)}{\lambda}\right]\psi(\alpha)\,d\lambda\,d\alpha \quad (m)$$

und kann, wie man leicht sieht, auch in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$V=\frac{1}{4a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\alpha)\,d\alpha\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x+at-\alpha)}{\lambda}\,d\lambda-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-at-\alpha)}{\lambda}\,d\lambda\right].$$

Nun folgt aus der in §. 447 entwickelten Formel (5):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\pm\pi,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $b$ positiv oder negativ ist. Hieraus erhellt, dass die beiden in der Klammer stehenden Integrale, welche mit dem vorstehenden der Form nach vollkommen übereinstimmen, sich aufheben, somit $V=0$ machen, wenn die Grössen $x+at-\alpha$ und $x-at-\alpha$ gleiche Zeichen haben. Es genügt daher, die Integration nach $\alpha$ zwischen solchen Grenzen auszuführen, innerhalb welcher diese beiden Grössen entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Diese Grenzen ergeben sich nun aus folgenden Relationen:

wenn $t$ positiv:

$$x+at-\alpha>0;\quad x-at-\alpha<0,\ \text{d. i.: } x-at<\alpha<x+at;$$

wenn $t$ negativ:

$$x+at-\alpha<0,\quad x-at-\alpha>0;\ \text{d. i.: } x+at<\alpha<x-at.$$

Man hat daher, wenn $t$ positiv:

$$V=\frac{1}{4a\pi}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha\,[\pi+\pi]=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha,$$

und wenn $t$ negativ:

$$V = \frac{1}{4a\pi}\int_{x+at}^{x-at} \psi(\alpha)\,[-\pi - \pi] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha,$$

welcher Werth mit dem vorhergehenden zusammenfällt. Setzt man daher $\int \psi(\alpha)\,d\alpha = f(\alpha)$, so wird der zweite Theil von (3):

$$V = \frac{f(x+at) - f(x-at)}{2a},$$

folglich:

$$y = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{f(x+at) - f(x-at)}{2a},$$

und dieser Ausdruck des Integrals stimmt, wie man sieht, mit dem in §. 540 auf einfacherem Wege erhaltenen vollkommen überein.

**544.** Integriren wir die im vorhergehenden §. betrachtete Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

noch unter der Voraussetzung, dass zu den früheren Bedingungen

$$y = \varphi(x) \text{ und } \frac{dy}{dt} = \psi(x) \text{ für } t = 0,$$

noch die folgenden hinzutreten: es sollen, für jeden Werth von $t$, $y$ und $\frac{dy}{dt}$ sowohl für $x = 0$ als auch für $x = l$ in Null übergehen, wobei $x$ das Intervall von 0 bis $l$ nicht zu überschreiten hat.

Wir können hier wieder die schon oben gefundenen der Gl. (1) Genüge leistenden Werthe:

$$y_2 = \sin\lambda x \cos\lambda at, \qquad y_3 = \sin\lambda x \sin\lambda at$$

benützen, welche, wenn wir noch $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ setzen, und $n$ eine ganze Zahl sein lassen, offenbar die Eigenschaft besitzen für $x = 0$ und $x = l$ zu verschwinden. Durch Addition der aus diesen Ausdrücken für $n = 1, 2, 3, \ldots.$ hervorgehenden particulären Integrale erhalten wir sofort als allgemeines Integral:

$$\begin{aligned} y = A_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi at}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi at}{l} + \ldots. \\ + B_1 \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi at}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2\pi at}{l} + \ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

und man übersieht auf der Stelle, dass nicht nur dieser Ausdruck, sondern auch sein nach $t$ genommener Differenzialquotient für $x = 0$

und $x = l$ Null werden, da die Differenziation nach $t$ die Sinusse der von $x$ abhängigen Bögen unberührt lässt. Es erübrigt daher nur noch, die Constanten $A$ und $B$ so zu bestimmen, dass für $t = 0$, $y = \varphi(x)$ und $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$ werde. Für $t = 0$ folgt nun aus (2) die Bedingungsgleichung:

$$\varphi(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots..$$

welche, wie aus Gl. (11) §. 474 erhellt, sofort erfüllt wird, wenn wir

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha) \sin\frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \tag{3}$$

setzen. Differenziren wir ferner die Gl. (2) nach $t$ und setzen im Differenzialquotienten $t = 0$, so verschwindet die mit den Coefficienten $A$ versehene Reihe, und es bleibt:

$$\psi(x) = B_1 \frac{\pi a}{l} \sin\frac{\pi x}{l} + B_2 \frac{2\pi a}{l} \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots.$$

woraus, wieder vermöge der oben citirten Gleichung:

$$B_n . \frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha) \sin\frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha,$$

d. i.:

$$B_n = \frac{2}{na\pi}\int_0^l \psi(\alpha) \sin\frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \tag{4}$$

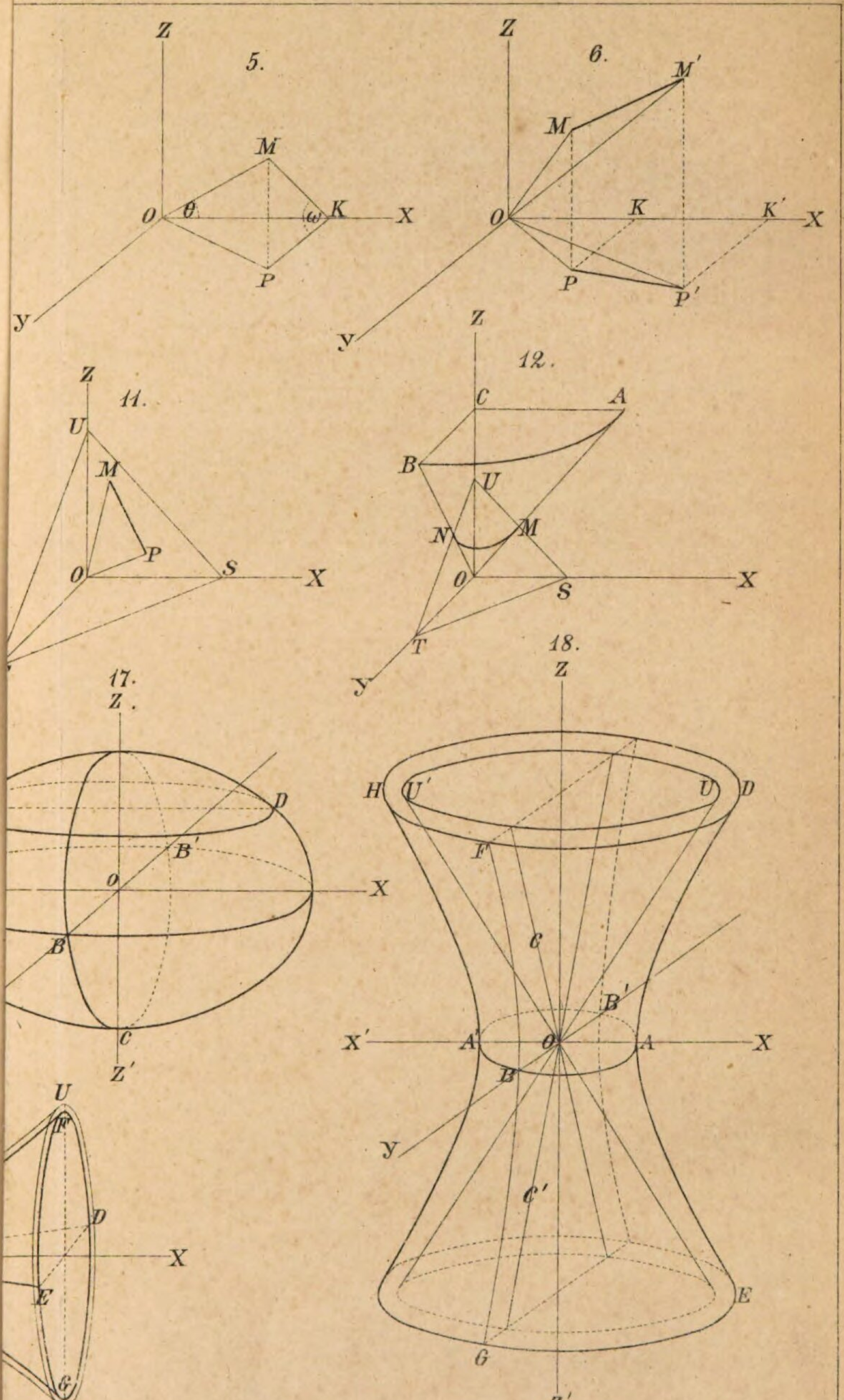
folgt. Die Glgn. (2), (3) und (4) enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe, welche allen gestellten Bedingungen entspricht.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

LEIPZIG,

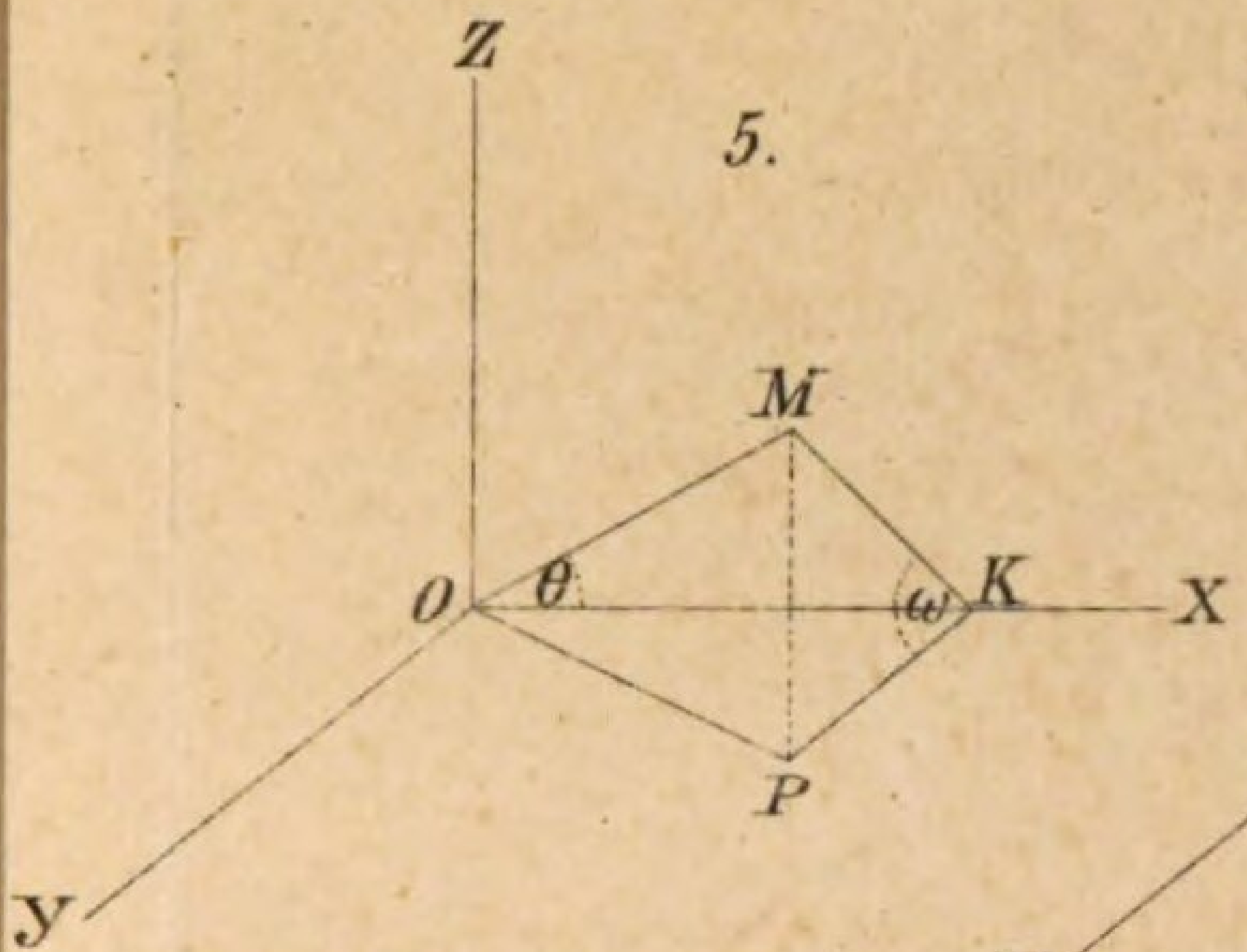
DRUCK VON GIESECKE & DEVRIENT.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

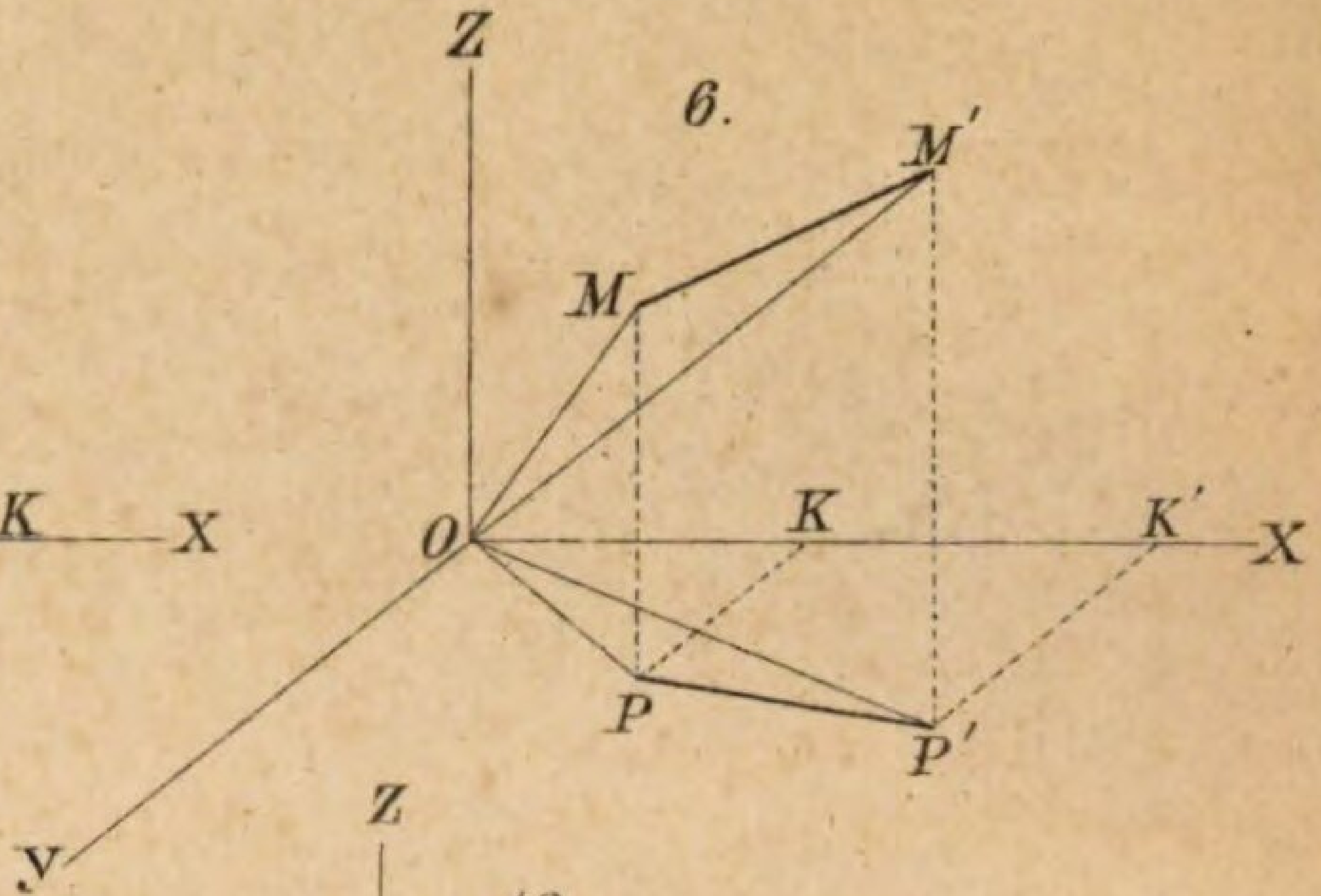

5.
6.
11.
12.
17.
18.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

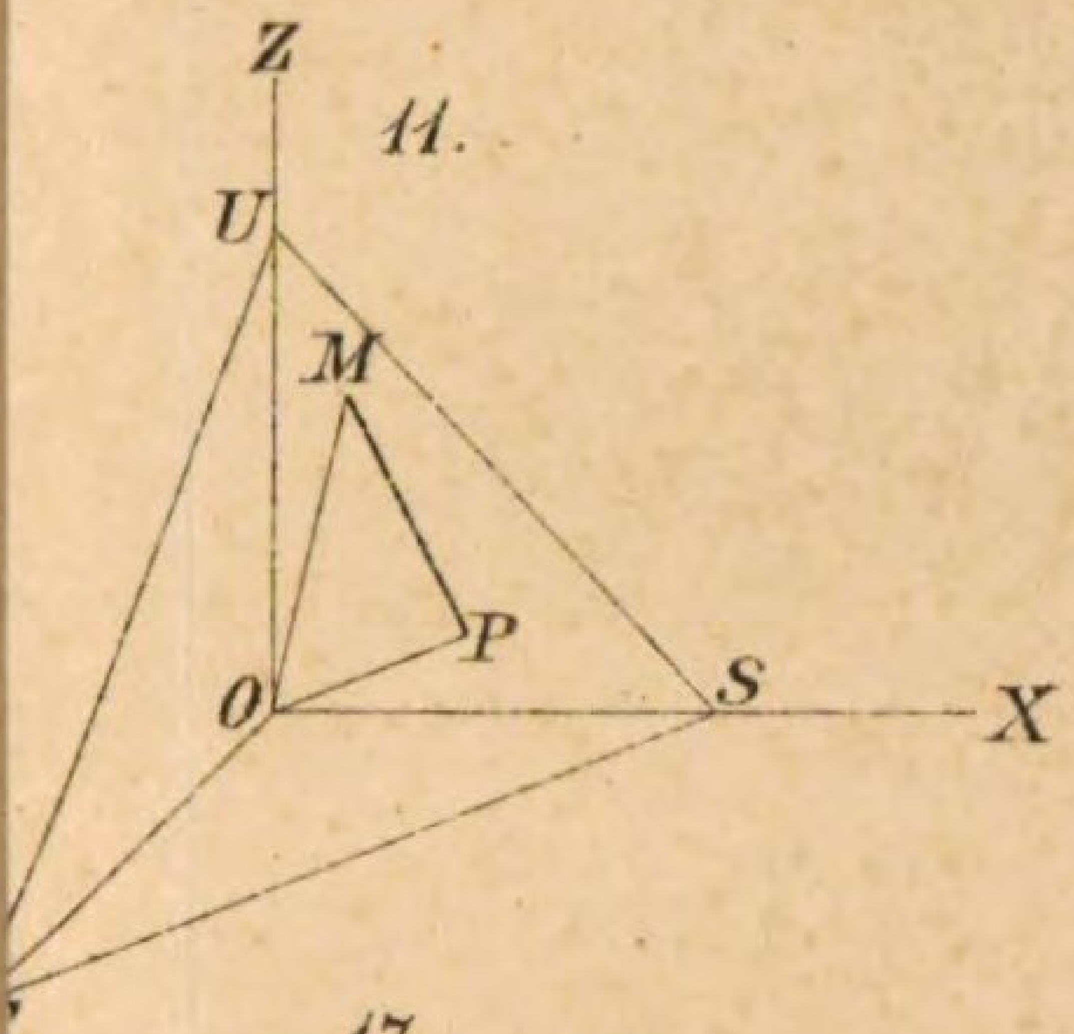
5.


Z
M
O
θ
ω
K
X
P
Y

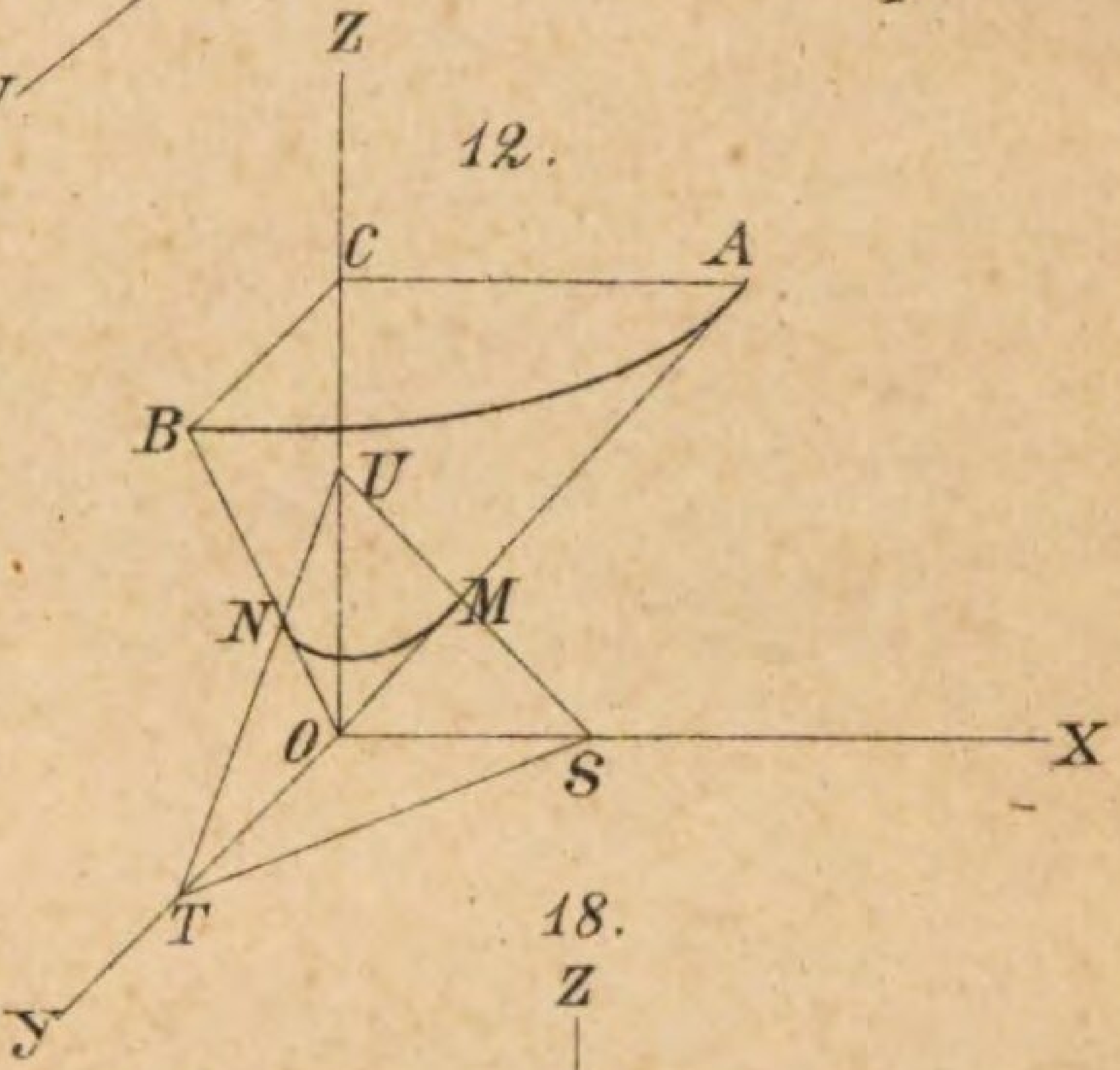
6.


Z
M'
M
O
K
K'
X
P
P'
Y

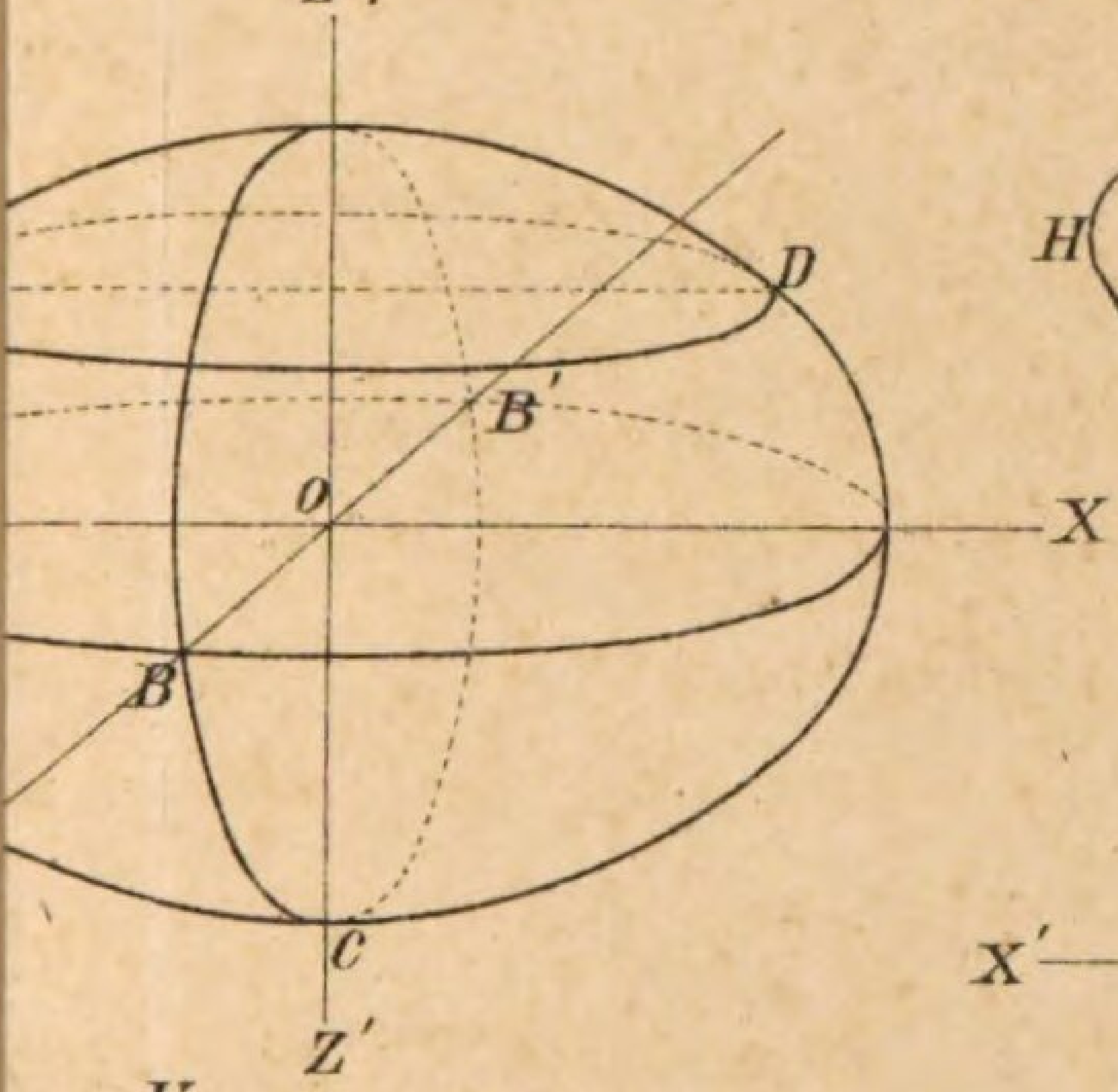
11.


Z
U
M
P
O
S
X

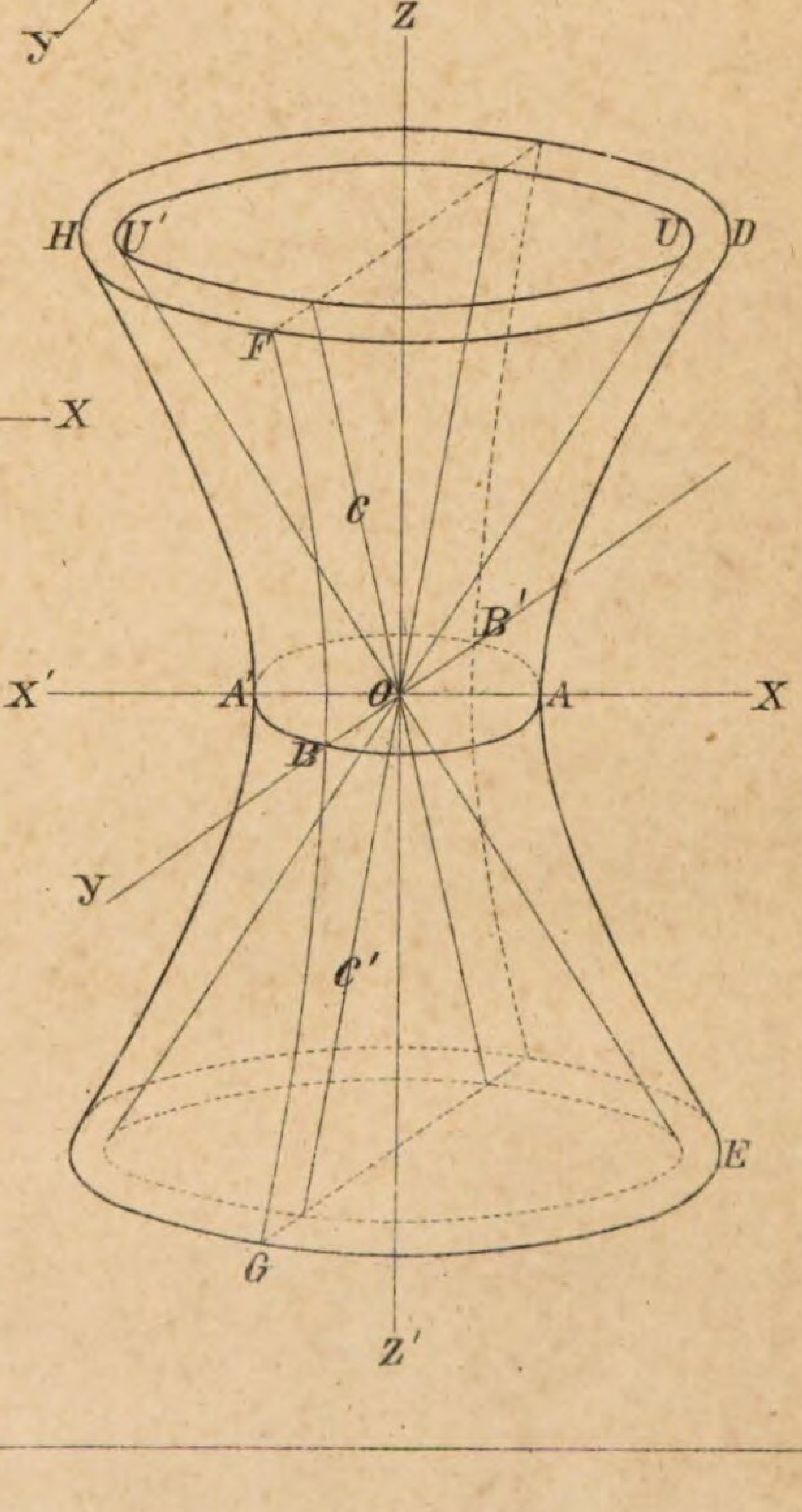
12.

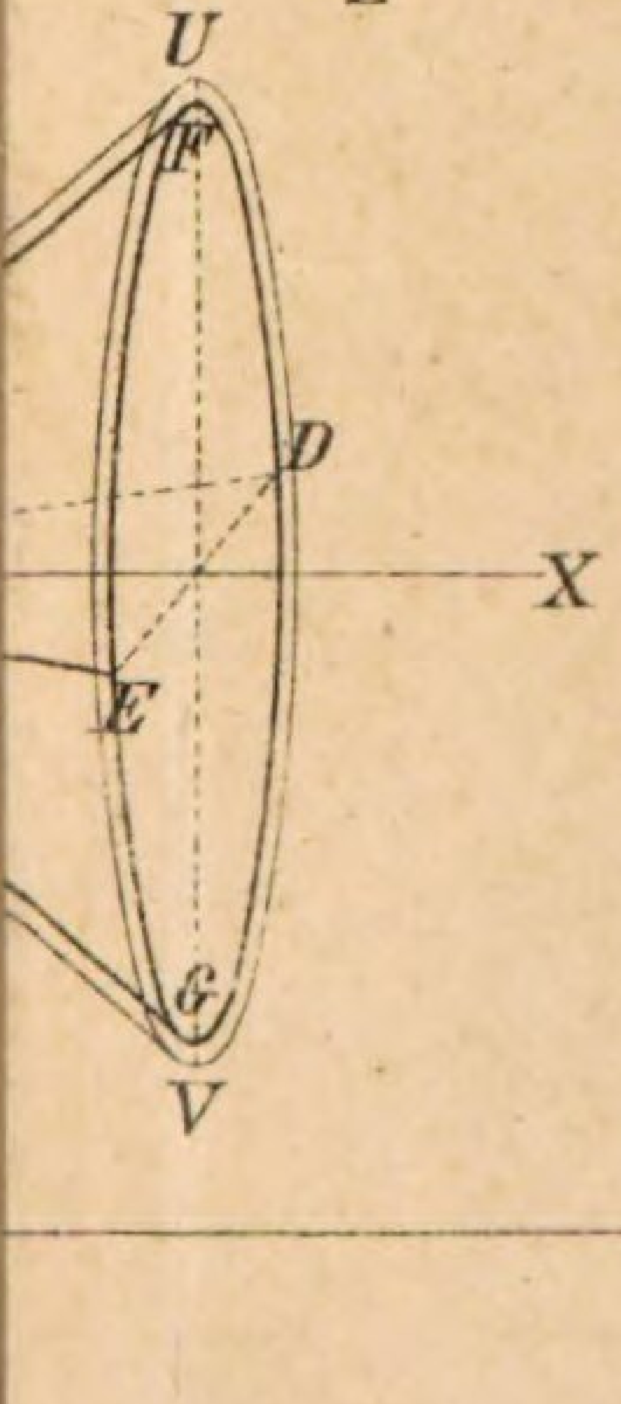

Z
C
A
B
U
N
M
O
S
X
T
Y

17.

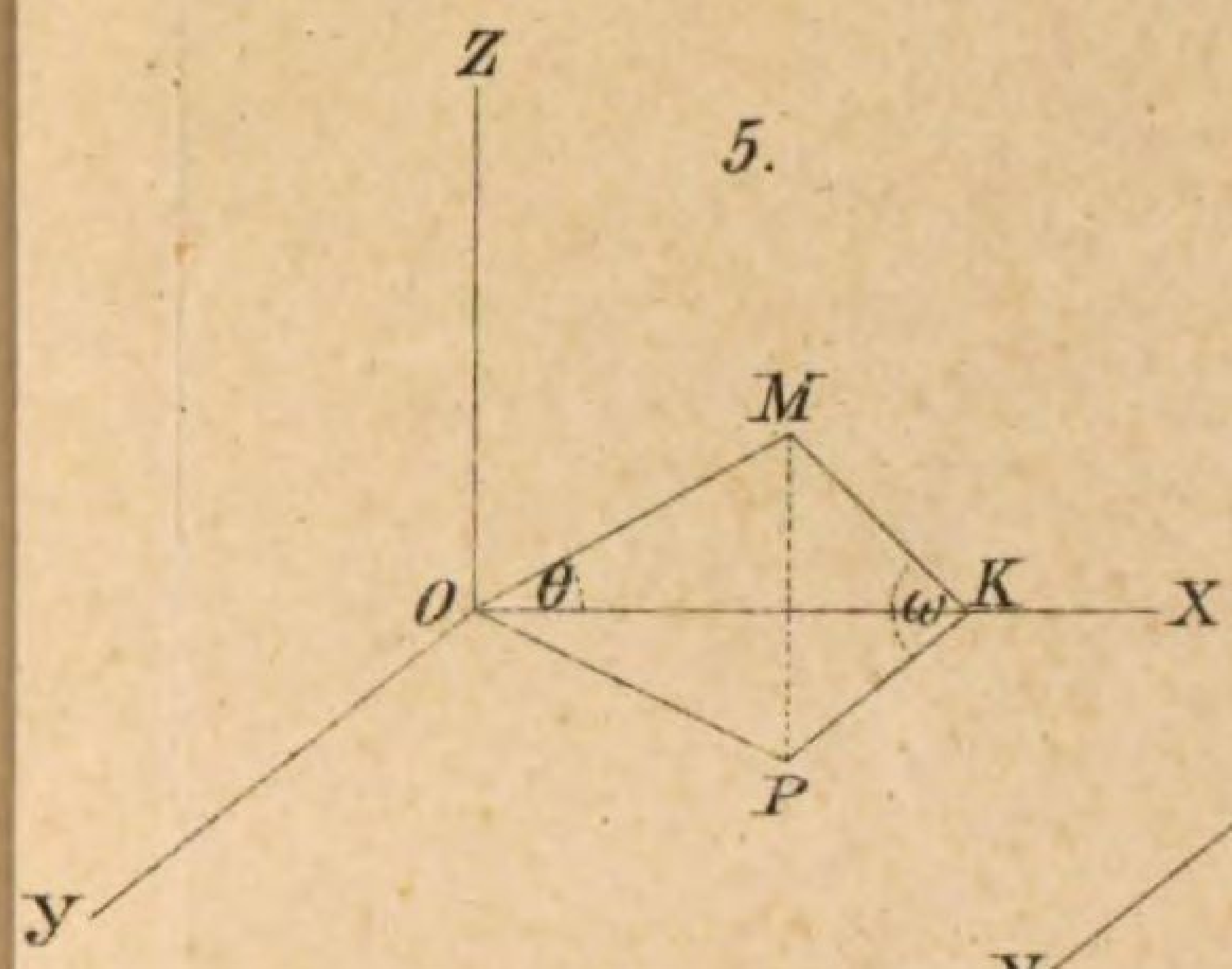

Z
D
B'
O
X
B
C
Z'

18.

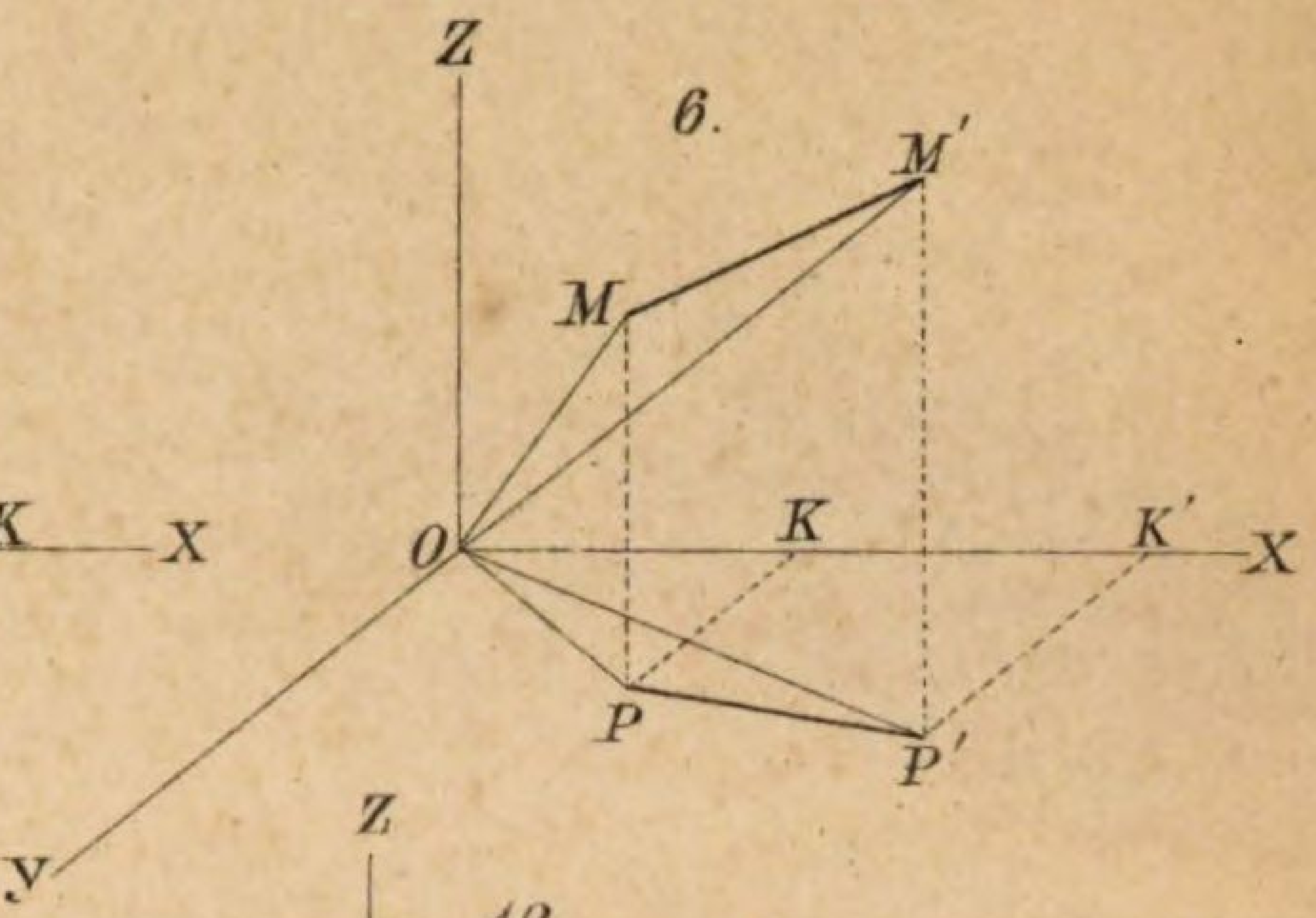

Z
H
U'
U
D
F
C
B'
X'
A'
O
A
X
B
Y
C'
E
G
Z'


U
F
D
X
E
G
V

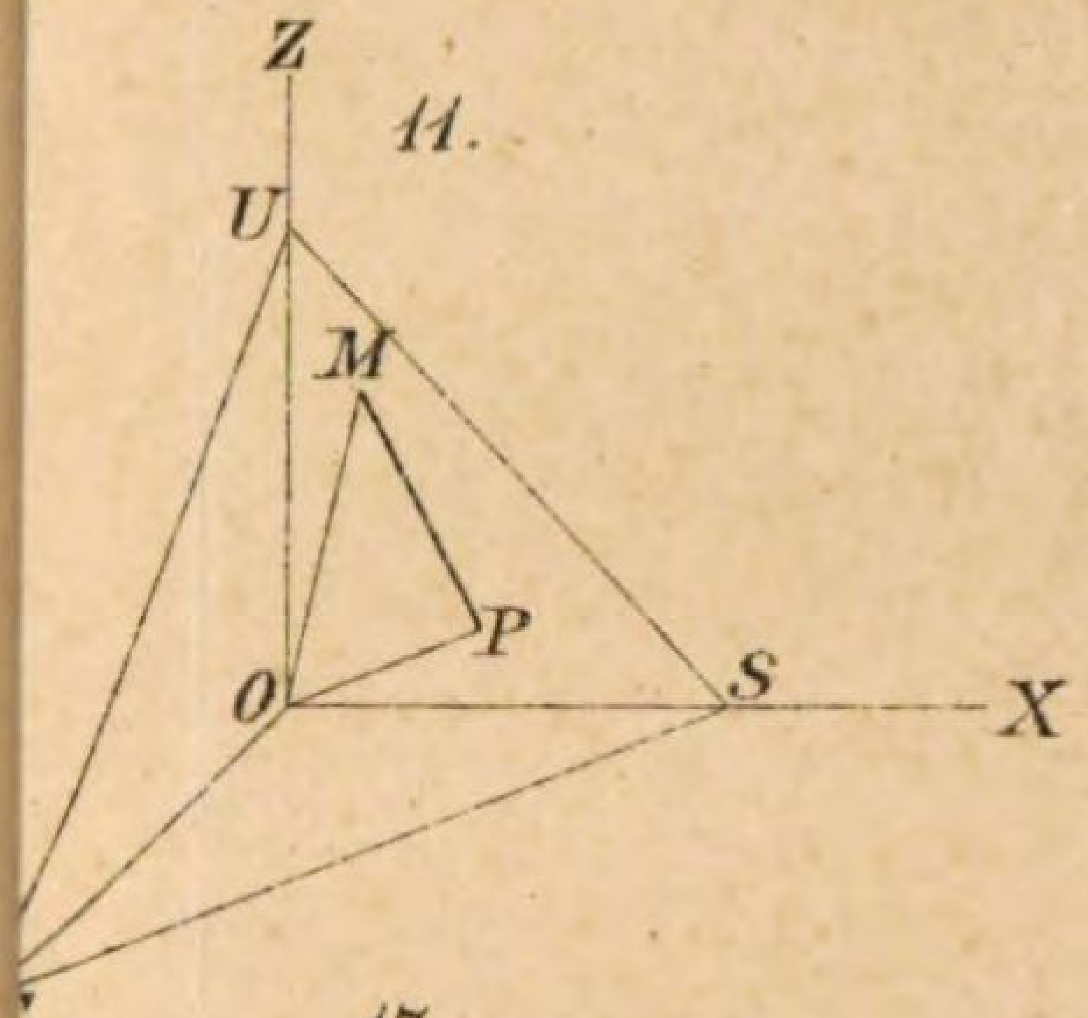
5.


Z
M
O
θ
ω
K
X
P
Y

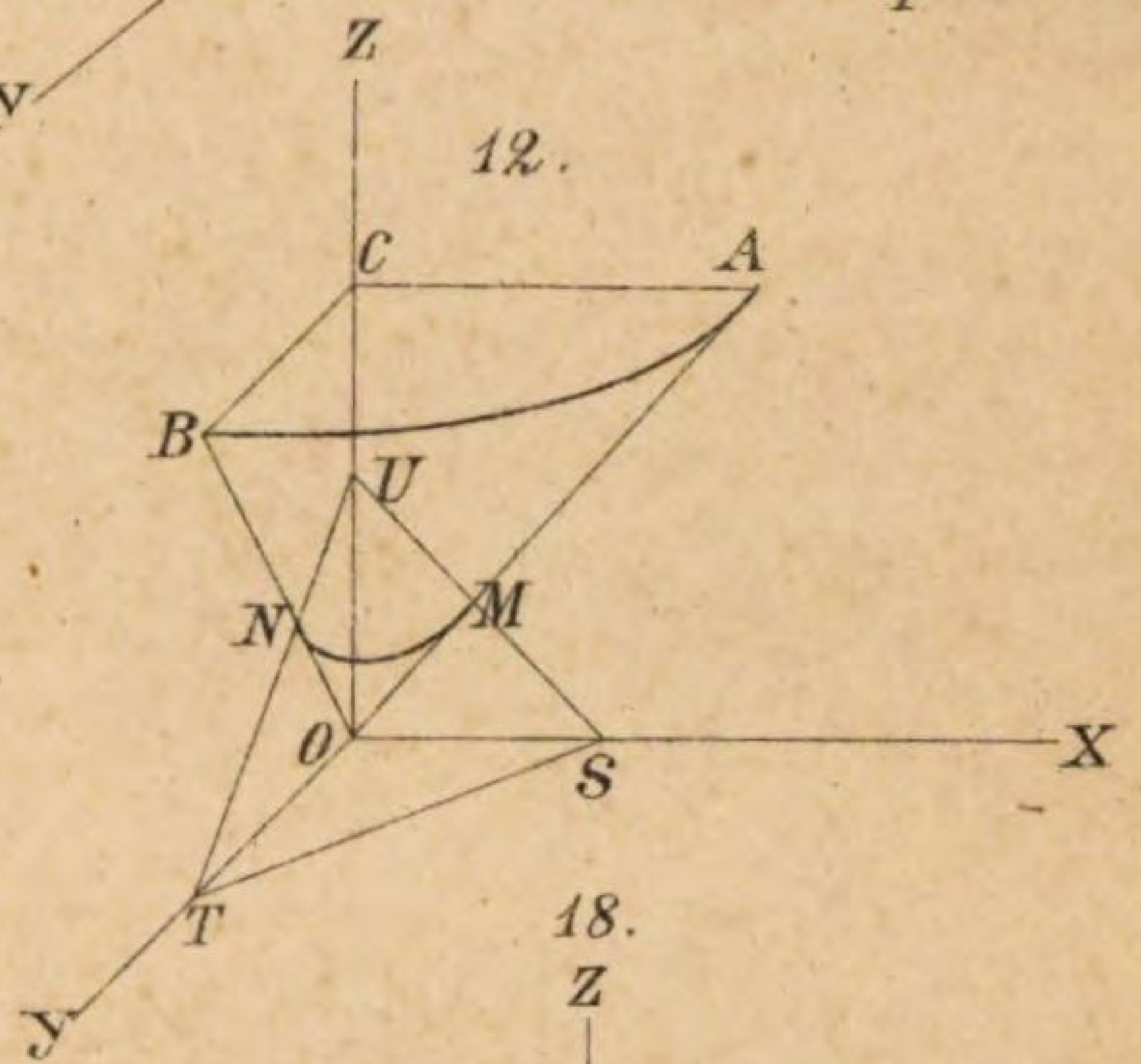
6.


Z
M'
M
O
K
K'
X
P
P'
Y

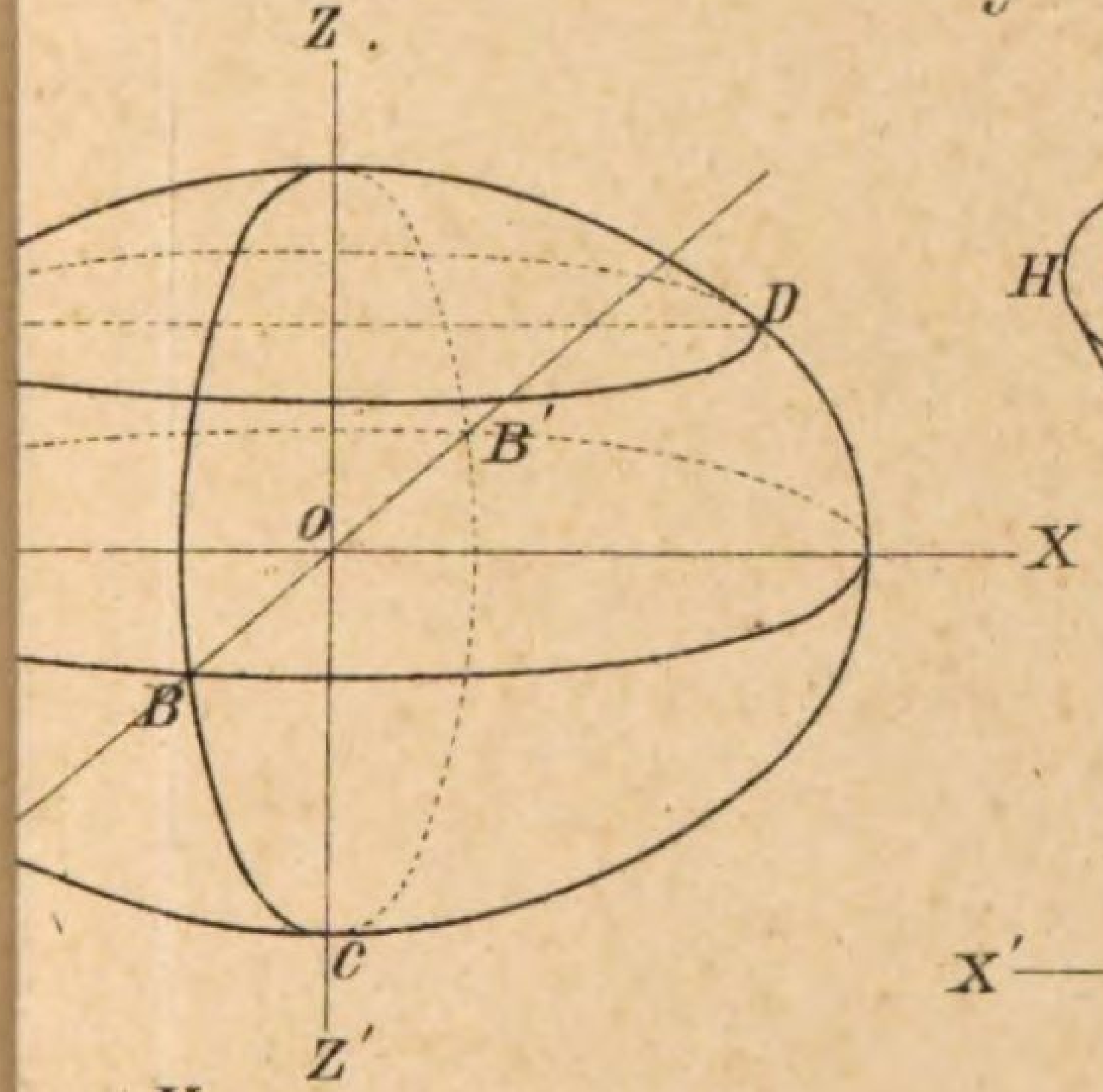
11.


Z
U
M
P
O
S
X

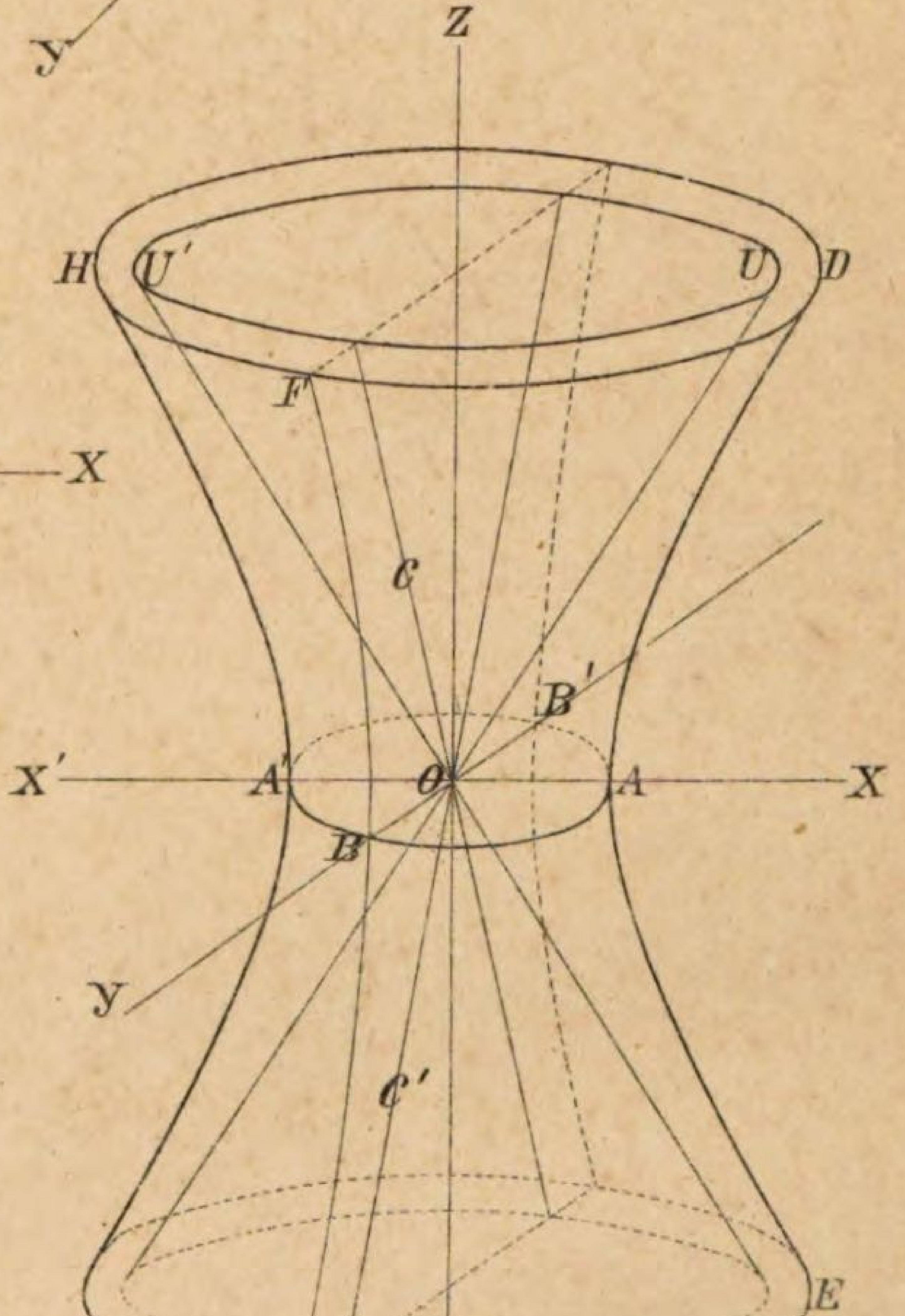
12.

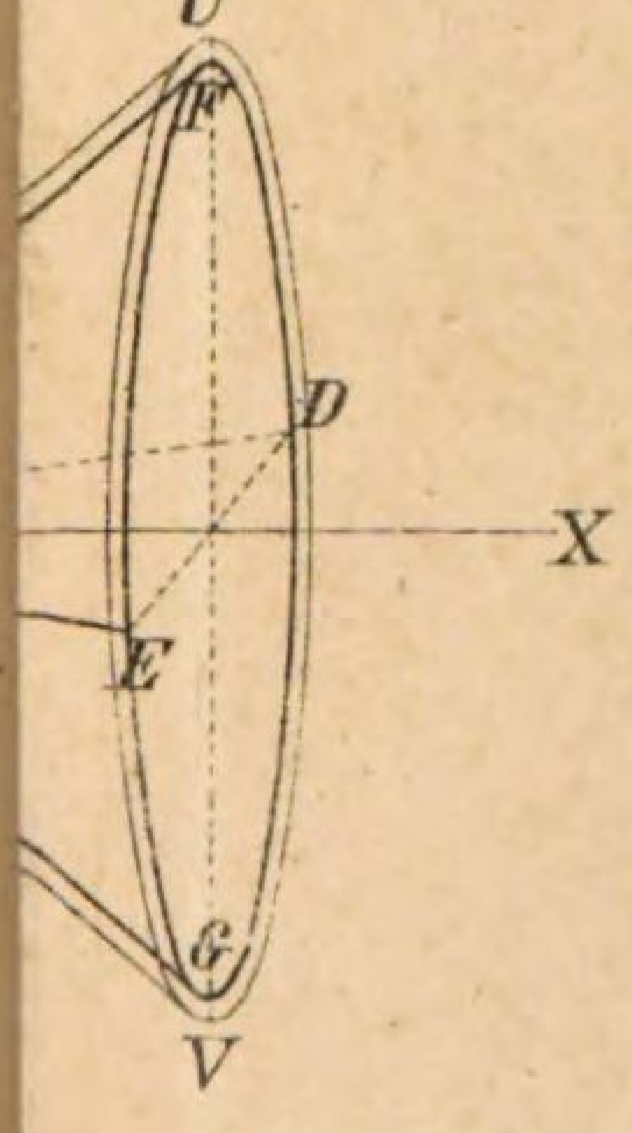

Z
C
A
B
U
N
M
O
S
X
T
Y

17.


Z
D
B'
O
X
B
C
Z'

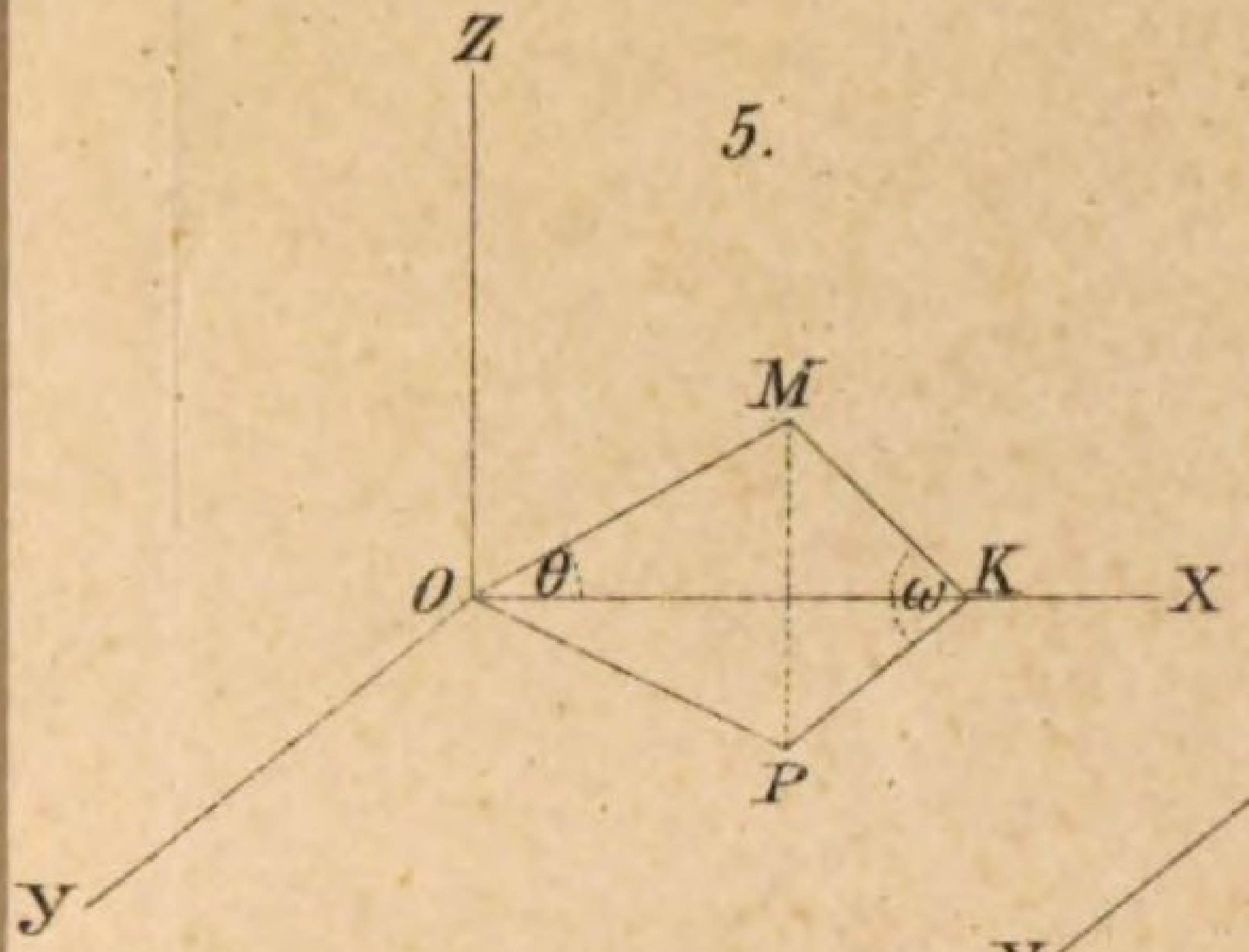
18.


Z
H
U'
U
D
F
C
B'
X'
A'
O
A
X
B
Y
C'
E
G
Z'

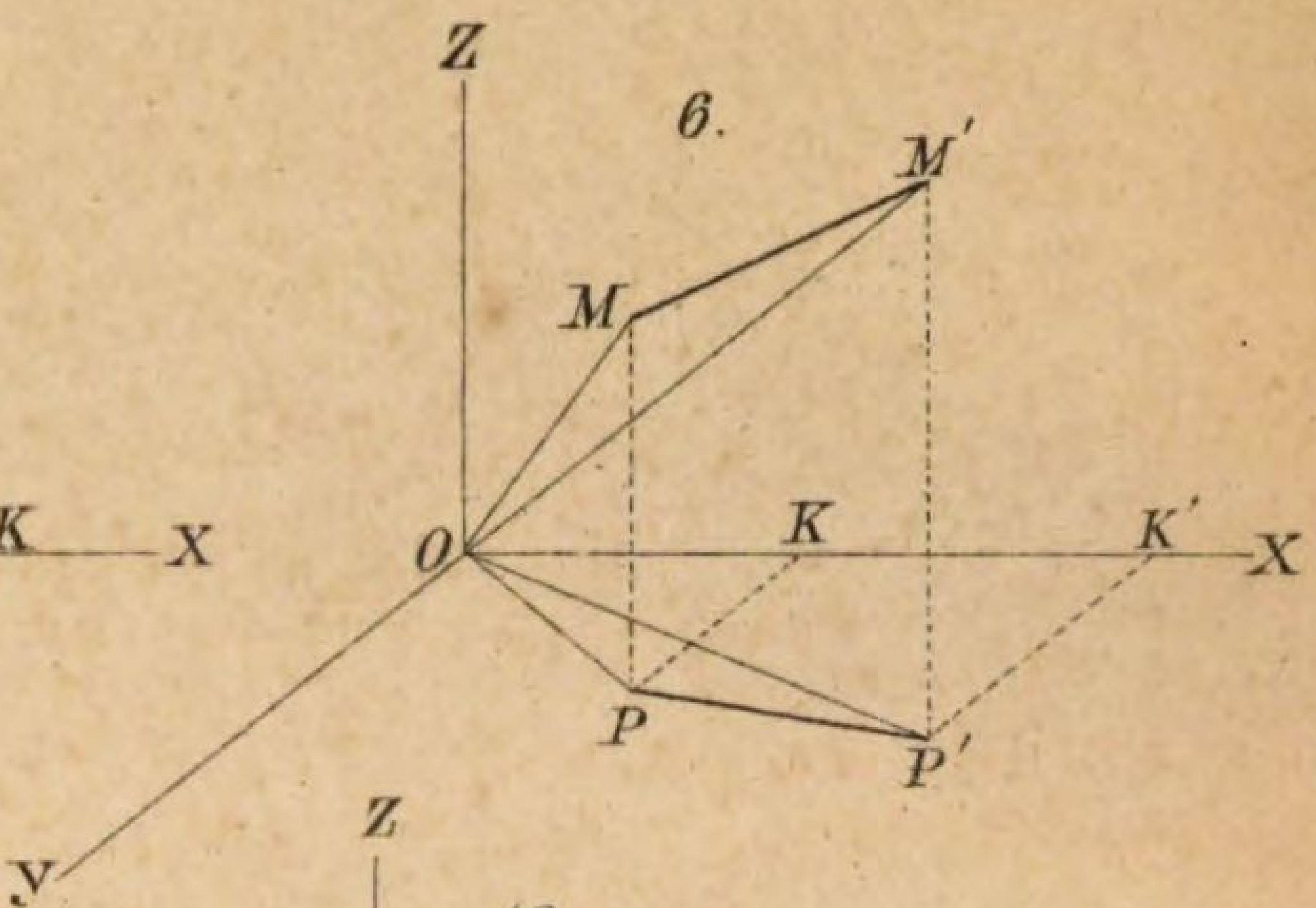

U
F
D
X
E
G
V

Bayerische
Staatsbibliothek
München

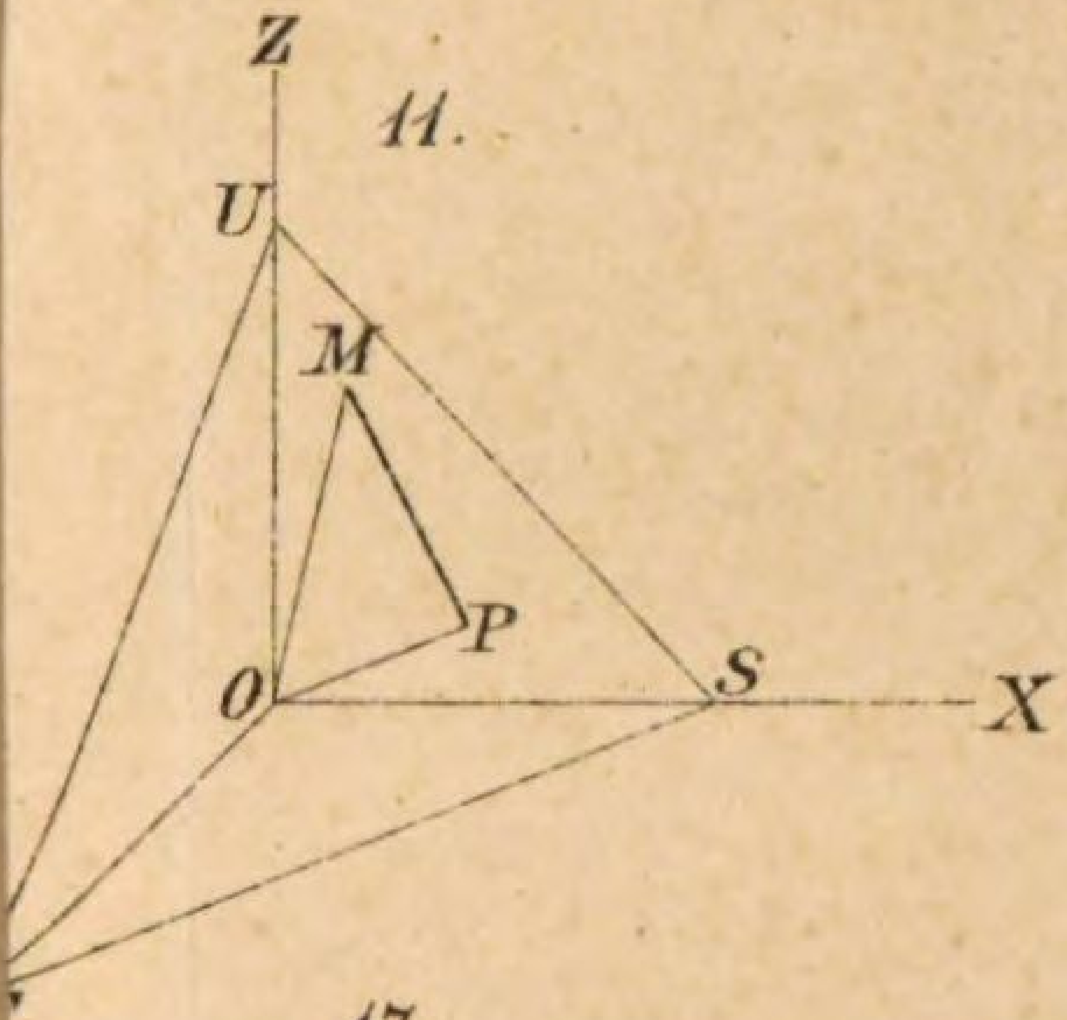
5.


Z
M
O
θ
ω
K
X
P
Y

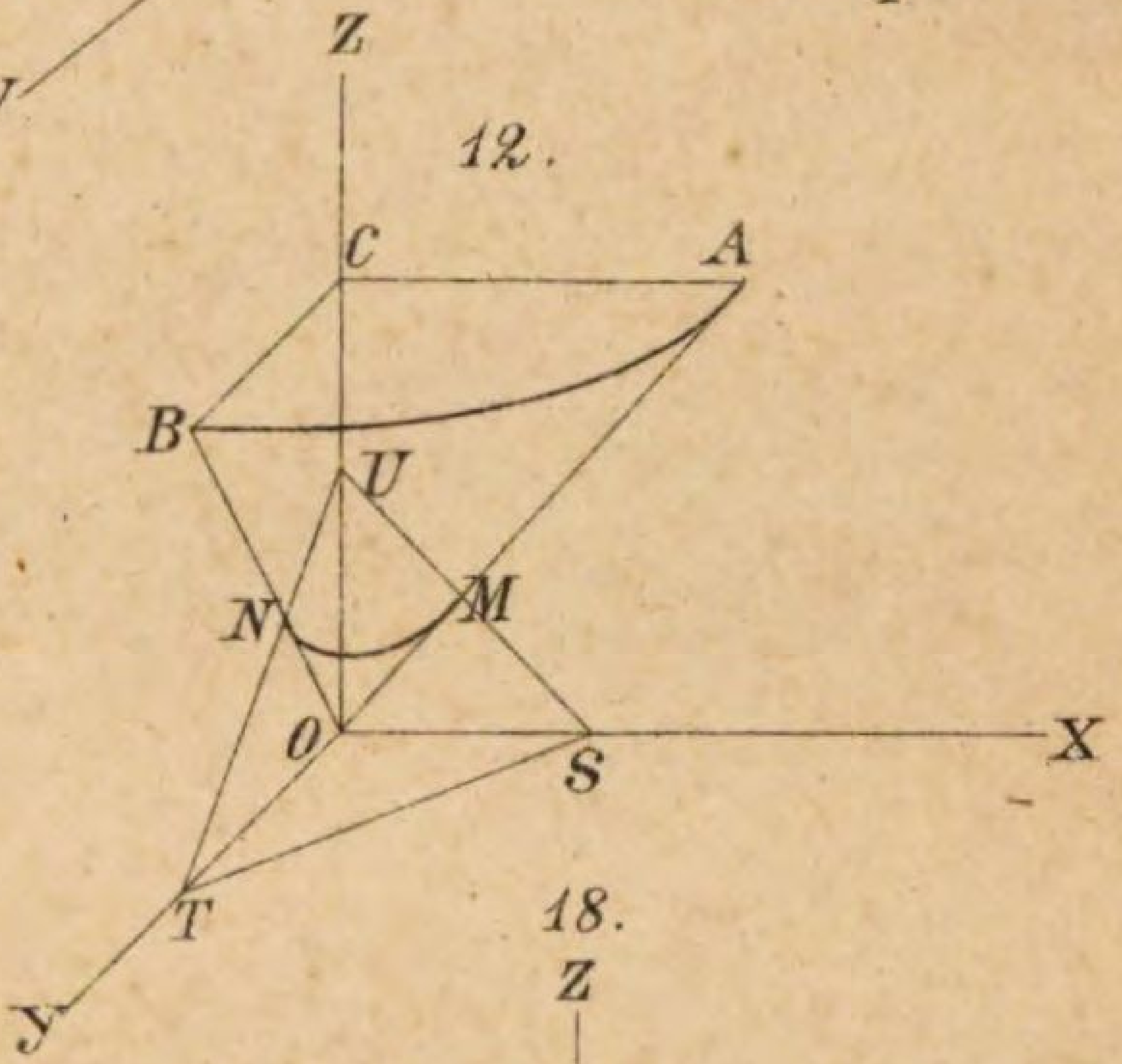
6.


Z
M'
M
O
K
K'
X
P
P'
Y

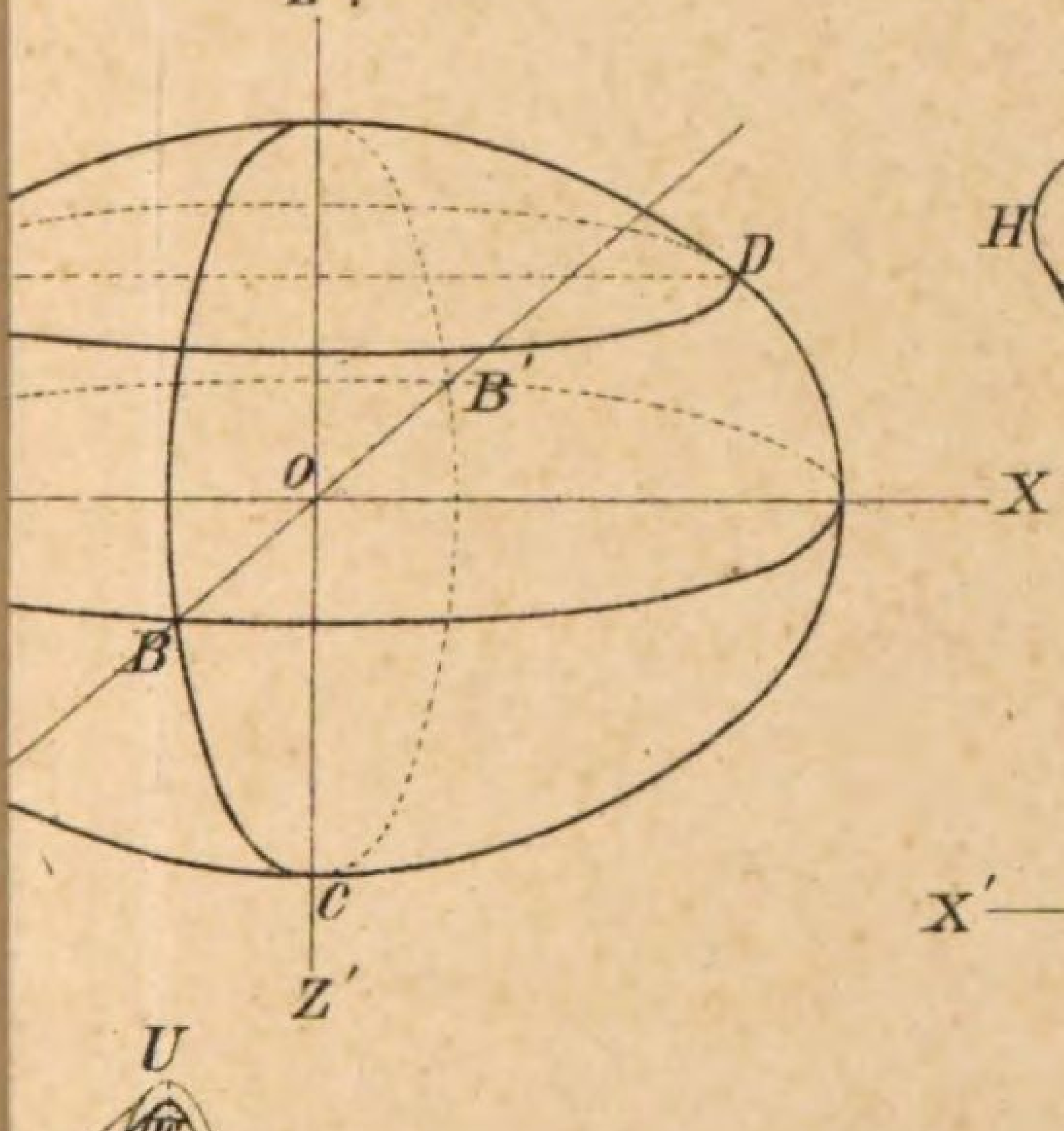
11.


Z
U
M
P
O
S
X

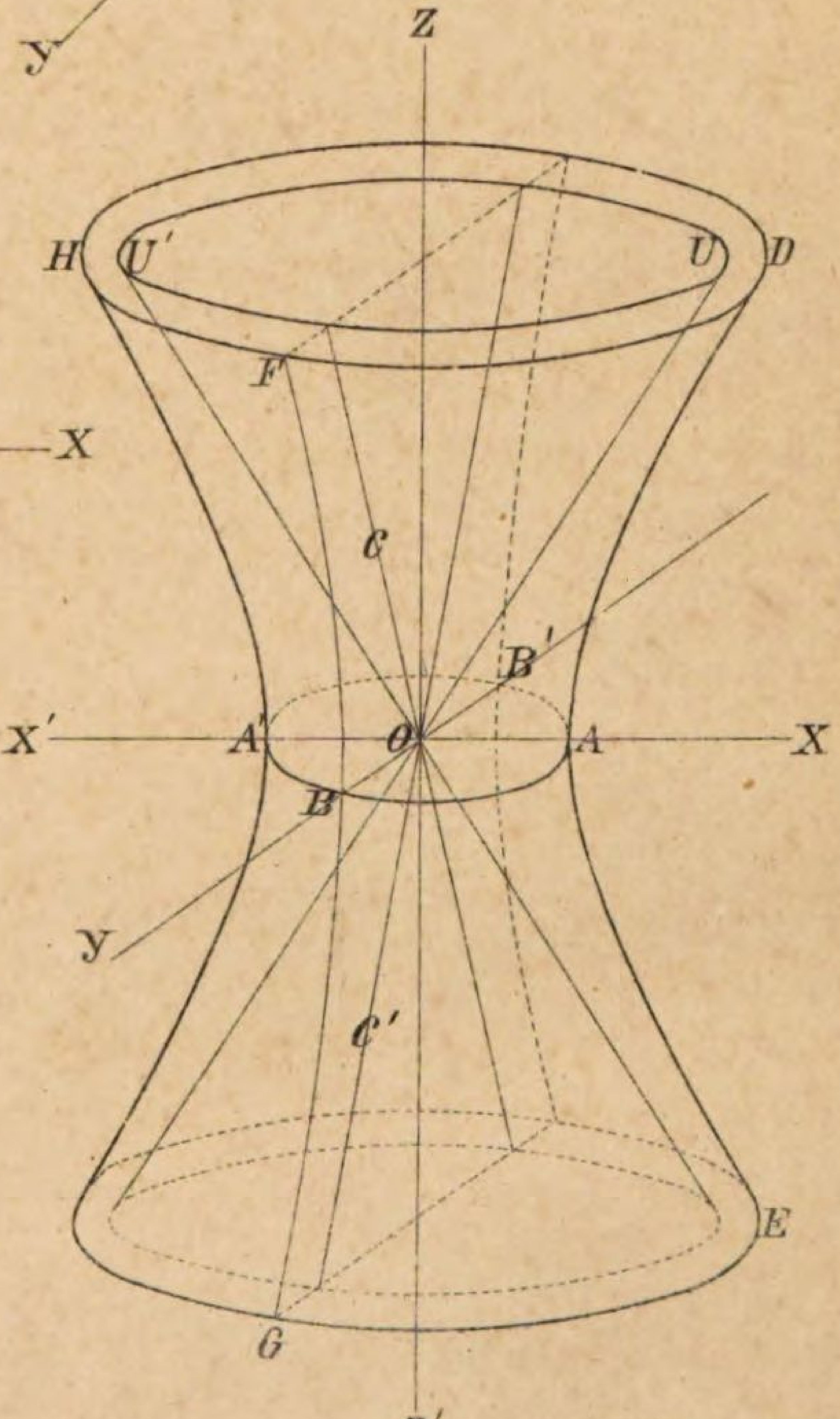
12.

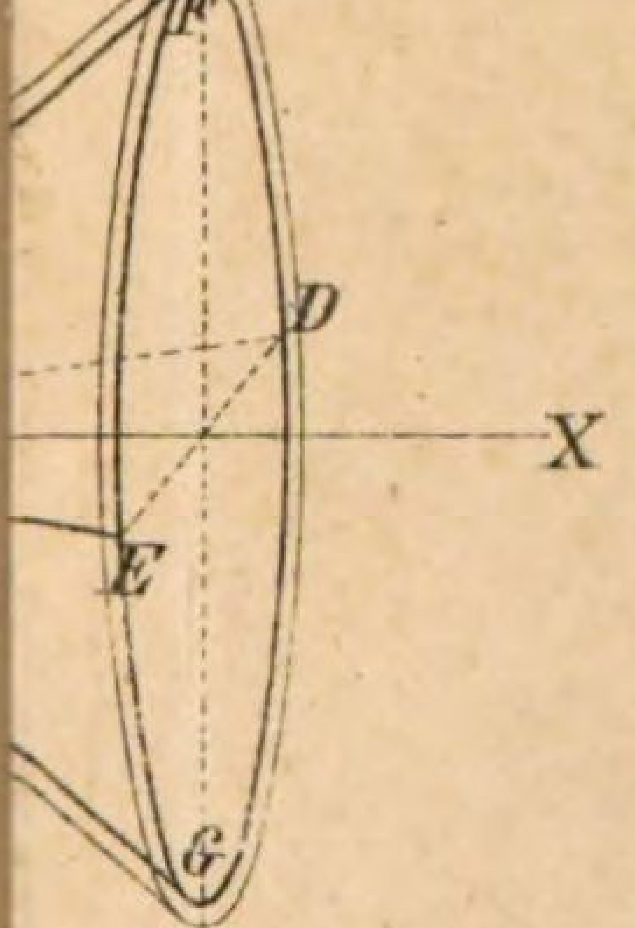

Z
C
A
B
U
N
M
O
S
X
T
Y

17.


Z.
D
B'
O
X
B
C
Z'

18.


Z
H
U'
U
D
F
C
B'
X'
A'
O
A
X
B
Y
C'
E
G
Z'


U
F
D
X
E
G
V

Herr, Joseph,

Lehrbuch der höheren Mathematik

Bd.: Zweiter Band

Wien 1864

Math.p. 219 f-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081983-5